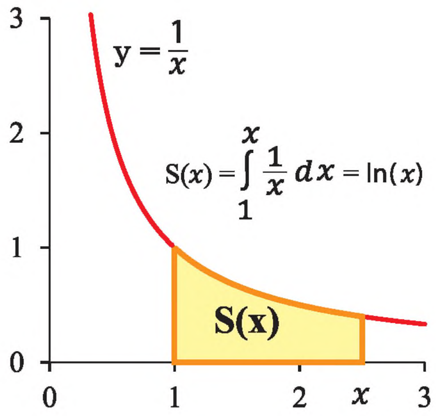
ЧИСЛО КРУЧЕ, ЧЕМ π

Кандидат физико-математических наук Алексей ПОНЯТОВ.

Вопрос о том, кто открыл число е, до сих пор вызывает споры. Долгое время математики, фактически пользуясь этим числом, никак не могли его распознать. Однако потрясающая особенность е появляться в самых неожиданных контекстах и помогать с описанием самых разных природных, технических, экономических и демографических процессов привела к тому, что на сегодняшний день нет, пожалуй, области знаний, где бы оно не использовалось, а некоторые науки обязаны ему значительными успехами.

ПРЯЧУЩЕЕСЯ В ЛОГАРИФМАХ

Число *е* пришло в математику достаточно поздно, поскольку не имело геометрического происхождения в отличие от π, $\sqrt{2}$ или золотого сечения, известных ещё с древности. Неявно оно появилось практически одновременно с изобретением логарифмов в 1614 году, как основание одного из видов логарифмов, который лишь через полвека получил название натурального. Правда, у «отца» логарифмов шотландского математика Джона Непера логарифм был не совсем натуральный (его основание близко к $1/e$), но уже в 1618 году в приложении к переводу его труда на английский язык появилась табличка из нескольких натуральных логарифмов, сделанная, вероятно, английским математиком и изобретателем логарифмической линейки Уильямом Отредом. А на следующий год другой англичанин, математик и преподаватель Джон Спейделл издал таблицы натуральных логарифмов чисел от 1 до 1000 и синусов под названием «Новые логарифмы...». В 1624 году создатель первых таблиц десятичных логарифмов профессор математики в Оксфорде Генри Бригс вычислил коэффициент, позволяющий связать десятичные логарифмы с натуральными. Фактически это был десятичный логарифм *е*.



Однако само число *е* тогда введено не было. Дело в том, что алгоритмы вычисления логарифмов того времени (см. статью «Его величество логарифм», «Наука и жизнь» № 5, 2020 г.) не предусматривали понятия их основания. То, что вычисляемые в те годы логарифмы были по основаниям десять (десятичные) или *е* (натуральные), стало понятно значительно позже. Более того, даже связь логарифмов с показателями степеней ($y = \log_e x$; $x = e^y$), с которой начинается их изучение в современной школе, была обнаружена значительно позже. Точно известно, что эту связь в 1684 году уже знал шотландский математик Джеймс Грегори, которого Исаак Ньютон называл в числе своих учителей и вдохновителей. Так что, когда в наше время *е* называют неперовым числом — это не вполне корректно. Непер не знал этого числа и даже не изобрёл собственно натуральный логарифм.

Любопытно, что термин «экспонента», сейчас прочно связанный с *е*, появился ещё раньше. Первым, кто использовал слово *exponent* в значении «показатель степени», был немецкий математик Михаэль Штифель — это понятие встречается в его книге «Arithmetica integra», вышедшей в 1544 году. Именно Штифель, по сути, предло-

Бельгийский математик Грегуар де Сен-Венсан выяснил, что площадь S(x) фигуры, ограниченной осью x и гиперболой, равна натуральному логарифму от значения x. Приведена современная запись этого утверждения в виде интеграла.

жил алгоритм вычисления логарифмов на основе сопоставления арифметической и геометрической прогрессий, использованный Непером. Но поскольку сам Штифель никаких вычислений не сделал, то слава первооткрывателя досталась шотландцу.

Слово «экспонента» происходит от латинского exponentis — «показывающий». Термин экспоненциальная, или показательная функция (кривая) для зависимости $y = a^x$ ввёл Лейбниц в 1679 году. В настоящее время функцию $y = a^x$ принято называть показательной, а название экспоненциальная функция (экспонента) закреплено за $y = e^x$.

Логарифмы в отсутствии вычислительных машин играли огромную роль в вычислениях, облегчая и упрощая их. Неудивительно, что они были объектом пристального внимания многих учёных, в том числе фигур первой величины — Иоганна Кеплера, Исаака Ньютона, Готфрида Лейбница и Христиана Гюйгенса.

В 1649 году бельгийский математик Грегуар де Сен-Венсан выяснил, что площадь фигуры, ограниченной осью x и гиперболой $y = 1/x$, изменяется от x по логарифмическому закону. С его лёгкой руки такие логарифмы стали называть гиперболическими. Однако никто тогда не догадался посмотреть, при каком x площадь такой фигуры равна 1 (а это будет как раз при $x = e$), так что e и в этот раз найдено не было.

В 1668 году благодаря фундаментальному труду «Logarithmotechnia» немецкого математика Николаса Меркатора в научный язык входит термин «натуральный логарифм», но неуловимое число e по-прежнему остаётся в тени. (Кстати, современное обозначение «ln» по первым буквам слов «логарифм» и «натуральный» появилось лишь через 200 лет, в 1893 году его ввёл американский математик Ирвинг Стрингхем.)

ЧИСЛО *e* КАК ПРЕДЕЛ

Первым число e неожиданно вычислил швейцарский математик Якоб Бернулли, решая задачу, никак не связанную с логарифмами. В 1690 году он опубликовал исследование так называемого сложного

Иллюстрация: Wikimedia Commons/PD

Швейцарский математик Якоб Бернулли (1655—1705), первооткрыватель числа e, один из основоположников теории вероятностей и математического анализа.

процента — дохода, составляющего определённый процент (p — процентная ставка, доля) от предоставляемой суммы денежных средств. При каждом очередном его вычислении учитывается исходная сумма вместе с начисленными ранее процентами. Таким образом, исходная сумма S_0 после n начислений превращается в

$S = (1 + p)^n \cdot S_0$.

Например, при годовой процентной ставке 100% (p = 1) исходная сумма по истечении года (n = 1) удваивается, и каждый рубль превращается в два. Но что будет с полученным доходом, если начислять процент чаще, но во столько же раз уменьшать процентную ставку? Например, если каждые полгода начислять по 50% ($p = 0{,}5$), то в конце года у вас вместо 1 рубля будет:

$S = (1 + ½)^2 \cdot 1$ руб. = 2,25 руб.

А если начислять каждый месяц, то

$S = (1 + 1/12)^{12} \cdot 1$ руб. = 2,261303... руб.

Бернулли показал, что если частоту начисления процентов увеличивать бесконечно, то величина $(1 + 1/n)^n$ имеет предел, лежащий между 2,5 и 3. Это была первая грубая оценка числа e. Бернулли не представлял всей значимости полученного им результата, а потому не стал проводить длительные трудоёмкие вычисления, определяя это значение более точно. Он даже не дал ему никакого обозначения. А ведь именно этот предел теперь служит в математике определением числа *e*. В современных обозначениях:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284\ldots$$

Именно такую сумму даст 1 рубль за год, если начислять процент непрерывно.

Имя Якоба Бернулли также связано с натуральным логарифмом и числом *e* через изученные им свойства различных кривых. Правда, их связи с найденным пределом он не увидел, возможно, просто не успел, поскольку скончался в возрасте 50 лет.

Иллюстрация: NASA/ESA/S. Beckwith (STScI)/Hubble Heritage Team (STScI/AURA)

Рукава галактики М 51 в созвездии Гончие Псы представляют собой логарифмическую спираль.

Иллюстрация: Dicklyon/Wikimedia Commons/CC BY-SA 4.0

Разрез раковины головоногого моллюска наутилуса, показывающий камеры, расположенные приблизительно по логарифмической спирали (пунктирная синяя кривая).

Любимым объектом изучения Бернулли стала так называемая логарифмическая спираль, современная формула которой записывается как $\ln r = k\theta$ или $r = ae^{b\theta}$, где a, b и k — константы. Именно Бернулли первым начал широко использовать при построении кривых полярные координаты (в них положение точки на плоскости описывается двумя числами: радиусом r и углом θ).

В отличие от спирали Архимеда, где витки идут через одинаковое расстояние, витки логарифмической спирали расходятся (расстояние между ними увеличивается). Она часто встречается в природе, её можно обнаружить в строении живых организмов, ураганов и даже галактик. Нашла логарифмическая спираль своё место и в искусстве как способ построения орнаментов и композиций. Так, великий художник эпохи Возрождения Альбрехт Дюрер посвятил ей труд, где показывал, как строить и применять спираль для вычерчивания волют (завитков) капителей, побегов с листвой или украшений епископского жезла.

Сейчас даже трудно представить, с какими сложностями сталкивались исследователи того времени, не имея в своём распоряжении современных форм математической записи и средств математического анализа. Задачи, которые в наше время за считаные минуты решит студент-первокурсник, требовали от них месяцев напряжённой работы и совершения открытий.

Логарифмическая спираль настолько восхитила Бернулли своими свойствами, что он называл её «*spira mirabilis*» — «удивительная спираль» и даже завещал выбить её на своём надгробии вместе с надписью «EADEM MUTATA RESURGO» («изменённая, я возрождаюсь такой же»), которая описывает свойство этой кривой сохранять свою форму после некоторых преобразований. Правда, тут история немного пошутила над математиком, необразованный мастер изобразил на надгробии спираль Архимеда...

Бернулли вслед за Лейбницем посвятил немало времени изучению и так называемой цепной линии — кривой, по которой провисает тяжёлая однородная цепь, подвешенная за концы. Её современная формула тоже выражается через *e*:

$$y = a\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}.$$

Лейбниц и Бернулли сумели очень точно построить график цепной линии, ничего не зная об этом неуловимом числе. Надо сказать, что задолго до того, как за эту кривую взялись математики, она была уже известна строителям, которые издавна строили арки и купола в форме перевёрнутой цепной линии. Они на практике обнаружили, что в подобных сооружениях нагрузка распределяется наиболее эффективно. А число e по своему обыкновению снова пряталось за углом.

Подобные исследования в дальнейшем привели к возникновению целого класса функций, выражающихся с помощью e, — гиперболических функций, тесно связанных с тригонометрическими функциями. В частности, дробь в формуле цепной линии представляет собой гиперболический косинус $ch(x/a)$. Эти функции часто получаются при вычислении различных интегралов и потому служат решениями многих практически важных задач.

Постепенно связь полученной Бернулли величины с логарифмами стала осознаваться, поскольку слагаемые вида

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

входили в ряды (суммы), с помощью которых вычислялись логарифмы. Но окончательно связал логарифмическую функцию с экспоненциальной Леонард Эйлер в своей монографии «Введение в анализ бесконечно малых» (1748 год), объединившей результаты его ранних работ. В ней он дал современное определение этих функций и привёл значение числа e с 23 знаками после запятой. Эту книгу называют одной из главных научных заслуг Эйлера. Как заметил известный математик, академик АН СССР Николай Николаевич Лузин: «Можно с уверенностью сказать, что добрая половина того, что преподаётся теперь в курсах высшей алгебры и высшего анализа, находится в трудах Эйлера».

Фото: Library of Congress's Prints and Photographs/PD

Арка в форме цепной линии в шахском дворце Сасанидов Таки-Кисра (не позднее III века до н. э.) в одном из крупнейших городов античности Ктесифоне (в 32 км от современного Багдада, Ирак).

Швейцарский, немецкий и российский учёный Леонард Эйлер (1707—1783), один из основоположников современной математики, физики и астрономии. Портрет кисти Иосифа Фридриха Августа Дарбеса. 1778 год. Женевский музей искусства и истории.

Иллюстрация: Saiko/Wikimedia Commons/CC BY 3.0

Эйлер же ввёл и само обозначение *e* для этой константы. Первой опубликованной работой, в которой оно появилось, стал его трактат «Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически» (1736 год). Хотя использовать это обозначение в своих рукописях он начал с 1727 или 1728 года.

Почему Эйлер использовал именно букву «*e*», до сих пор спорят историки науки. Сходятся они в одном: он не имел в виду первую букву своей фамилии (Euler). Эйлер был скромным человеком и в стремлении увековечить своё имя не замечен. По одной версии, Эйлер обозначал константы гласными буквами, и буква «*e*» просто следовала за буквой «*a*», которую он уже использовал. Вариант этой версии гласит, что была выбрана следующая буква после часто используемых *a*, *b*, *c* и *d*. По другой версии, которая лично мне нравится больше, «*e*» — первая буква слова *exponent*. Как бы то ни было, но обозначение «*e*» оказалось удачным и стало стандартным обозначением константы, несмотря на то, что предлагались и другие варианты. Лейбниц использовал *b*, Д'Аламбер — *c*, а Бенджамин Пирс даже предложил изобретённый им символ, похожий на канцелярскую скрепку ɷ (зеркальный вариант этого символа он предлагал вместо π). Скорее всего, решающим в судьбе обозначения этого числа оказался авторитет Эйлера, тем более, что оно так удачно совпало с первой буквой его фамилии. В знак его заслуг *e* также называют числом Эйлера, что, на мой взгляд, некорректно, поскольку Бернулли получил его ещё до рождения Эйлера.

Эйлер же доказал, что *e* — иррационально (непредставимо в виде обыкновенной дроби), а вот его трансцендентность (оно не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами) французский математик Шарль Эрмит доказал лишь в 1873 году.

Также Эйлер связал экспоненту с комплексными числами и тригонометрией, что сыграло огромную роль в математике, физике и технических приложениях:

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. При $x = \pi$ отсюда следует знаменитая формула, объединяющая пять основных констант математики: π, *e*, *i*, 0 и 1: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Её иногда называют самой красивой формулой математики.

В романе Жюля Верна «Матиас Шандор» один из героев, силач Матифу, сумел задержать спуск корабля, предотвратив катастрофу. Сделал он это, намотав канат, привязанный к носу судна, на швартовую тумбу (врытая в землю труба, к которой «привязывают» корабль) и удерживая другой конец. Для нас интересно то, что в этом случае сила натяжения *T*, создаваемая кораблём, и уравновешивающая её сила *F*, прикладываемая к другому концу каната, связаны соотношением, выведенным Эйлером:

$T/F = e^{\mu\alpha}$.

Здесь μ — коэффициент трения, α — угол обхвата канатом тумбы в радианах ($\alpha = 2\pi n$, где *n* — число оборотов).

Фото: Audrius Meskauskas/Wikimedia Commons/CC BY-SA 3.0

Швартовый канат, намотанный на двойную причальную тумбу — кнехт.

Писатель не указал в романе, сколько оборотов каната вокруг тумбы сделал Матифу. Но, если он успел сделать два оборота, то при μ = 0,4 удерживающая сила должна быть в 150 раз меньше той, которую создаёт корабль. Сделаем оценку. Пусть корабль имеет массу 50 тонн, тогда при спуске по наклонной плоскости с наклоном 0,1 он тянет канат, как подвешенный груз 5 тонн. Значит, его можно удержать, прикладывая к другой стороне каната усилие, как для подъёма 35 кг. Это под силу даже «обычному» человеку, а не силачу. Если же он сделал три оборота, то разница сил будет примерно в 2000 раз, и корабль удержит даже ребёнок. Поэтому матросам при швартовке и не требуется большая сила, достаточно быстро намотать канат восьмёрками на кнехт (двойную тумбу). А мы встречаемся с этим явлением ежедневно, завязывая узлы.

Помимо предела Бернулли обнаружено много других способов представления e, не только в виде предела, но и в виде бесконечных рядов, например,

$$e = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

или непрерывных (цепных) дробей вроде

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \cdots}}}}}}}$$

и так далее. Некоторые из этих формул удобно использовать для вычисления e с большой точностью.

Правда, стремление вычислить как можно больше знаков числа e никогда не было столь сильным, как для числа π. Тем не менее, в 1853 году математик-любитель Вильям Шенкс вычислил 137 знаков, а в 1871 году довёл их до 205 (при этом у π он вычислил 707 разрядов). В 1884 году Маркус Бурман довёл их количество до 346. С появлением компьютеров число знаков стало быстро расти. В 1949 году на первом электронном компьютере ENIAC Джон фон Нейман вычислил 2010 знаков, а уже в 1961 году их количество перевалило за 100 000. Персональные компьютеры позволили включиться в эту гонку всем желающим. Пример подал соучредитель фирмы «Apple» Стив Возняк, на «Apple II» в 1978 году вычисливший 116 000 знаков. Современные быстрые компьютеры позволяют вычислять триллионы знаков за приемлемое время. В настоящее время рекорд принадлежит некоему Дэвиду Кристлу (Christle) — 12 триллионов знаков. На свой расчёт в 2020 году он потратил чуть больше 19 дней.

ВЕЗДЕСУЩАЯ ЭКСПОНЕНТА

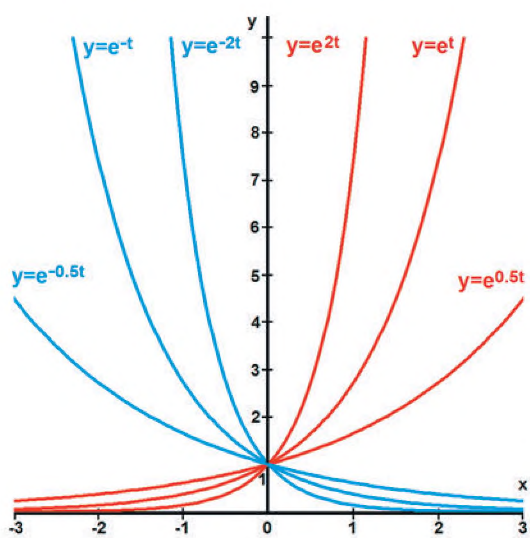
Натуральные логарифмы и e появляются в самых неожиданных местах при решении многих вопросов математики. Приведём несколько примеров.

Известный русский математик Пафнутий Львович Чебышёв нашёл формулу для приближённого подсчёта количества всех простых чисел, не превосходящих данного числа n: $\pi(n) \approx {}^{n}/_{\ln n}$ (здесь π — имя функции). А шотландский математик Джеймс Стирлинг вывел формулу для приблизительного вычисления факториала при очень больших n: $n! \approx \sqrt{2\pi n}({}^{n}/_{e})^{n}$.

Довольно часто e возникает в теории вероятности, например, в проблеме расстройств — такой перестановке элементов множества, когда ни один из элементов не находится в своём правильном положении. Частично её исследовал всё тот же Бернулли вместе с французом Пьером де Монмором. Она также известна как «проблема проверки шляпы». Суть её в том, что приглашённые гости отдают шляпы дворецкому, а тот, не глядя, раскладывает их по коробкам, на каждой из которых написана фамилия гостя. Задача де Монмора заключается в нахождении вероятности, что ни одна шляпа не попадёт в нужную коробку. При числе гостей, стремящемся к бесконечности, она равна $1/e$.

Эта задача, по сути, аналогична другой: человек играет на игровом автомате с шансом выиграть 1 из n. Пусть он сыграет n раз, причём n стремится к бесконечности. Какова вероятность, что он ни разу не выиграет? Интуитивно кажется, что эта вероятность близка к нулю: долго играя, ожидаешь, что когда-то да выиграешь. Но строгая математика выдаёт удручающий

Графики экспоненциальных функций. Красные линии — экспоненциальный рост. Синии линии — экспоненциальное убывание.



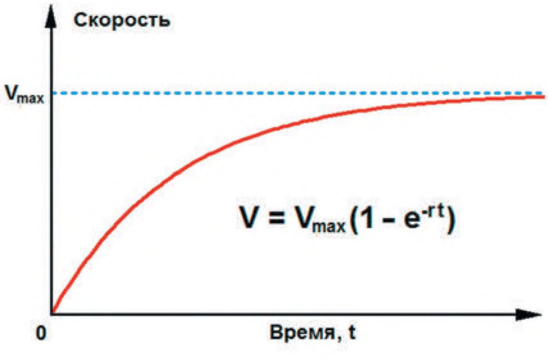
2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995
9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274
2746639193 2003059921 8174135966 2904357290 0334295260
5956307381 3232862794 3490763233 8298807531 9525101901
1573834187 9307021540 8914993488 4167509244 7614606680
8226480016 8477411853 7423454424 3710753907 7744992069
5517027618 3860626133 1384583000 7520449338 2656029760
6737113200 7093287091 2744374704 7230696977 2093101416
9283681902 5515108657 4637721112 5238978442 5056953696
7707854499 6996794686 4454905987 9316368892 3009879312
7736178215 4249992295 7635148220 8269895193 6680331825
2886939849 6465105820 9392398294 8879332036 2509443117
3012381970 6841614039 7019837679 3206832823 7646480429
5311802328 7825098194 5581530175 6717361332 0698112509
9618188159 3041690351 5988885193 4580727386 6738589422
8792284998 9208680582 5749279610 4841984443 6346324496
8487560233 6248270419 7862320900 2160990235 3043699418
4914631409 3431738143 6405462531 5209618369 0888707016
7683964243 7814059271 4563549061 3031072085 1038375051
0115747704 1718986106 8739696552 1267154688 9570350354

Первые 1000 знаков е.

ответ — вероятность не выиграть ничего равна $1/e \approx 0{,}37$.

Однако роль экспоненты значительно шире, чем просто появление e в ответах к некоторым задачам. Окружающий нас мир устроен так, что экспоненциальная зависимость описывает ход множества процессов в самых разных явлениях в живой и неживой природе, а также в деятельности человека. Это возрастание популяции живых организмов, распад радиоактивных элементов, различные колебания и волны, остывание тел, затухание электрического тока в контуре, стабилизация падения парашютиста, насыщение растворов, воздействие сигналов на органы чувств, накопление капиталов и многое другое. Для любителей детективов скажем, что по экспоненциальному убыванию температуры тела убитого человека эксперты-криминалисты определяют, сколько времени прошло с момента смерти.

Экспоненциальная асимптотика. График приближения с течением времени скорости падения тела в вязкой жидкости к максимальному значению (Vmax) представляет собой экспоненту.



Распространённость числа e в первую очередь связана с тем, что экспонента $y = ae^{kt}$ служит решением простого, но очень важного дифференциального (то есть содержащего производную) уравнения: $y' = ky$. Суть его понять очень просто, если вспомнить, что производная y' представляет собой скорость изменения величины y. Таким образом, смысл уравнения в том, что скорость изменения величины пропорциональна самой величине. Подобной моделью описывается огромное количество процессов. Количество рождающихся за год детей (прирост населения) приблизительно пропорционально населению, число распадающихся за определённое время радиоактивных атомов — числу всех атомов, скорость остывания воды — её температуре (точнее разности температур воды и окружающей среды), а прибыль пропорциональна капиталу. При положительном k получаем так называемый экспоненциальный рост величины y, а при отрицательном — экспоненциальное убывание.

Чуть более сложную модель можно проиллюстрировать на примере движения тела в вязкой среде, например в воде или в воздухе, где появляется сила сопротивления, пропорциональная скорости. Сопротивление воздуха при этом растёт по мере увеличения скорости. Например, при падении шарика в вязкой жидкости сопротивление через некоторое время уравновешивает силу тяжести (mg), и скорость V перестаёт расти. Но как происходит этот процесс? Для тех, кто помнит школьную физику, приведём второй закон Ньютона: $ma = mg - kV$, где m — масса тела, g — ускорение свободного падения, k — коэффициент пропорциональности, $a = V'$ — ускорение. Для скорости это даёт дифференциальное уравнение $V' = g - rV$. Здесь $r = k/m$. Решение уравнения приводит к процессу, в котором скорость экспоненциально приближается к максимальному значению $V_{max} = g/r$, зависящему от массы тела и коэффициента k. Это называют экспоненциальной асимптотикой. Подобная модель описывает множество явлений. Например, так будет устанавливаться максимальный электрический ток из-за явления электромагнитной индукции или возвращаться в положение равновесия в вязкой жидкости отклонённый маятник. Аналогичная ситуация возникает и при падении парашютиста под действием силы тяжести (только сила сопротивления воздуха в этом случае будет пропорциональна квадрату скорости). Благодаря этому парашют и позволяет безопасно приземлиться.

Размер статьи не позволяет разобрать более сложные случаи. Скажем только, что колебания и волны описываются экспонентами с комплексными показателями $e^{(\gamma+i\omega)t}$. Мнимая часть комплексного показателя степени (содержит i) описывает периодические колебания с частотой ω, а действительная, в зависимости от знака, — нарастание или затухание колебаний. Этими экспонентами представляются и электромагнитные волны, и колебания тока в электрических цепях, и волновая функция — основа квантовой механики.

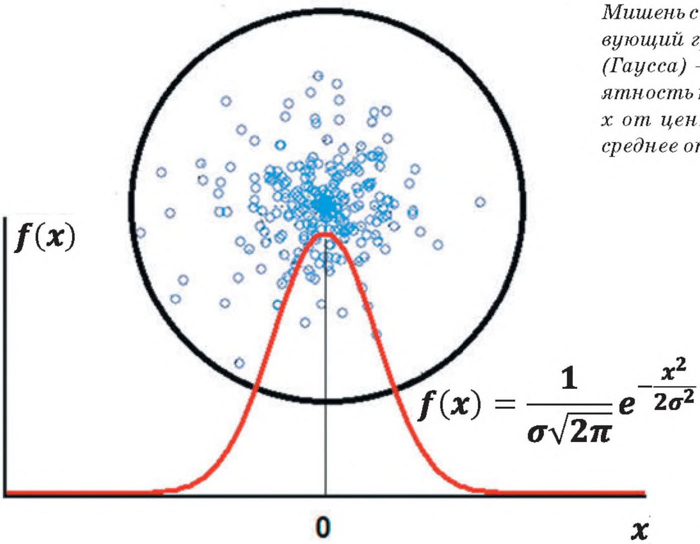
Как уже говорилось выше, формула Эйлера связывает экспоненту с синусами и косинусами. Однако в отличие от тригонометрических и прочих функций экспонента обладает уникальным свойством: операции взятия производной и интеграла от неё опять дают эту же экспоненту. Такая удивительная простота экспоненты привела к огромным успехам в теории механических колебаний и волн, электромагнетизма, оптики (напомним, что свет — тоже электромагнитная волна), квантовой механики. Кстати, знаменитая формула Планка для спектра теплового излучения, породившая квантовую физику, тоже содержит экспоненту.

Могу поделиться собственным опытом. Я занимался так называемыми неустойчивостями ионосферной плазмы. По сути, они представляют собой колебания плазмы, приводящие к образованию в ней областей с повышенным или пониженным содержанием электронов (неоднородностей). Это сказывается на распространении в ионосфере радиоволн. Кроме того, изучая естественные и вызванные искусственно неоднородности, можно исследовать свойства ионосферы (см. статью: «Зачем греют небо. Мифы и правда», «Наука и жизнь» № 8, 2013 г.). Плазма описывается сложными уравнениями, которые решить в общем виде невозможно. Однако поиск решений в виде комплексных экспонент позволяет получить ответы на вопросы о том, какого размера возникают неоднородности, определить их параметры и поведение со временем. Аналогичным методом исследуются и неустойчивости плазмы в различных установках, в частности, установках термоядерного синтеза, где неустойчивости плазмы — главная помеха на пути создания эффективно работающего реактора.

С экспонентой действительного и комплексного аргумента связан целый ряд важнейших математических преобразований (Фурье, Лапласа и др.), методов и специальных функций, позволяющих ре-

В математике известны так называемые проблемы Гильберта — список из 23 важнейших задач, представленных Давидом Гильбертом на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году. В седьмой проблеме, в частности, идёт речь о доказательстве трансцендентности числа $e^{\pi} = i^{-2i}$. Сам Гильберт эту задачу считал очень трудной, даже труднее доказательства теоремы Ферма. Однако уже в 1934 году её решил советский математик, член-корреспондент АН СССР Александр Осипович Гельфонд. В его честь e^{π} получило название постоянной Гельфонда. Другие комбинации π и e (π ± e, π · e, π/e, π^e и т. д.) ещё ждут своих исследователей.

Запомнить e с большим числом цифр просто, если вам известен год, когда родился писатель Лев Толстой, — 1828. Дело в том, что он повторяется дважды после 2,7. Существует даже стихотворное мнемоническое правило: «*Экспоненту помнить способ есть простой: два и семь десятых, дважды Лев Толстой*». А дальше идут углы равнобедренного прямоугольного треугольника: 45, 90, 45. В результате получим: 2,7 1828 1828 45 90 45.



Мишень с отверстиями от пуль и соответствующий график нормального распределения (Гаусса) — функции $f(x)$, описывающей вероятность попадания в мишень на расстоянии x от центра. Величина σ характеризует среднее отклонение от центра.

шать множество различных практических и теоретических задач. К сожалению, этот вопрос связан со сложной математикой, а потому выходит за рамки данной статьи.

Часто встречается экспонента в теории вероятностей, тесно связанной с математической статистикой и статистической физикой. Например, лежащее в основе кинетической теории газов знаменитое распределение Максвелла, описывающее, какие скорости имеют молекулы газа в зависимости от температуры, представляет собой экспоненту. Экспоненту содержит и распределение Бозе — Эйнштейна, описывающее распределение по уровням энергии бозонов — идеального квантового газа.

Центральное место в теории вероятности занимает нормальное распределение (распределение Гаусса), имеющее вид экспоненты от квадрата отклонения от среднего значения (математического ожидания). Её график напоминает колокол. Сам Карл Гаусс получил эту функцию, исследуя попадания пуль в мишень. Большинство пуль оказываются близко к центру мишени. Чем дальше область мишени от её центра (больше отклонение), тем меньше пуль в неё в среднем попадает. Вот эту зависимость и показывает функция Гаусса. Её значение для практики связано с тем, что воздействие большого числа случайных факторов приводит к тому, что измеряемая величина начинает подчиняться закону Гаусса (это называется центральной предельной теоремой). А закон Гаусса, в свою очередь, позволяет определить параметры случайного процесса и возможные ошибки измерения.

Зависимость в виде гауссова колокола можно встретить в описании многих физических процессов. Такой может быть форма волновой функции в квантовой механике, форма солитона — уединённой волны (в частности цунами, нервного и лазерного импульсов), распределение электрического поля в пучке электромагнитного излучения, например, в лазерном луче, в поперечном направлении (такой пучок так и называют — гауссовым). Гауссовы функции используются в цифровой обработке сигналов, обработке изображений, синтезе звука и даже в искусственных нейронных сетях.

Экспоненциальное распределение вероятностей применяют в теории надёжности, изучающей закономерности отказов различных технических устройств, и теории

При размещении своих акций в 2004 году компания Google объявила о намерении привлечь необычную сумму средств: 2 718 281 828 долларов США, что составляет округлённые *e* миллиардов долларов. В этом же году она разместила объявление-загадку, которое должно было позволить отобрать наиболее умных кандидатов для работы в компании. На баннерах, появившихся в Кремниевой долине и некоторых университетских городах США, было написано «первое 10-значное простое число, состоящее из последовательных цифр *e*.com». Человек, нашедший такое число (это 7427466391, начинающееся с 99-й цифры *e*), тем самым получал адрес веб-сайта, на котором ему давали ещё более сложную задачу. Та, в свою очередь, приводила в Google, где посетителю предлагалось отправить резюме.

массового обслуживания, позволяющей выбрать и спроектировать оптимальные системы обслуживания клиентов. Причём в последнем случае речь может идти как об организации ремонтных мастерских, так и о работе железной дороги, «обслуживающей» поезда.

Ещё в 1795 году французский барон, математик и инженер Гаспар де Прони изобрёл способ представления зависимостей с помощью суммы экспонент — метод Прони. Он обрёл второе дыхание в наше время, когда его стали использовать в частности для разработки цифровых фильтров, улучшающих качество изображений, и обработки сигналов радаров и сонаров.

Любопытен эмпирический (то есть установленный опытным путём) психофизический закон Вебера—Фехнера, заключающийся в том, что сила ощущения человеком чего-либо прямо пропорциональна натуральному логарифму силы раздражителя. Начал опыты Эрнст Вебер: он заставлял человека с завязанными глазами держать гирю, к которой постепенно добавляли небольшие грузы. Испытуемый должен был сообщить, когда он почувствует увеличение веса. Вебер обнаружил, что реакция подопытного пропорциональна не абсолютному увеличению веса, а относительному. Он ощущал прибавку, когда она достигала примерно 10%. Ученик Вебера Густав Фехнер позднее придал этому математическую форму $dS = k\,dW/W$, где dS — повышение порога реакции, W — вес, а dW — его увеличение, k — константа, зависящая от индивидуальных свойств подопытного. Интегрирование приводит к натуральному логарифму (вспомните площадь под гиперболой).

Закон с определёнными ограничениями распространяется на восприятие яркости, громкости, боли в ответ на физическое давление и другие физиологические реакции. Это проявилось, в частности, в том, что изобретённая древнегреческим астрономом Гиппархом шкала звёздных величин — логарифмическая. Ведь он оценивал блеск звёзд «на глаз». Громкость звука так же оценивается по логарифмической шкале в децибелах.

Появившись в вычислительных логарифмических схемах, константа *e* постепенно захватила весь мир. Современную науку и технику от классической механики до квантовой физики уже невозможно представить без экспоненты. В этой статье приведена лишь малая доля примеров её использования. Так что мы без всякого преувеличения можем сказать, что она сыграла и продолжает играть большую роль в развитии нашей цивилизации.

Фото: Wladyslaw Sojka/Wikimedia Commons/FAL

Эпитафия на могиле Якоба Бернулли. Внизу — ошибочное изображение спирали Архимеда вместо завещанной логарифмической спирали с девизом: «EADEM MUTATA RESURGO».