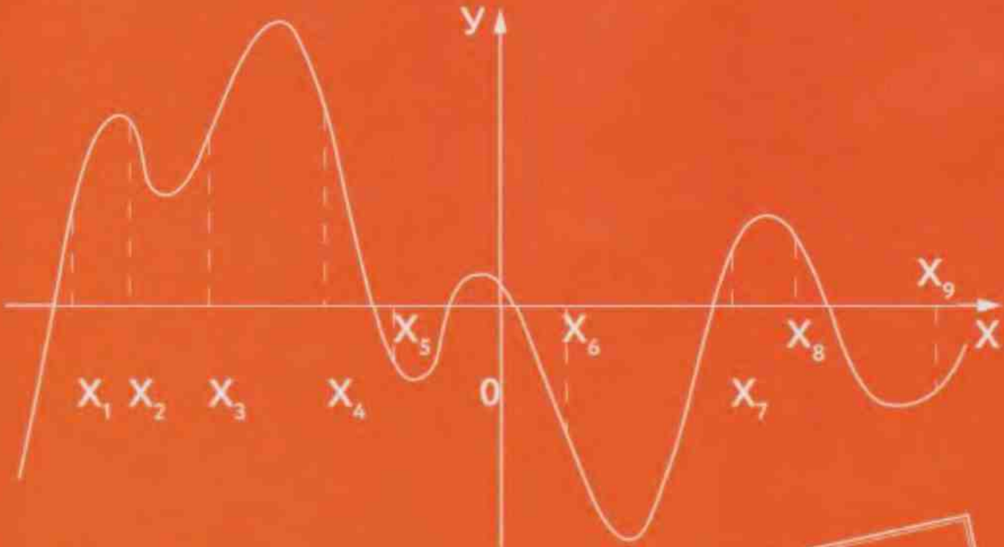
ЕГЭ. Высший балл

Математика

Задания высокой и повышенной сложности

Анна Малкова



ЕГЭ-Студия
Готовьтесь с профессионалами

Серия «ЕГЭ. Высший балл»

А. Г. Малкова

МАТЕМАТИКА

ЗАДАНИЯ ВЫСОКОЙ И ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Издание второе

Ростов-на-Дону
ФЕНИКС
2019

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
М19

Малкова А. Г.

М19 Математика : задания высокой и повышенной сложности / А. Г. Малкова. — Изд. 2-е. — Ростов н/Д : Феникс, 2019. — 221, [3] с.: ил. — (ЕГЭ. Высший балл). — ISBN 978-5-222-32502-5

Перед вами пособие по решению задач высокой и повышенной сложности в формате ЕГЭ по математике. Это не просто сборник интересных задач. Книга-репетитор, книга-путеводитель от школьной «четверки» до 100 баллов — вот что это такое. Здесь есть все: необходимая и достаточная теория, справочные материалы, тесты, репетиторские хитрости, секреты и рекомендации. И конечно, сами задачи — с решениями и образцовым оформлением.

Для абитуриентов, учителей и репетиторов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

0+

Учебное издание

Анна Георгиевна Малкова

МАТЕМАТИКА
ЗАДАНИЯ ВЫСОКОЙ И ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Ответственный редактор *А. Васько*
Выпускающий редактор *Г. Логвинова*

ЕАС

Формат 70x100 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 3000 экз. Заказ № 2261.

ООО «Феникс»
344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.
Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Изготовлено в России
Дата изготовления: 03.2019.

Изготовитель: АО «Первая Образцовая типография»
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, Россия, Ульяновская обл.,
г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ISBN 978-5-222-32502-5

ОТ АВТОРА

Дорогие абитуриенты, учителя и репетиторы!

Это моя вторая большая книга по математике. Первая — для тех, кто готовится к ЕГЭ по математике с нуля. Она называется «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ».

Книга, которая у вас в руках, — для тех, кто уже пишет пробные ЕГЭ на 50–70 баллов. И все как будто понятно. Но почему-то задачи каждый раз попадаются сложные… А так хочется с 50–70 дойти до 100 баллов!

Открою секрет: на каждую сложную задачу найдется хитрый инструмент. И сдают ЕГЭ на 100 баллов именно те, кто знает все эти «ключи». Их не нужно изобретать на экзамене. О них рассказывают только очень опытные репетиторы.

И теперь вы тоже их узнаете. Я покажу множество приемов, помогающих решать задачи не за 40, а за 5–10 минут. Вы получите все хитрые инструменты и ключи к каждой теме.

Задачи в пособии специально подобраны так, чтобы вы увидели все эти приемы и освоили их. Среди задач много моих авторских, составленных в полном соответствии с требованиями ФИПИ. Каждую тему я начинаю с краткого повторения теории.

В этой книге:

- подготовительные тесты: три варианта с решениями и ответами в формате ЕГЭ, включающие первые 12 задач;
- 7 глав по всем задачам повышенной сложности из второй части ЕГЭ по математике;
- заключительные тесты: еще 4 полных варианта ЕГЭ по математике с ответами и комментариями.

Что нужно, чтобы сдать ЕГЭ по математике на 100 баллов, как сдают мои ученики?

Нужна цель. Спросите себя: «Для чего мне 100 баллов? Куда я поступаю, как поступление в вуз связано с моими целями, с моим представлением о будущем?» Те, кто четко знает, куда и зачем поступать, получают высокие результаты.

Нужна постоянная тренировка. Если вы решили 50 задач по теме «Параметры» или по теме «Стереометрия» — задача на экзамене будет для вас не «сложной», а всего лишь «пятьдесят первой».

И еще нужен наставник. Тот, кто знает дорогу и готов привести вас к цели.

Пусть моя книга станет для вас таким наставником.

Анна Малкова

Глава 1
ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ТЕСТЫ В ФОРМАТЕ ЕГЭ

Хороший репетитор всегда начинает с тестирования. В этой главе — три варианта в формате первой части ЕГЭ (задачи с кратким ответом).

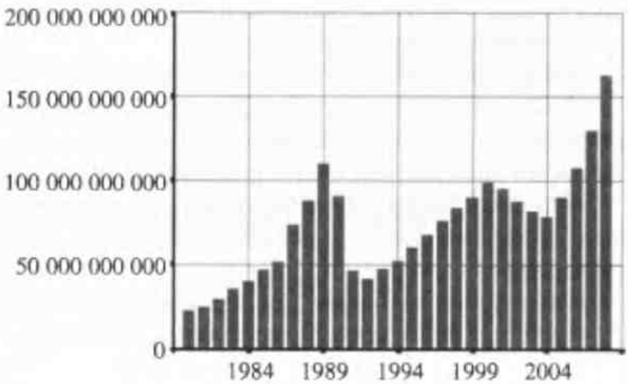
Такие тесты я составляю для своих пробных ЕГЭ, которые провожу и очно, и онлайн. Новички, приходя ко мне заниматься, говорят: «Ой, что это? Мы такого никогда не решали!» Однако все задачи первой части я беру из официального Банка заданий ФИПИ или мы с коллегами придумываем аналогичные. Мы подбираем задачи так, чтобы каждая была ключом к определенной теме ЕГЭ. Предупреждаю: в самых неожиданных местах расставлены ловушки.

Хотите попробовать свои силы? Насколько вы внимательны? Насколько глубоко знаете школьную программу? Вперед!

Вариант 1

1. Цена билета на одну поездку в московском метро на 15 мая 1998 года составляла 2 рубля, а на 15 мая 2008 года — 19 рублей. На сколько процентов поднялась за эти десять лет цена билета на одну поездку?

2. На графике показан ВВП Египта в долларах США по годам. Сколько лет за период с 1991 по 2001 годы включительно наблюдался спад ВВП Египта по отношению к предыдущему году?



3. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если его вершины имеют координаты $A(1;\,1)$, $B(-3;\,2)$, $C(3;\,1)$ и $D(2;\,-2)$.

4. Каждый вечер Хуан Гарсия играет на гитаре под окном неприступной красавицы Сесилии Кончиты. Вероятность того, что она в знак любви бросит ему красную розу, равна 0,1 в отдельно взятый вечер. Какова вероятность, что Хуан Гарсия завоюет сердце Сесилии Кончиты, если ее соседи согласны терпеть его бренчание только четыре вечера?

5. Решите уравнение $9^{3-x} = 27^{x+1}$.

6. В треугольнике ABC угол $C = 90°$, $AC = 14$, $AB = 50$. Найдите расстояние между точкой C и прямой AB.

7. Прямая $y = ax$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 1$, причем абсцисса точки касания меньше нуля. Найдите значение a.

8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка E — середина ребра AB, боковое ребро SA равно 4, длина отрезка SE равна $\sqrt{10}$. Найдите объем пирамиды $SABCD$.

9. Найдите $\sin\alpha$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}75$ и $2\pi < \alpha < 3\pi$.

10. Дальность полета L мяча, брошенного под углом $\alpha\,(0° < \alpha < 90°)$ к горизонту, зависит от начальной скорости v_0 и угла α по закону $L = 0{,}1v_0^2\sin 2\alpha$, где L измеряется в метрах, а v_0 — в метрах в секунду. Определите, при каком максимальном значении α дальность полета будет не меньше 5 метров, если начальная скорость мяча составляет 10 метров в секунду. Ответ дайте в градусах.

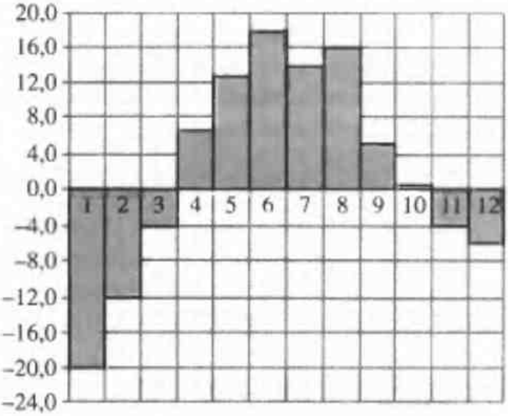
11. Иванов, Петров и Кошкин работают малярами. Иванов и Петров вдвоем покрасят один забор за 40 минут, Иванов и Кошкин вдвоем покрасят один забор за 50 минут, все три маляра вместе покрасят 17 заборов за 10 часов. Сколько заборов покрасят за 10 часов рабочего времени вдвоем Петров и Кошкин?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + \dfrac{243}{x}$ на отрезке [2; 4].

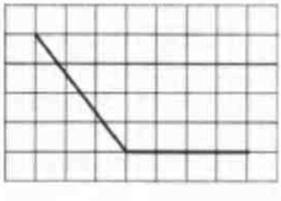
Вариант 2

1. Магазин закупает тетради у производителя оптом по 16 рублей за штуку и продает их по розничной цене на 50% выше оптовой. Какое наибольшее число таких тетрадей можно купить по розничной цене на 1150 рублей?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Перми за каждый месяц 2017 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, на сколько градусов Цельсия март был в среднем холоднее августа.



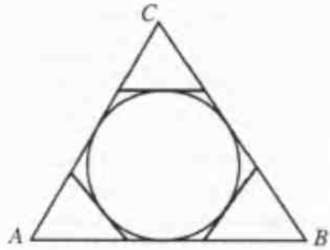
3. На бумаге с размером клетки 1 × 1 изображен угол. Найдите синус этого угла.



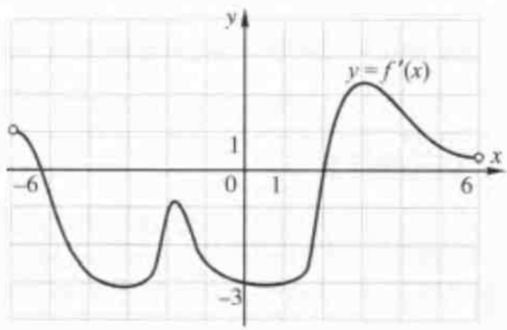
4. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

5. Решите уравнение: $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 8, 12, 18. Найдите периметр данного треугольника.



7. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. В какой точке отрезка $[1; 3]$ функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение?



8. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем оставшейся части.

9. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

11. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

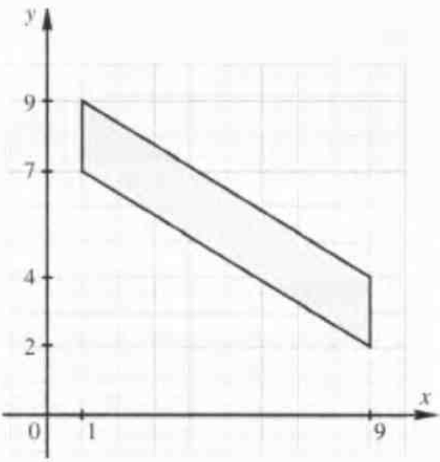
12. Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}\cdot x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 3

1. Бегун пробежал 450 метров за 50 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна. Ответ дайте в километрах в час.

2. На графике показано изменение напряжения на батарейке (в вольтах) в зависимости от времени ее использования в фонарике. На оси абсцисс откладываются часы и минуты, на оси ординат — напряжение в вольтах. Известно, что фонарик работает только при напряжении, большем 0,9 В. Сколько минут проработает фонарик на этой батарейке?

3. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (1; 7), (9; 2), (9; 4), (1; 9).

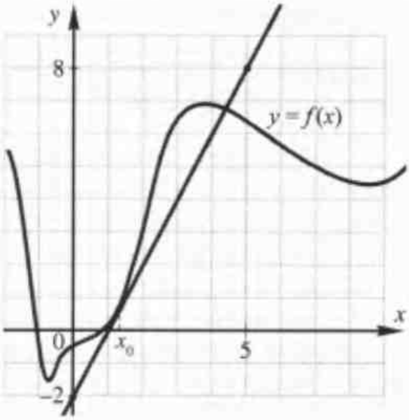


4. Игральный кубик бросают 2 раза. С какой вероятностью выпавшие числа будут отличаться на 3? Ответ округлите до сотых.

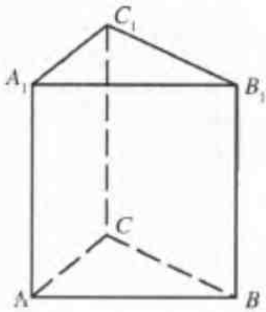
5. Найдите корень уравнения $\sqrt{6+5x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6. Высота, опущенная из прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 1 и 4. Найдите эту высоту.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.



9. Найдите значение выражения $x+\sqrt{x^2-4x+4}$ при $x \le 2$.

10. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Коля бросает небольшие камешки в колодец, измеряя время их падения, и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,6 с. На сколько поднялся уровень воды после дождя, если измеряемое время уменьшилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

11. Катер проходит 70 километров вниз по течению реки на 4 часа быстрее, чем против течения. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3x^5 - 20x^3 - 54$ на отрезке $[-4; -1]$.

Ответы и решения

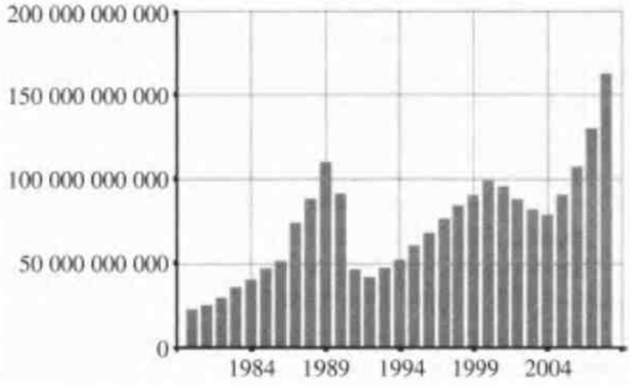
Вариант 1*

1. *Ответ*: 850.

Прибавка составила 17 рублей, то есть сумму, в 8,5 раз большую, чем 2 рубля. Значит, в процентах прибавка составила 850%. Напомним, что за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

2. *Ответ* 3.

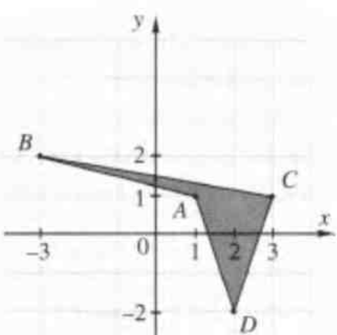
Можно сказать, что это задача на внимательность. ВВП (валовой внутренний продукт) в каждом конкретном году обозначен на диаграмме прямоугольником. Что же значит «спад по отношению к предыдущему году»? Это значит, что соответствующий данному году прямоугольник ниже, чем предыдущий. В период с 1991 по 2001 год таких было три, и они соответствуют 1991, 1992 и 2001 годам.



3. *Ответ*: 4.

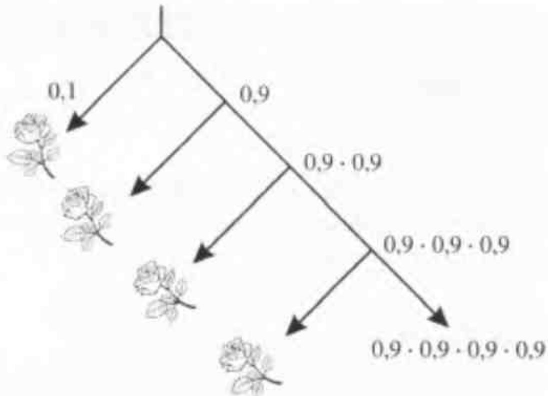
Проще всего найти площадь $ABCD$ как сумму площадей треугольников ABC и ACD. Основание этих треугольников $AC = 2$, а высоты соответственно 1 и 3. Итак, площадь $ABCD$ есть $1 + 3 = 4$.

Проверьте, как вы соединили вершины четырехугольника. Они должны быть соединены по порядку: $ABCD$.



* При составлении варианта использованы авторские задачи А. Акимова и А. Близарова.

4. *Ответ*: 0,3439.



Вероятность получить красную розу в отдельно взятый вечер равна 0,1. Хуан Гарсия, если ему повезет, получит ее сразу в первый вечер. Тогда он приглашает Кончиту на свидание и больше под окном не бренчит. Хуан Гарсия может получить красную розу во второй, в третий или в четвертый вечер, причем вероятности каждого из этих событий разные.

В первый вечер: вероятность получить красную розу равна 0,1.

Во второй вечер: $0{,}9 \cdot 0{,}1$ — поскольку с вероятностью 0,9 Хуан Гарсия во второй вечер вообще оказался под окном Сесилии Кончиты, а не на свидании с ней.

В третий вечер: $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1$.

В четвертый вечер: $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1$.

Получаем, что вероятность для Хуана Гарсии завоевать сердце Сесилии Кончиты равна $0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}3439$.

Можно решить проще!

Вероятность того, что Хуан Гарсия так и не добился взаимности Сесилии Кончиты, равна $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}6561$.

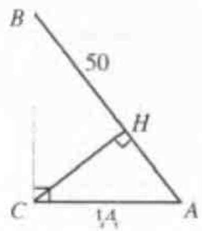
Вычитая из единицы это число, получим вероятность благоприятного исхода для Хуана Гарсии: $1 - 0{,}6561 = 0{,}3439$.

5. *Ответ*: 0,6.

Пользуясь тем, что $9 = 3^2$, а $27 = 3^3$, приводим уравнение к виду $3^{6-2x} = 3^{3x+3}$, откуда следует, что $6 - 2x = 3x + 3$ и $x = 0{,}6$.

6. *Ответ*: 13,44.

Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. По теореме Пифагора находим $BC = 48$. Выразим площадь треугольника ABC двумя способами:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CH,$$

где — CH искомый отрезок, т. е. высота, проведенная к гипотенузе.

$$CH = 14 \cdot \frac{48}{50} = 13{,}44.$$

7. *Ответ*: –2.

Запишем, при каких условиях прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$$

Условия касания прямой и параболы в точке с абсциссой x_0 выглядят так:

$$\begin{cases} x_0^2+1=ax_0 \\ 2x_0=a \end{cases}.$$

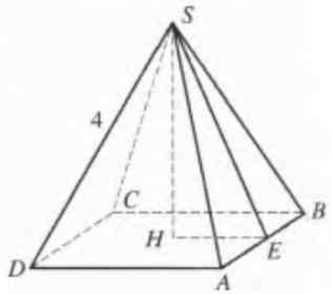
Решая эту систему и принимая во внимание, что $x_0<0$, имеем $a=-2$.

Запомните, как записываются условия касания! Пригодятся и в задачах части 1, и в задачах с параметрами.

8. *Ответ*: 16.

Найдем сначала сторону основания пирамиды. По теореме Пифагора для треугольника SAE получаем, что $AE=\sqrt{6}$, соответственно, сторона основания пирамиды есть $2\sqrt{6}$. Если обозначить центр основания за H, то высоту пирамиды SH найдем по теореме Пифагора. Для треугольника SHE она равна 2.

Применяя формулу для объема пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h$, получаем ответ: 16.



9. *Ответ*: 0,8.

Наш угол α лежит во второй четверти, поскольку $2\pi<\alpha<3\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha<0$, значит, его синус положителен. Пользуясь формулой $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, находим ответ: 0,8.

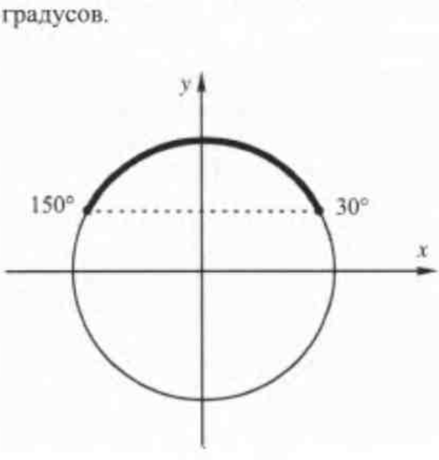
10. *Ответ*: 75.

Подставив значения величин в формулу для дальности полета, получим неравенство $\sin 2\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Как решить такое неравенство? Ошибка, которую многие допускают, — «превращают» его в уравнение и получают неверный ответ $\alpha=15$ градусов.

Правильно будет воспользоваться тригонометрическим кругом (или же графиком функции $y=\sin 2\alpha$). Давайте нарисуем тригонометрический круг, обозначив $2\alpha=t$, и решим неравенство $\sin t\geq\frac{1}{2}$.

Отсюда, с учетом возможного диапазона угла α, получаем $30°\leq 2\alpha\leq 150°$. Значит, максимальное значение α равно 75 градусов.



11. *Ответ*: 7

Напомним, что в задачах на работу в качестве переменных лучше всего выбирать производительности.

Как известно, $A = p \cdot t$, где A — работа, p — производительность, t — время.

При совместной работе производительности складываются.

Поскольку работа не дана и найти ее по условиям задачи невозможно, примем ее равной единице.

Обозначим производительности Иванова, Петрова и Кошкина за x, y и z и составим систему уравнений. Время удобнее выразить в часах.

$$\begin{cases}(x+y)\cdot\dfrac{2}{3}=1,\\(x+z)\cdot\dfrac{5}{6}=1,\\(x+y+z)\cdot 10=17;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=1{,}5,\\x+z=1{,}2,\\x+y+z=1{,}7.\end{cases}$$

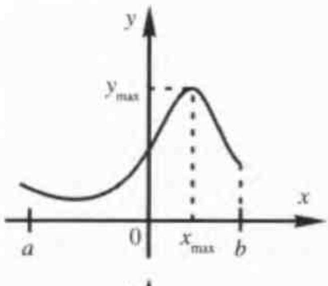
Иванов и Петров за час покрасят полтора забора, а все три маляра вместе 1,7 забора. Значит, один Кошкин за час покрасит 0,2 забора. Поскольку вместе с Ивановым Кошкин за час покрасит 1,2 забора, в одиночку Иванов справится за час ровно с одним забором. Значит, Петров за час красит 0,5 забора. Итак, Петров и Кошкин за час красят 0,7 забора, то есть 7 заборов за 10 часов.

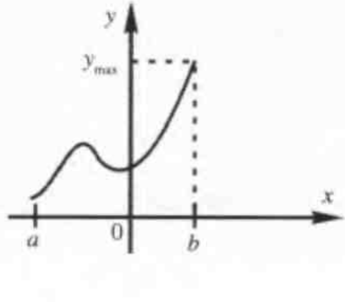
12. *Ответ*: 129,5.

Наибольшее значение функции на отрезке достигается либо в точке максимума, либо на конце отрезка.

Производная нашей функции $y'(x) = 3x^2 - \dfrac{243}{x^2}$. Анализируя знак производной на каждом интервале, приходим к выводу, что $y(x)$ убывает на отрезке [2; 3] и возрастает на отрезке [3; 4], и это значит, что точек максимума на данном отрезке нет.

Значит, наибольшее значение y на [2; 4] достигается либо при $x = 2$, либо при $x = 4$. Расчет показывает, что $y(2) > y(4)$ и $y(2) = 129{,}5$.





Вариант 2

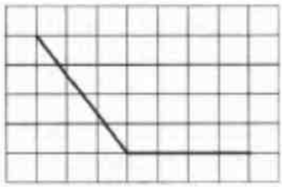
1. *Ответ*: 47.

Напомним, что за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем. Розничная цена на 50% выше оптовой. Значит, она равна $16 \cdot 1{,}5 = 24$ рубля за тетрадь. На 1150 рублей можно купить 47 тетрадей.

2. *Ответ*: 20.

Находим разницу между температурой в августе и в марте.

3. *Ответ*: 0,8.



Синус угла на рисунке равен синусу смежного с ним угла, который легко найти, достроив на чертеже прямоугольный треугольник с катетами 4 и 3 и гипотенузой 5.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.

4. *Ответ*: 0,25.

Решим эту задачу простым способом — без применения формул комбинаторики.

Пусть одна из девочек заняла место за круглым столом. Тогда за столом остается 8 свободных мест. Вторая девочка может занять место слева или справа от первой, то есть благоприятных исходов два. Значит, вероятность того, что обе девочки сидят рядом, равна $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

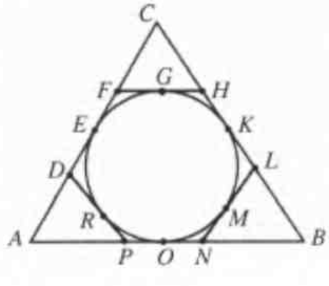
5. *Ответ*: 12.

Пользуясь определением логарифма, получим: $(x-5)^2 = 49$; $x = 12$ или $x = -2$.

Второй корень является посторонним, поскольку основание логарифма должно быть положительным. Данное уравнение имеет один корень, равный 12.

Это задача-ловушка. Многие абитуриенты забывают про область определения логарифма и пишут в ответ посторонний корень.

6. *Ответ*: 38.



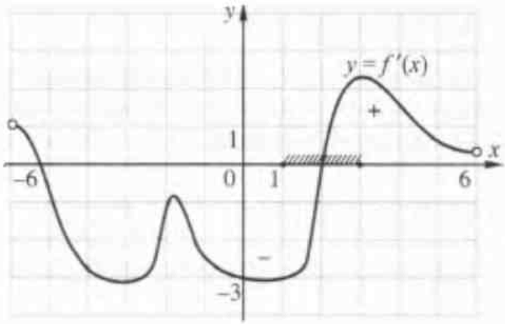
Периметр треугольника ABC равен $AD + DE + EF + FC + CH + HK + KL + LB + BN + NO + OP + PA$.

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.

$DE = DR$, $EF = FG$, $HK = HG$, $KL = LM$…

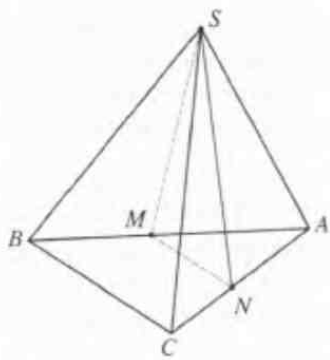
Мы получили, что периметр треугольника ABC равен сумме периметров отсеченных от окружности треугольников, то есть $8 + 12 + 18 = 38$.

7. *Ответ*: 2.



Еще одна типичная ловушка для невнимательных абитуриентов. На рисунке изображен график производной, а вопрос задан о наименьшем значении функции. В концах интервала функция не определена. Значит, наименьшее значение она может принимать только в точке минимума. Мы знаем, что в точке минимума производная равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс». С помощью рисунка находим эту точку: $x = 2$.

8. *Ответ*: 9.



Пусть MN — средняя линия основания исходной пирамиды. Исходная пирамида $SABC$ и пирамида $SAMN$ имеют равные высоты. Площадь основания пирамиды $SAMN$ в 4 раза меньше площади основания исходной пирамиды, поскольку отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Тогда $V_{SAMN} = 3$. Объем оставшейся части $12 - 3 = 9$.

9. *Ответ*: –1,5.

Вынесем за скобки $\sqrt{3}$ и применим формулу косинуса двойного угла: $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.

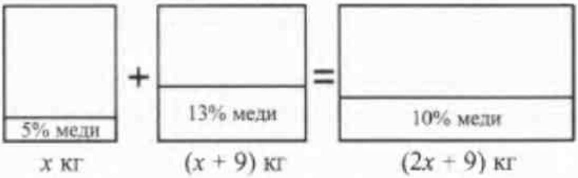
$$\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sin^2\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1,5.$$

10. *Ответ*: 36.

Фокусное расстояние линзы известно. Но какое же значение d_2 (расстояние от линзы до экрана) надо подставлять в формулу? Нам надо найти наименьшее расстояние от лампочки до линзы d_1. Если d_1 — наименьшее, то обратная величина $\frac{1}{d_1}$ будет наибольшей. Поскольку $\frac{1}{f}$ — константа, второе слагаемое $\frac{1}{d_2}$ в формуле линзы должно быть наименьшим, а обратная ему величина d_2 — наибольшей, то есть равной 180. Подставим данные в формулу: $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{180} = \frac{1}{30}$; $d_1 = 36$.

11. *Ответ*: 36.

Обозначим массу первого сплава x. Тогда масса второго сплава $x + 9$, а масса третьего $2x + 9$.

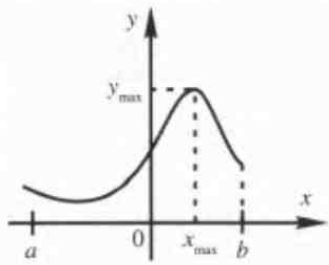


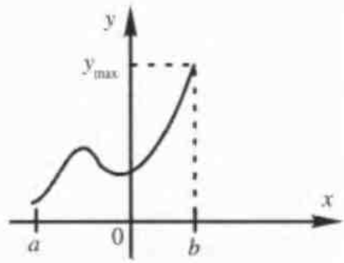
Масса меди в первом сплаве $0{,}05x$. Во втором сплаве масса меди равна $0{,}13(x + 9)$, а в третьем $0{,}1(2x + 9)$.

Составим уравнение для массы меди: $0{,}05x + 0{,}13(x + 9) = 0{,}1(2x + 9)$.

Заметим, что с целыми коэффициентами в уравнениях удобнее работать, чем с дробными. Умножим обе части уравнения на 100. Получим: $5x + 13(x + 9) = 10(2x + 9)$. Решая его, получим, что $2x = 27$ и $2x + 9 = 36$. Это масса третьего сплава.

12. *Ответ*: 12.





Мы помним, что наибольшее значение функции на отрезке может достигаться либо в точке максимума, либо на конце отрезка.

Возьмем производную функции $y(x)$ и приравняем ее к нулю.

$$y'(x) = -12\sin x + 6\sqrt{3};\ y'(x) = 0;\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ решением этого уравнения является $x = \frac{\pi}{3}$. Других точек, где производная равна нулю, на данном отрезке нет. Посмотрим, как меняется знак производной при переходе через точку $\frac{\pi}{3}$.

Возьмем $x = 0$. Тогда $y'(0) = 6\sqrt{3} > 0$.

Возьмем $x = \frac{\pi}{2}$. Получим $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 + 6\sqrt{3} < 0$.

Значит, при переходе через точку $x = \frac{\pi}{3}$ производная функции меняет знак с «плюса» на «минус», и $x = \frac{\pi}{3}$ — точка максимума нашей функции. Значение функции в этой точке равно 12. Это и есть наибольшее значение функции $y(x)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 3

1. *Ответ*: 32,4.

За 50 секунд бегун пробегает 450 метров. Значит, за 10 секунд — 90 метров, за 60 секунд (минуту) — 540 метров. В часе 60 минут. $540 \cdot 60 = 32\,400$ м/ч = 32,4 км/ч.

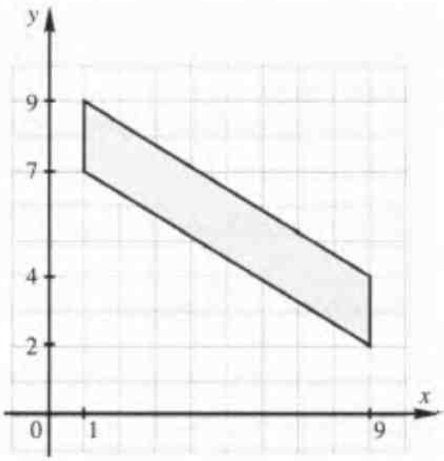
Решая эту задачу, помните о здравом смысле. Если скорость бегуна у вас получилась равной 2 км/час или 2000 км/ч — ошибка очевидна.

2. *Ответ*: 150.

2 часа 30 минут переводим в минуты, получаем 150 минут.

3. *Ответ*: 16.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту. Основание равно 2, высота 8, площадь равна 16.



4. *Ответ*: 0,17.

Представим, что два игральных кубика бросили одновременно. Условие задачи от этого не изменится. Всего 36 возможных исходов (каждому из 6 чисел, выпавших на первом кубике, соответствуют 6 возможных чисел на втором).

Благоприятные исходы:

1	4
2	5
3	6
6	3
5	2
4	1

По определению, вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов.

Получаем: $p = \dfrac{6}{36} \approx 0{,}17$.

5. *Ответ*: 6.

Возведем обе части уравнения в квадрат, помня, что правая часть должна быть неотрицательна.

$$\begin{cases} 6+5x=x^2 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$x^2-5x-6=0$

$x_1=-1;\ x_2=6.$

Нам подходит только неотрицательный корень: $x=6$.

Почему правая часть должна быть неотрицательна?

Вспомним определение и свойства арифметического квадратного корня.

Арифметический квадратный корень из числа a — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a;\ \sqrt{a}\geq 0;\ a\geq 0.$

Это означает, что выражение под корнем должно быть неотрицательно. Сам корень — тоже величина неотрицательная.

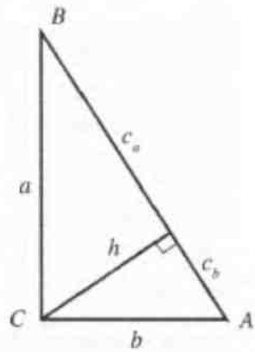
6. *Ответ*: 2.

Вспоминаем геометрию! Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

$h^2=c_a\cdot c_b$

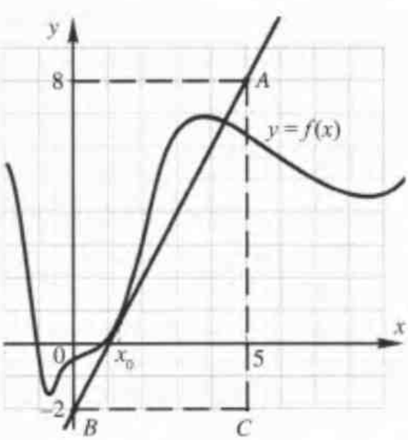
$h^2=1\cdot 4$

$h=2.$



7. *Ответ*: 2.

Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. Тангенс угла наклона касательной находим из прямоугольного треугольника ABC. Он равен $10:5=2$.

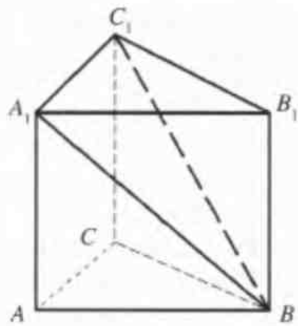


8. *Ответ*: 4.

Многогранник $ABCA_1C_1$ получается, если от исходной треугольной призмы отрезать треугольную пирамиду $A_1B_1C_1B$. Пирамида $A_1B_1C_1B$ имеет такие же основание и высоту, как исходная призма, значит, ее объем

$V_{A_1B_1C_1B} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3}V_{\text{призмы}} = 2.$

Тогда $V_{ABCA_1C_1} = 6 - 2 = 4.$



9. *Ответ*: 2.

Выражение под корнем представляет собой полный квадрат: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

Но чему же равен $\sqrt{a^2}$? На этот вопрос даже отличники редко отвечают правильно!

Запомним, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

В самом деле, по определению арифметического квадратного корня, $\sqrt{a^2}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a^2. Это число равно a при $a \geq 0$ и равно $-a$ при $a < 0$, т. е. как раз $|a|$.

Мы получим: $x + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + |x - 2|$, и у нас есть условие $x \leq 2$. Раскроем модуль.

По определению модуля: $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Если $x \leq 2$, то $x - 2 \leq 0$ и $|x - 2| = 2 - x$.
Получим: $x + 2 - x = 2$.

10. *Ответ*: 3.

После дождя уровень воды в колодце станет выше, а расстояние до воды уменьшится. Значит, и время падения камешка уменьшится, став равным 1,4 с.

Пусть $h_1 = 5 \cdot 1{,}6^2$ — расстояние до воды до дождя, $h_2 = 5 \cdot 1{,}4^2$ — расстояние до воды после дождя.

Уровень воды поднимется на 3 метра.

11. *Ответ*: 6.

Пусть x — собственная скорость катера. Составим уравнение:

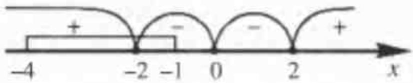
$\frac{70}{x-1} - \frac{70}{x+1} = 4; \ \frac{35}{x-1} - \frac{35}{x+1} = 2.$

Можно, как всегда, приводить уравнение к квадратному и решать его. А можно подобрать корень, предположив, что он целый. Тогда $x - 1$ и $x + 1$ — тоже целые. Поскольку $35 = 7 \cdot 5$, корень легко подбирается: $x = 6$.

12. *Ответ*: 10.

Найдем производную функции $f(x)$ и приравняем ее к нулю.

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 = 0$$
$$x^2\left(x^2 - 4\right) = 0$$



Производная равна нулю, если $x = 0$, $x = 2$ или $x = -2$. Отметим на рисунке знаки производной.

При $x = -2$ производная меняет знак с «плюса» на «минус». Эта точка является точкой максимума функции $y = f(x)$. Значение функции в этой точке $f(-2) = -3 \cdot 32 + 20 \cdot 8 - 54 = 10$. Это и есть наибольшее значение функции на данном отрезке.

Все ли задачи вам удалось решить правильно? Возможно, стоит повторить основы математики. Вам поможет в этом моя книга «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ».

Как распределить время при подготовке к ЕГЭ, а также на экзамене?

ЕГЭ по математике включает в себя 19 заданий. Иногда добавляют одну-две задачи, иногда немного меняют формулировки, но структура ЕГЭ уже несколько лет не меняется. Первая часть ЕГЭ — более простые задачи, и в них оценивается только ответ. В 2019 году таких задач двенадцать. А вот в задачах второй части оценивается не только ответ, но и грамотное, обоснованное решение. В 2019 году их в варианте семь. На решение варианта ЕГЭ дается всего 3 часа 55 минут.

Готовиться к ЕГЭ лучше всего в том порядке, в каком он дается в моей книге «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ». Это методика, по которой я успешно работаю с абитуриентами более 20 лет.

Если меня спрашивают, почему именно такой порядок, я отвечаю: «По-другому не складывается». Ведь школьная математика очень логична. Все темы взаимосвязаны. Сложное строится из простого, и не иначе.

Если вы нацелены сдать ЕГЭ на высокий балл — первые 12 задач вам надо решать за 30 минут и без ошибок. Одну за другой, ничего не пропуская, с упорством китайского землекопа.

Когда все 12 задач решены и ответы перенесены на чистовик, переходите к «необходимому минимуму» — заданиям второй части, которые гарантированно дадут вам 75–80 баллов и поступление на «бюджетное» отделение достойного вуза.

Какие это задачи? Это уравнение, неравенство и так называемая «экономическая» задача. Просто технология и ничего больше! Сразу пишите на чистовике, пользуясь черновиком только для вычислений. Рассчитывайте время так, чтобы на три эти задачи потратить еще час-полтора.

Решайте задачи по одной. Это правило, и нарушать его не стоит. Не хватайтесь за две и тем более за несколько задач сразу. Решили одну — проверьте решение, оформите все полностью и только после этого переходите к следующей.

Когда решены и задачи с кратким ответом, и «необходимый минимум», начинается творческая работа — борьба за 100 баллов. Настоящая математика! Четыре самые сложные задачи второй части ЕГЭ. Это стереометрия, планиметрия, параметры и нестандартная задача на числа и их свойства.

Стратегия здесь следующая. Прочитайте условия этих четырех задач. Наверняка среди них будет знакомая и понятная. Решите ее, сразу проверьте решение и оформите на чистовике, и так — одну за другой.

И пусть каждая решенная задача будет для вас маленькой, но важной победой.

Глава 2
УРАВНЕНИЯ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ — ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И КОМБИНИРОВАННЫЕ

Все абитуриенты думают, что умеют решать уравнения, а ошибки считают случайными. И при этом в вариантах ЕГЭ есть уравнения, которые сложны почти для всех старшеклассников. На первый взгляд — ничего особенного. Но чтобы их решить, нужно отличное знание теории.

Начнем с небольшого теста. Проверьте себя — все ли ответы на эти вопросы вы знаете?

Тригонометрия

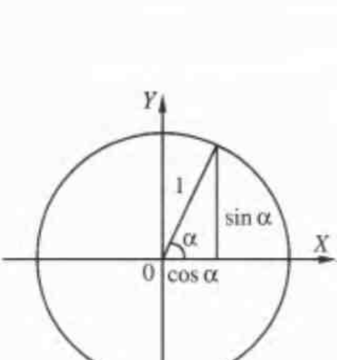
1. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для произвольного угла. Обратите внимание — речь идет о **произвольном** угле, который может быть равен и 320, и 750 градусам. Так что определение синуса как отношения противолежащего катета к гипотенузе точно не подходит.
2. Тригонометрический круг. Нарисуйте его по памяти.
3. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для основных табличных углов.
4. Знаки тригонометрических функций в четвертях тригонометрического круга.
5. Какие из тригонометрических функций являются четными? Какие — нечетными?
6. Периодичность тригонометрических функций.
7. Формулы приведения.
8. Основные формулы тригонометрии (надо выучить наизусть!)
9. Графики тригонометрических функций.
10. Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и их графики).
11. Формулы решения простейших тригонометрических уравнений. Общие и частные случаи.

Другие необходимые темы

12. Корни и степени. Определения, основные формулы.
13. Логарифмы. Определения, основные формулы.

А теперь ответы.

Косинусом угла α называется абсцисса (т. е. координата по оси OX) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.



Синусом угла α называется ордината (т. е. координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

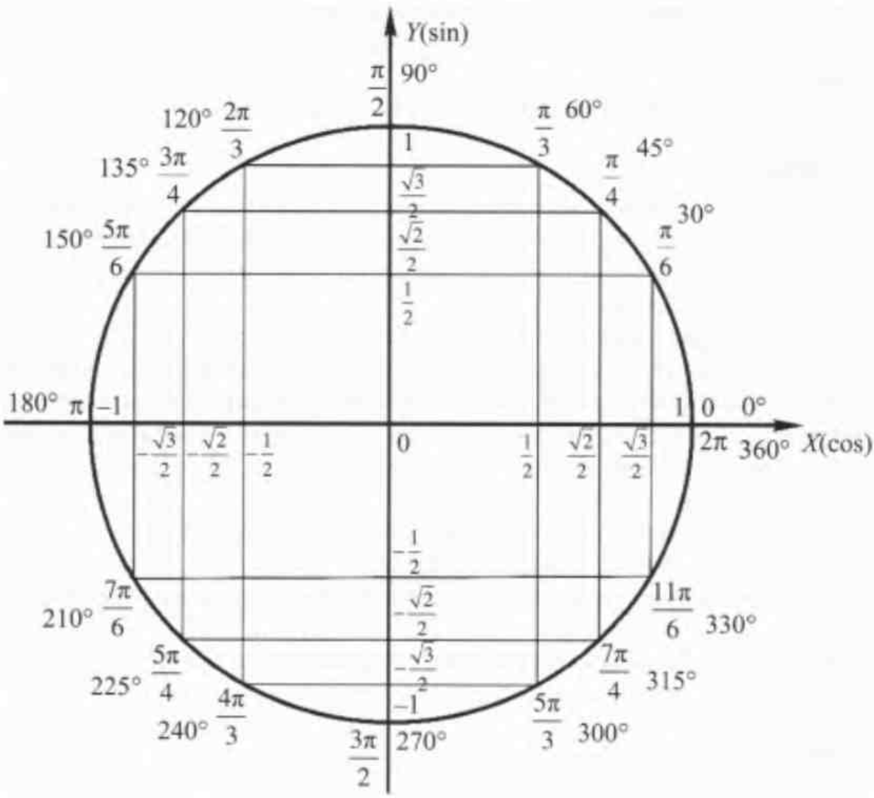
Обратим внимание — определение синуса и косинуса как отношений противолежащего (или прилежащего) катета к гипотенузе — это частные случаи для углов от нуля до 90 градусов.

И синус, и косинус принимают значения от –1 до 1.

Тангенс и котангенс определяются через синус и косинус:

$$\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Значения синуса и косинуса основных углов лучше всего находить на тригонометрическом круге. Вот он:



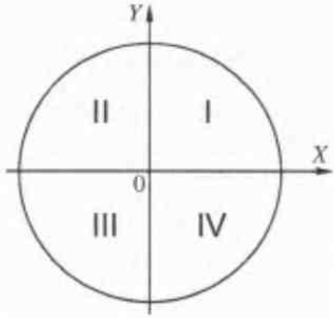
Нарисована единичная окружность — то есть окружность с радиусом, равным единице, и центром в начале системы координат. Той самой системы координат с осями OX и OY, в которой мы рисуем графики функций.

Мы отсчитываем углы от положительного направления оси OX против часовой стрелки. Точка с координатами (1; 0) соответствует углу в ноль градусов. Точка с координатами (–1; 0) отвечает углу в 180°, точка с координатами (0; 1) — углу в 90 градусов. Каждому углу от нуля до 360 градусов соответствует точка на единичной окружности.

Принято использовать две единицы измерения углов: градусы и радианы. Перевести градусы в радианы просто: 360 градусов, то есть полный круг, соответствуют 2π радианам. На нашем рисунке подписаны и градусы, и радианы.

Легко заметить, что

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$



Другими словами, косинус — четная функция, а синус — нечетная. Тангенс и котангенс — нечетные функции.

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Часто говорят о четвертях тригонометрического круга. Вот они, на рисунке.

Знаки тригонометрических функций также находим с помощью тригонометрического круга, помня, что косинус угла α — это абсцисса точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α. Там, где абсциссы точек положительны, косинус положителен. Это I и IV четверти.

Синус угла α — это ордината точки на единичной окружности, соответствующей углу α. Очевидно, он положителен в I и II четвертях — там, где ординаты точек положительны.

Все тригонометрические функции — периодические. Это значит, что все их значения повторяются через определенный постоянный промежуток. Период синуса и косинуса равен 2π. Период тангенса и котангенса равен π.

Таблица значений тангенса и котангенса для углов от нуля до π:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\varphi$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существует

Графики тригонометрических и обратных тригонометрических функций приведены в начале главы «Задачи с параметрами».

Формулы приведения

Часто в задачах встречаются выражения вида $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, а также $\sin(x+\pi)$ или $\cos(\pi-x)$ — то есть такие, где к аргументу прибавляется нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$, или целое число, умноженное на π. Они упрощаются с помощью формул приведения. Эти формулы называются так потому, что мы *приводим* выражения к более простым.

Например,

$$\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,$$

$$\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\text{ctg}\,x,$$

$$\sin(x+\pi)=-\sin x,$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos x.$$

Зубрить наизусть формулы приведения не нужно. Достаточно знать правило, состоящее из двух пунктов.

1. Если в тригонометрической формуле к аргументу прибавляется (или вычитается из него) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ — в общем, угол, лежащий на вертикальной оси, — функция меняется на **ко**функцию. Синус меняется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и наоборот.

Если же мы прибавляем или вычитаем π, 3π, 5π — в общем, то, что лежит на горизонтальной оси, — функция на **ко**функцию не меняется.

Это легко запомнить. Если прибавляемый угол лежит на вертикальной оси — вертикально киваем головой, говорим: «Да, да, меняется функция на кофункцию». Если прибавляемый угол лежит на горизонтальной оси — горизонтально мотаем головой, говорим: «Нет, нет, не меняется функция на кофункцию».

Это первая часть правила. Теперь вторая.

2. Знак получившегося выражения такой же, каким будет знак тригонометрической функции в левой его части, при условии, что аргумент мы берем из первой четверти.

Упростим, например, выражение $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Функция меняется на кофункцию — и в результате получится синус. Взяв x из первой четверти и прибавив к нему $\frac{\pi}{2}$, попадем во вторую четверть. Во второй четверти косинус отрицателен. Значит, получится $-\sin x$.

Формулы тригонометрии

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ **Основное тригонометрическое тождество**	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad$ $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$
Двойные углы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$	**Синус суммы, косинус разности…** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$
Сумма синусов, разность косинусов… $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	**Преобразование произведения в сумму** $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

Обратные тригонометрические функции — это арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Арксинусом числа *a* называется число $\varphi \in \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, такое, что $\sin\varphi = a$.

Арккосинусом числа *a* называется число $\varphi \in [0; \pi]$, такое, что $\cos\varphi = a$.

Арктангенсом числа *a* называется число $\varphi \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, такое, что $\mathrm{tg}\,\varphi = a$.

Арккотангенсом числа *a* называется число $\varphi \in (0; \pi)$, такое, что $\mathrm{ctg}\,\varphi = a$.

Формулы решения простейших тригонометрических уравнений (общий случай)

Уравнение	Решения
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Корни и степени

Степенью называется выражение вида a^c.

Здесь a — основание степени, c — показатель степени.

По определению, $a^1 = a$.

Возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя: $a^2 = a \cdot a$.

Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза: $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

Возвести число в натуральную степень n — значит умножить его само на себя n раз:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_{n}.$$

По определению, $a^0 = 1$.

Это верно для $a \ne 0$. Выражение 0^0 не определено.

Определим, что такое степень с целым отрицательным показателем.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Конечно, все это верно для $a \ne 0$, поскольку на ноль делить нельзя.

Заметим, что при возведении в минус первую степень дробь переворачивается.

Степени с дробным показателем по-другому записываются как корни n-ной степени.

Арифметический квадратный корень из числа a — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\sqrt{a} \ge 0$$

Обратим внимание:

1) квадратный корень можно извлекать только из неотрицательных чисел;

2) выражение $\sqrt{a}$ всегда неотрицательно. Например, $\sqrt{25} = 5$.

Свойства арифметического квадратного корня:

$\sqrt{a} \geq 0.$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$

Запомним, что выражение $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ **не равно** $\sqrt{a+b}$. Это легко проверить.

Аналогично, кубический корень из a — это такое число, которое при возведении в третью степень дает число a.

Обратим внимание, что корень третьей степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Корень n-ной степени из числа a — это такое число, при возведении которого в n-ную степень получается число a.

$\sqrt[n]{a}$ — такое число, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Корень нечетной степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел. Квадратный корень, а также корень четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел. Сам корень четной степени при этом также является неотрицательным числом.

Корни и степени — взаимосвязанные темы.

По определению,

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a};$

$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a};$

в общем случае $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$

При этом основание степени $a > 0$.

Выражение $a^{\frac{m}{n}}$ по определению равно $\sqrt[n]{a^m}$.

При этом также выполняется условие $a > 0$.

Правила действий со степенями:

$a^m a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{a^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Логарифм положительного числа b по основанию a — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

При этом $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b; \quad \log_a a^c = c.$$

Основные формулы для логарифмов:

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ (Логарифм произведения равен сумме логарифмов).

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Логарифм частного равен разности логарифмов).

$\log_a b^m = m\log_a b$ (Формула для логарифма степени).

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Сейчас задачи ЕГЭ на решение уравнений состоят из двух пунктов: собственно решения и отбора корней на определенном отрезке.

---

1. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

а) По формуле приведения: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = -\cos\frac{x}{2}$.

Вспомним формулу косинуса двойного угла: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Выразив по этой формуле $\cos x$, получим:

$$2\cos^2\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + 1 = 0,$$

$$2\cos^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Обратите внимание: мы не будем «сокращать» на $\cos\frac{x}{2}$, поскольку это выражение может обращаться в ноль. Сократив на него, мы потеряли бы серию решений.

Произведение двух (или нескольких) множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

Значит, $\cos\frac{x}{2} = 0$ или $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение первого уравнения: $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

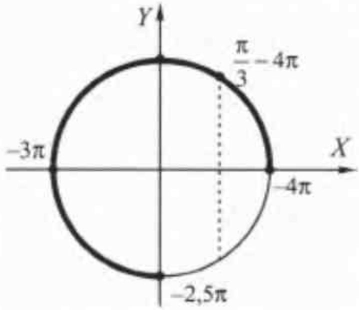
Решение второго уравнения: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi k. \end{array}\right.$

Объединим серии решений. Ответ в пункте (а): $\left[\begin{array}{l} x=\pi+2\pi k,\ k\in Z, \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi k. \end{array}\right.$

б) Как выбирать решения на отрезке?

Отметим на тригонометрическом круге сам отрезок $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

С серией $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$ все понятно: точка $x=-3\pi$ из этой серии как раз принадлежит нужному отрезку.



С серией $x=-\dfrac{\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$ тоже ясно — она не имеет отношения к указанному отрезку.

Осталась серия $x=\dfrac{\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$. Как отметить нужную точку?

Будем ориентироваться на начало круга — т. е. на крайнюю правую его точку. Наш отрезок соответствует кругу, который начинается с точки -4π. Значит, из серии $x=\dfrac{\pi}{3}+4\pi k$ нам подойдет точка $x=\dfrac{\pi}{3}-4\pi=-\dfrac{11\pi}{3}$.

Ответ в пункте (б): $x_1=-3\pi,\ x_2=-\dfrac{11\pi}{3}$.

---

2. а) Решите уравнение $\left(27^{\cos x}\right)^{\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Это уравнение — комбинированное. Кроме тригонометрии, применяем свойства степеней.

а) $3^{3\cos x\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

Степени равны, их основания равны. Значит, равны и показатели.

$3\cos x\sin x=\dfrac{3\cos x}{2}$;

$2\cos x\sin x-\cos x=0$;

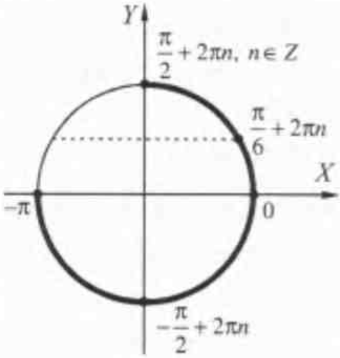
$$\cos x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n. \end{array}\right.$$

Это ответ в пункте (а).

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Отметим на тригонометрическом круге отрезок $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ и найденные серии решений.

Видим, что указанному отрезку принадлежат точки $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ из серии $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.



Точки серии $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ не входят в указанный отрезок.

А из серии $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ в указанный отрезок входит точка $x = \frac{\pi}{6}$.

Ответ в пункте (б): $-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$.

---

3. а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

а) Сделаем замену: $\cos^2 x = z,\ z \in [0; 1]$.

$16z^2 - 24z + 9 = 0$.

Левая часть уравнения — полный квадрат.

$(4z - 3)^2 = 0$

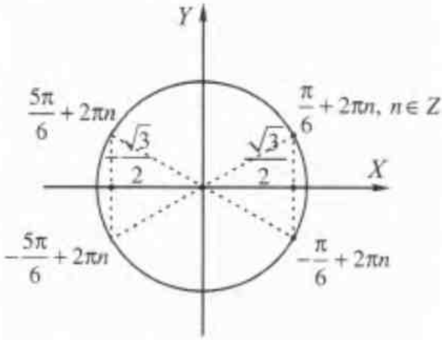
$z = \frac{3}{4}$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Чтобы записать серии решений, отметим на тригонометрическом круге точки, где $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Видим, что ответ в пункте (а) можно записать в виде двух диаметральных пар:

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n. \end{array}\right.$$



б) Найдем решения на отрезке $[2\pi; 3\pi]$.

Этот отрезок соответствует половине тригонометрического круга, которая начинается с точки 2π. Следовательно, на этом отрезке находятся точки $x=\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17\pi}{6}$, принадлежащие нашим сериям решений.

Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.

---

4. а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Снова комбинированное уравнение.

Сделаем замену $t=\log_3(2\cos x)$.

Получим квадратное уравнение $2t^2-5t+2=0$.

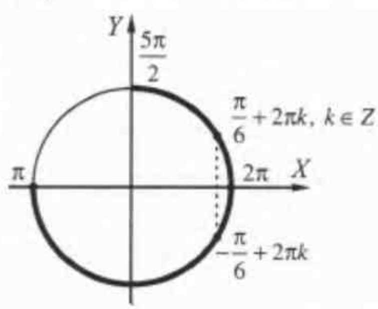
Корни уравнения: $\left[\begin{aligned}&t=2,\\&t=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$

Если $t=2$, то $\log_3(2\cos x)=2$; $2\cos x=9$; $\cos x=\frac{9}{2}$ — нет решений, так как $|\cos x|\le 1$.

Если $t=\frac{1}{2}$, то $\log_3(2\cos x)=\frac{1}{2}$; $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; тогда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

б) Отметим на тригонометрическом круге отрезок $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$ и найденные серии решений.

Как выбрать корни, принадлежащие заданному промежутку? Давайте используем их симметрию относительно точки 2π.



Получим: $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$; $x_2=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$;

б) $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$.

---

5. а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x-3)\sqrt{11\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

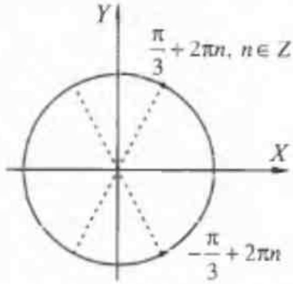
Самое сложное здесь — область допустимых значений (ОДЗ). Условие $11\cos x\ge 0$ заметно сразу. А условие $\cos x\ne 0$ появляется, поскольку в уравнении есть $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x \geq 0 \\ \cos x \neq 0\end{cases} \Rightarrow \cos x > 0.$

Уравнение равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0 \\ \cos x = 0\end{array}\right. \\ \cos x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0 \\ \cos x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \\ \cos x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n\end{array}\right. \\ \cos x > 0\end{array}\right.$$

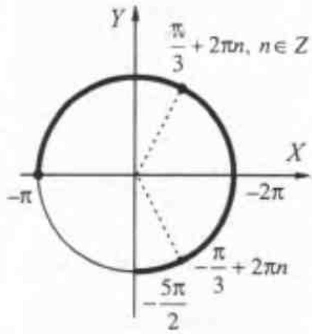
Отберем решения с помощью тригонометрического круга. Нам нужны те серии решений, для которых $\cos x > 0$, т. е. те, что соответствуют точкам справа от оси Y.



Ответ в пункте (а): $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

б) Отметим на тригонометрическом круге найденные серии решений и отрезок $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Как обычно, ориентируемся на начало круга. Видим, что указанному промежутку принадлежат точки $x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{3}$ и $x = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{3}$.



Ответ в пункте (б): $-\dfrac{7\pi}{3};\ -\dfrac{5\pi}{3}$.

---

6. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[3\pi; \dfrac{11\pi}{2}\right]$.

а) Сгруппируем слагаемые в левой части, чтобы разложить ее на множители.

$\sin 2x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$

$2\sin x\cos x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$

$2\sin x(\cos x - 2) - 2\sqrt{3}\cos x(\cos x - 2) = 0$

$2\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)(\cos x - 2) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0, \\ \cos x = 2.\end{array}\right.$

Второе уравнение не имеет решений, так как $|\cos x| \le 1$.

Первое уравнение — однородное первой степени.

$\sin x = \sqrt{3}\cos x$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

б) Отберем корни на отрезке $\left[3\pi;\ \frac{11\pi}{2}\right]$ с помощью двойного неравенства. Этот способ применяется наряду с тригонометрическим кругом. Он особенно удобен, если длина отрезка больше полного оборота на тригонометрическом круге.

$3\pi \le \frac{\pi}{3} + \pi n \le \frac{11\pi}{2}.$

Поделим все части неравенства на π.

$3 \le \frac{1}{3} + n \le \frac{11}{2};\ 2\frac{2}{3} \le n \le 5\frac{1}{6}$; поскольку n — целое, $n = 3$, 4 или 5.

Тогда $x_1 = \frac{\pi}{3} + 3\pi = \frac{10\pi}{3};\ x_2 = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3};\ x_3 = \frac{\pi}{3} + 5\pi = \frac{16\pi}{3}.$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; б) $\frac{10\pi}{3};\ \frac{13\pi}{3};\ \frac{16\pi}{3}.$

---

7. (Авторская задача)

а) Решите уравнение $5(1 - \operatorname{tg}^2 x) + (12\sin x - 7)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0$.

б) Найдите все его решения на отрезке $[-2\pi; 0]$.

ОДЗ уравнения: $\cos x \ne 0$.

Поделим обе части уравнения на $1 + \operatorname{tg}^2 x$. Это выражение положительно всегда, когда $\cos x \ne 0$, и на него можно делить.

$$5 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + (12\sin x - 7) = 0.$$

Вспомним полезные формулы, которые носят название «Универсальная тригонометрическая замена»:

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};\ \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Получим: $5\cos 2x + 12\sin x - 7 = 0$.

Используем формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

$5 - 10\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0$

$5\sin^2 x - 6\sin x + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

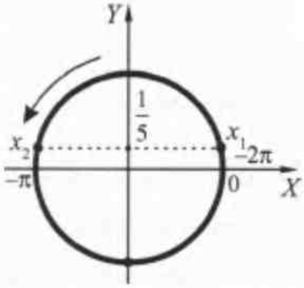
Серия решений, для которой $\sin x = 1$, не входит в ОДЗ. Ведь если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$.

Остается серия решений $\sin x = \frac{1}{5}$.

Ответ в пункте (а): $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{5} + \pi n,\ n \in Z$.

б) Отберем корни на отрезке $[-2\pi; 0]$.

Отметим на тригонометрическом круге точки, для которых $\sin x = \frac{1}{5}$. Это $x_1 = \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n$ и $x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in Z$.



Наш отрезок начинается с точки -2π. Значит, ему принадлежат точки $x_1 = \arcsin\frac{1}{5} - 2\pi$ и $x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{5} - 2\pi = -\pi - \arcsin\frac{1}{5}$.

---

8. а) Решите уравнение $\sin^2 2x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 4x = \frac{1}{2}$.

б) Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{3};\ \mathrm{arctg}\frac{4}{5}\right]$.

а) Используем формулу понижения степени: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Получим: $\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$.

$\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 4x = \frac{1}{2}$;

$\sin 4x = -\sqrt{3}\cos 4x$;

$\mathrm{tg}\ 4x = -\sqrt{3}$;

$4x = -\frac{\pi}{3} + \pi n;\ n \in Z$;

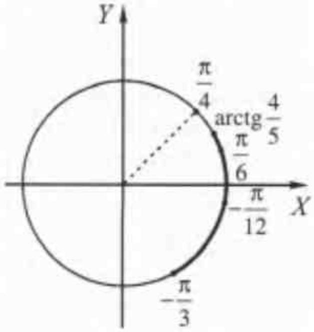
$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4};\ n \in Z$.

Это ответ в пункте (а).

б) Как найти корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\ \mathrm{arctg}\frac{4}{5}\right]$?

Вспомним, что $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{4}{5}$ — это угол φ, принадлежащий промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, такой, что $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{4}{5}$. Очевидно, $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

При этом $\varphi < \frac{\pi}{4}$, так как $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, а функция $y = \mathrm{tg}\,x$ монотонно возрастает при $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Значит, угол $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{4}{5}$ лежит в интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.



Корень $x_1 = -\frac{\pi}{12}$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{3};\ \operatorname{arctg}\frac{4}{5}\right]$.

Проверим, принадлежит ли ему корень $x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$. Сравним $\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{6}$.

Мы знаем, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку функция $y = \operatorname{tg}x$ монотонно возрастает при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, большее значение тангенса соответствует на этом интервале большему углу. Что же больше: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\frac{4}{5}$?

Сравним квадраты этих чисел, т. е. $\frac{1}{3}$ и $\frac{16}{25}$.

Поскольку $\frac{1}{3} < \frac{16}{25}$, имеем: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < \frac{4}{5}$.

Значит, точка $x = \frac{\pi}{6}$ также принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{3};\ \operatorname{arctg}\frac{4}{5}\right]$.

Точка $x = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3}$ также принадлежит данному отрезку.

Очевидно, другие точки из серии $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}$, где n — целое число, данному отрезку не принадлежат.

Ответ в пункте (б): $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{6}$.

---

9. Вот задача повышенной сложности с сайта Ларина. Список полезных сайтов для подготовки к ЕГЭ по математике дан в конце книги.

а) Решите уравнение $\sqrt{1 - \sin 3x} = \cos 3x$.

б) Найдите корни, принадлежащие промежутку $[-2; 3]$.

Область допустимых значений уравнения: $\begin{cases} 1 - \sin 3x \geq 0, \\ \cos 3x \geq 0. \end{cases}$

При выполнении этих условий обе части уравнения можно возвести в квадрат.

Значит, уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 1 - \sin 3x = \cos^2 3x, \\ \cos 3x \geq 0, \\ 1 - \sin 3x \geq 0. \end{cases}$

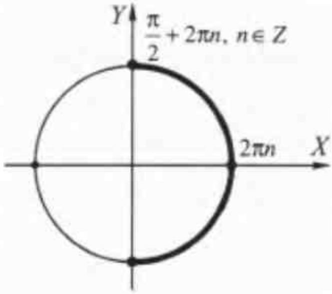
Заметим, что третье условие в этой системе избыточно — оно следует из первого. Применим основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\begin{cases}1-\sin 3x = 1-\sin^2 3x,\\ \cos 3x \geq 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2 3x - \sin 3x = 0,\\ \cos 3x \geq 0.\end{cases}$$

Пусть $3x = t$. Тогда:

$$\begin{cases}\sin t(\sin t - 1) = 0\\ \cos t \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin t = 1\\ \sin t = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow\\ \cos t \geq 0\end{array}\right. \begin{cases}t = \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ t = 2\pi n,\ n\in Z\end{cases}$$



Вернемся к переменной x: $\left[\begin{array}{l}x_1 = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3},\\ x_2 = \dfrac{2\pi n}{3}, n\in Z.\end{array}\right.$

Это ответ в пункте (а).

б) Как нам найти корни уравнения на отрезке $[-2; 3]$?

Отметим на тригонометрическом круге точки, принадлежащие сериям решений $x_1 = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$ и $x_2 = \dfrac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. Каждая из этих серий задает по три точки на каждом полном круге.

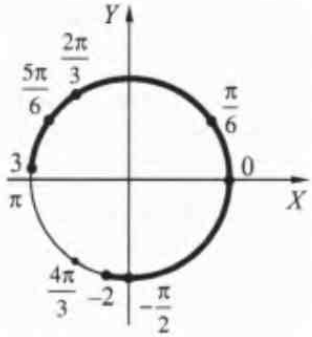
Что делать с отрезком $[-2; 3]$? Вспомним, что 1 радиан — это примерно 57 градусов, что полный круг составляет 2π радиан, а 3 радиана — это совсем немного меньше, чем π радиан.

Что же больше: -2 или $-\dfrac{2\pi}{3}$?

Очевидно, $-2 > -\dfrac{2\pi}{3}$, поскольку $-6 > -2\pi$.

Сравним также 3 и $\dfrac{5\pi}{6}$.

Оценить число $\dfrac{5\pi}{6}$ непросто. Намного проще увеличить оба этих числа в 6 раз и сравнить числа 18 и 5π. Поскольку $\pi = 3{,}14$, $5\pi \approx 15{,}7 < 18$, тогда $\dfrac{5\pi}{6} < 3$.



Мы получили, что указанному отрезку принадлежат решения: $-\dfrac{\pi}{2}$; 0; $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{6}$. Это ответ в пункте (б).

10. (Авторская задача)

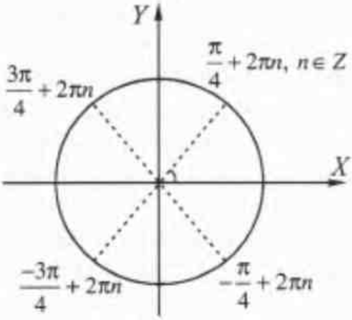
а) Решите уравнение $\sqrt{\cos x+\sin x}\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)=0.$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 4\pi]$.

Выражение под корнем должно быть неотрицательно, а произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

Это значит, что уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0,\\ \cos^2 x-\frac{1}{2}=0,\end{array}\right.\\ \cos x+\sin x\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \operatorname{tg} x=-1;\end{array}\right.\\ \cos x+\sin x\geq 0.\end{cases}$$



Решим эту систему с помощью тригонометрического круга. Отметим на нем углы, для которых $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Заметим, что среди них находятся и углы, для которых $\operatorname{tg} x=-1$.

Числа серии $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$ не могут быть корнями исходного уравнения, так как для них не выполнено условие $\cos x+\sin x\geq 0$. Остальные серии решений нас устраивают.

Тогда в ответ в пункте (а) войдут серии решений: $\left[\begin{array}{l}x_1=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z,\\ x_2=\frac{3\pi}{4}+2\pi n.\end{array}\right.$

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 4\pi]$ любым способом — с помощью тригонометрического круга или с помощью двойного неравенства.

На отрезке $[-\pi; 0]$ нам подходит корень $x=-\frac{\pi}{4}$.

На отрезке $[0; 2\pi]$ нам подходят корни $x=\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}$.

На отрезке $[2\pi; 4\pi]$ — корни $x=\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4}$.

Ответ в пункте (б): $-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4}$.

Глава 3
СТЕРЕОМЕТРИЯ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Как решать задачи по стереометрии?

1. Мы начинаем с построения чертежа объемной фигуры. Правила просты.

Строим чертеж ручкой (не карандашом!), с помощью линейки. Линейкой на ЕГЭ по математике пользоваться можно и нужно. Невидимые элементы объемного тела изображаем штриховыми линиями.

Почему не карандашом? Во-первых, на ЕГЭ у вас карандаша не будет. Во-вторых, чертеж, аккуратно выполненный тонкой гелевой ручкой, выглядит более эстетичным и понятным.

Объемное тело на вашем чертеже должно выглядеть действительно объемным. Все значимые элементы — хорошо видимыми. Следим, чтобы одна грань не накладывалась на другую, а непараллельные отрезки (например, ребро куба и его диагональ) на чертеже не совпадали.

Главное правило: если чертеж вам не нравится, бросайте его и рисуйте другой. Не нравится второй — рисуйте третий, четвертый, седьмой. До тех пор, пока не увидите то, что вам нужно.

2. Для решения задач необходимо отличное знание теории. Это определения, теоремы, признаки. Их надо знать наизусть. Оформляя решение, указываем, что именно применили. Так, как я делаю в этой главе.

3. В сложных задачах ЕГЭ мы пользуемся готовыми шаблонами из курса планиметрии. Например, формулу площади правильного треугольника или соотношение сторон треугольника с углами 30, 60 и 90 градусов надо знать наизусть, а не выводить каждый раз заново, тратя время.

4. Подробно записываем каждый шаг решения. Не просто «Прямая AB перпендикулярна плоскости α», а «Прямая AB перпендикулярна плоскости α, потому что она перпендикулярна пересекающимся прямым c и d, лежащим в плоскости α». Все это лучше записывать не словами, а символами.

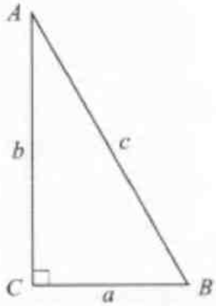
5. От объемной задачи переходим к плоской, планиметрической. Все необходимые плоские чертежи рисуем отдельно.

Я не даю здесь координатный метод. Он есть в моей книге «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ». Дело в том, что в последние годы составители вариантов ЕГЭ намеренно выбирают такие задачи по стереометрии, которые сложно решать через координаты.

Ученики, да и репетиторы тоже, часто спрашивают: «Что нужно знать, чтобы точно сдать ЕГЭ?» Весь необходимый и достаточный объем теории — здесь, в «Кратком справочнике по планиметрии и стереометрии».

Краткий справочник по планиметрии и стереометрии

Планиметрия



Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

a и b — катеты, c — гипотенуза.

Часто встречающиеся пифагоровы тройки:

3; 4; 5

5; 12; 13

7; 24; 25

8; 15; 17.

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике:

$\sin\angle A = \frac{a}{c}$

$\cos\angle A = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\angle A = \frac{a}{b}$

$\operatorname{ctg}\angle A = \frac{b}{a}$

$\sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1$

$\operatorname{tg}^2\angle A + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle A}$

$\operatorname{ctg}^2\angle A + 1 = \frac{1}{\sin^2\angle A}$

$\operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{ctg}\angle A = 1$

$\angle A + \angle B = 90°$

$\sin\angle A = \cos\angle B$

$\cos\angle A = \sin\angle B$

$\operatorname{tg}\angle A = \operatorname{ctg}\angle B$

Высота в прямоугольном треугольнике:

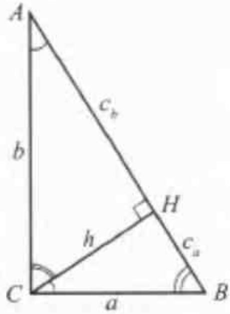
$\Delta ABC \sim \Delta CBH \sim \Delta ACH$

$S_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$

$h^2 = c_a \cdot c_b$;

$a^2 = c \cdot c_a$;

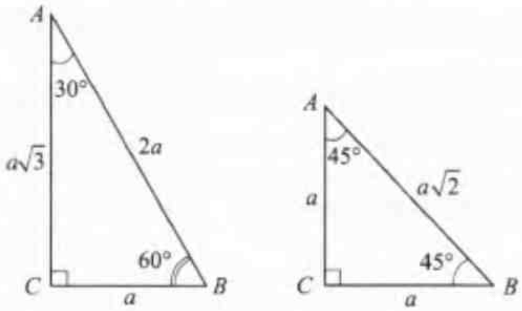
$b^2 = c \cdot c_b$



Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника: $R = \frac{c}{2}$.

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \frac{a+b-c}{2}$.

«Особенные» треугольники



Для любого треугольника:

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ — сумма углов треугольника

$\left.\begin{array}{l} c<a+b \\ a<b+c \\ b<a+c \end{array}\right|$ — неравенство треугольника

Формулы площади треугольника:

$$S_\Delta=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\angle C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=p\cdot r=\frac{abc}{4R}.$$

Здесь $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности.

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R$$

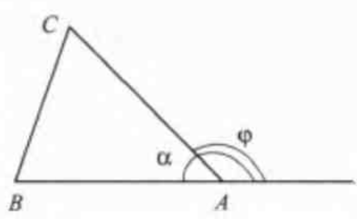
Теорема косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\angle C$$

Смежными называются два угла, имеющие общую сторону и образующие в сумме 180 градусов.

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Внешний угол треугольника — угол, смежный с одним из углов треугольника.



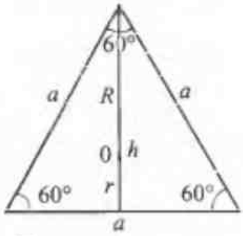
$\alpha+\varphi=180^\circ$

$\sin\varphi=\sin\alpha;\ \cos\varphi=-\cos\alpha;\ \operatorname{tg}\varphi=-\operatorname{tg}\alpha$

$\varphi=\angle B+\angle C$

Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним.

Правильный треугольник



Высота правильного треугольника: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Площадь правильного треугольника: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Признаки равенства треугольников

✓ По трем сторонам. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

✓ По углу и двум прилежащим к нему сторонам.

✓ По стороне и двум прилежащим к ней углам.

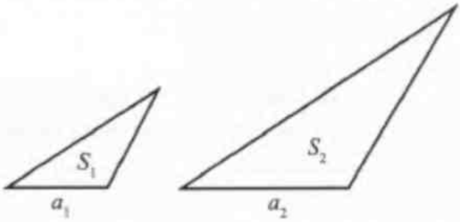
Признаки подобия треугольников

✓ По двум углам.

✓ По трем сторонам.

✓ По углу и двум прилежащим к нему сторонам.

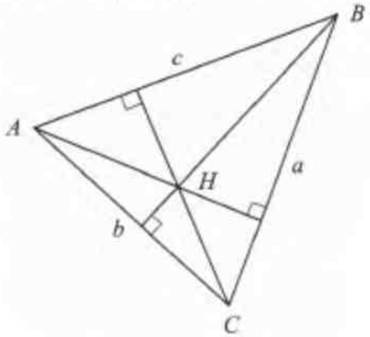
Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.



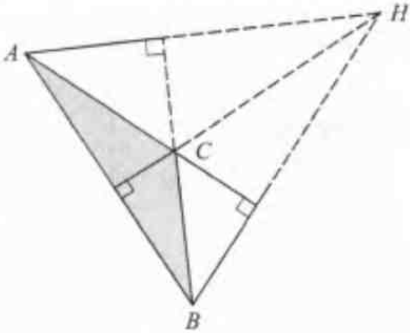
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = k^2$$

Элементы треугольника

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.



Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

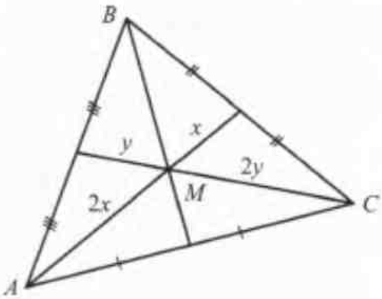


В случае тупоугольного треугольника пересекаются продолжения высот.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту

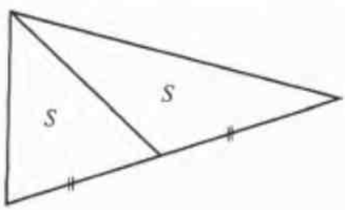
$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

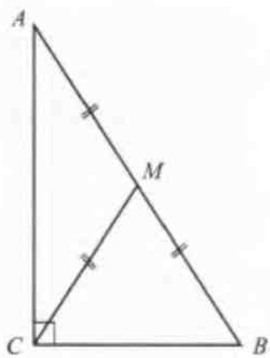


Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Три медианы треугольника делят его на 6 равных по площади треугольников.



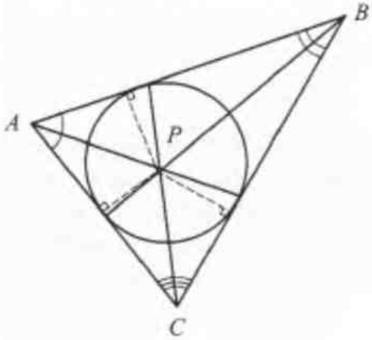
Медиана треугольника делит его на два равных по площади треугольника.



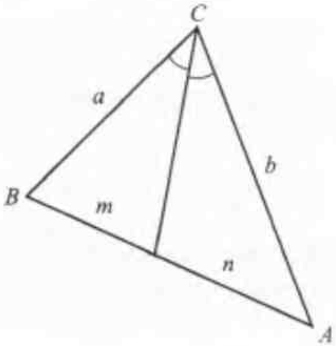
Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

$$CM = AM = BM = R$$

Биссектриса треугольника делит угол треугольника пополам.

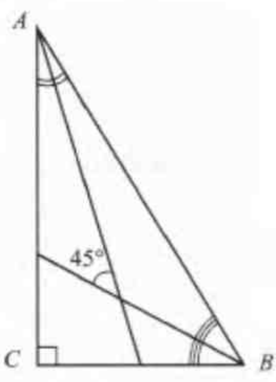


Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон треугольника и является центром окружности, вписанной в треугольник.



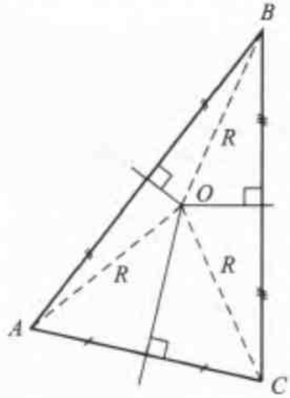
Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон.

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$



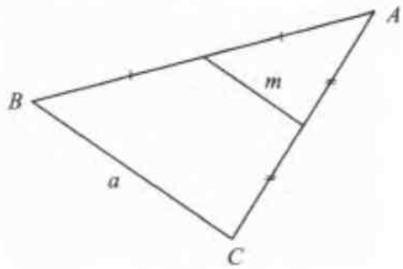
Острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника равен 45°.

Серединный перпендикуляр к стороне треугольника — это множество точек, одинаково удаленных от ее концов.



Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром окружности, описанной вокруг треугольника.

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины его сторон.



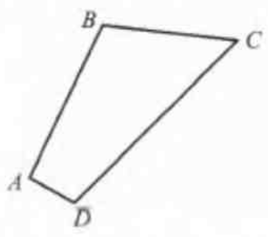
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

$$m = \frac{a}{2}$$

$$m \parallel a$$

Четырехугольники

Выпуклый



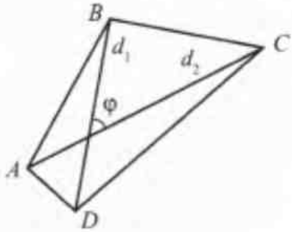
Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

Невыпуклый

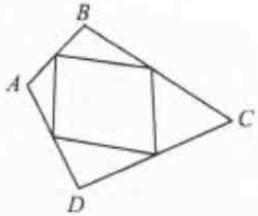
На практике: представляем как комбинацию треугольников и выпуклых четырехугольников.

Площадь выпуклого четырехугольника



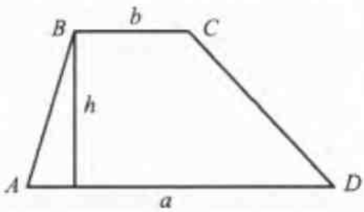
$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\varphi.$$

d_1 и d_2 — диагонали.



Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Трапеция — четырехугольник, имеющий ровно одну пару параллельных сторон.

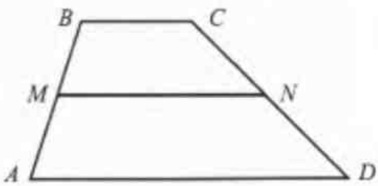


$BC \parallel AD$;

BC и AD — основания, AB и CD — боковые стороны.

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$$

$$S_{\text{трап}} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

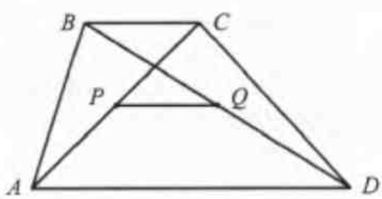


M — середина AB, N — середина CD.

MN — средняя линия трапеции.

$$MN \parallel AD,\ MN \parallel BC,$$

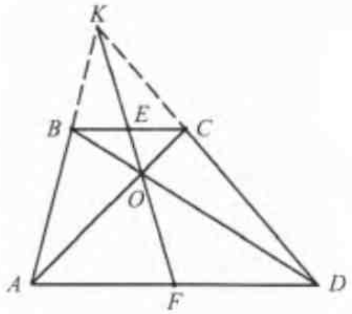
$$MN = \frac{a+b}{2}.$$



Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

P — середина AC, Q — середина BD.

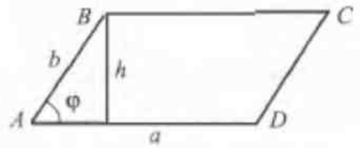
$$PQ = \frac{a-b}{2}.$$



$K = (AB) \cap (CD)$;
E — середина BC, F — середина AD,
$O = AC \cap BD$.

Замечательное свойство трапеции: середины оснований, точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

Параллелограмм — четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

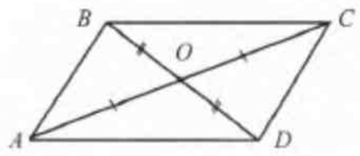


$$AB \parallel CD,\ AD \parallel BC.$$

Четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны параллельны и равны.

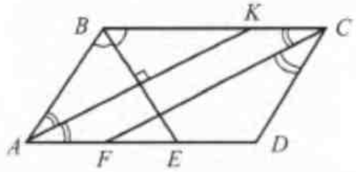
$AB \parallel CD$, $AB = CD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.

$S = a \cdot h = ab \sin\varphi$.



Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

$AO = OC$, $BO = OD$.



Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.

$$AK \parallel CF$$

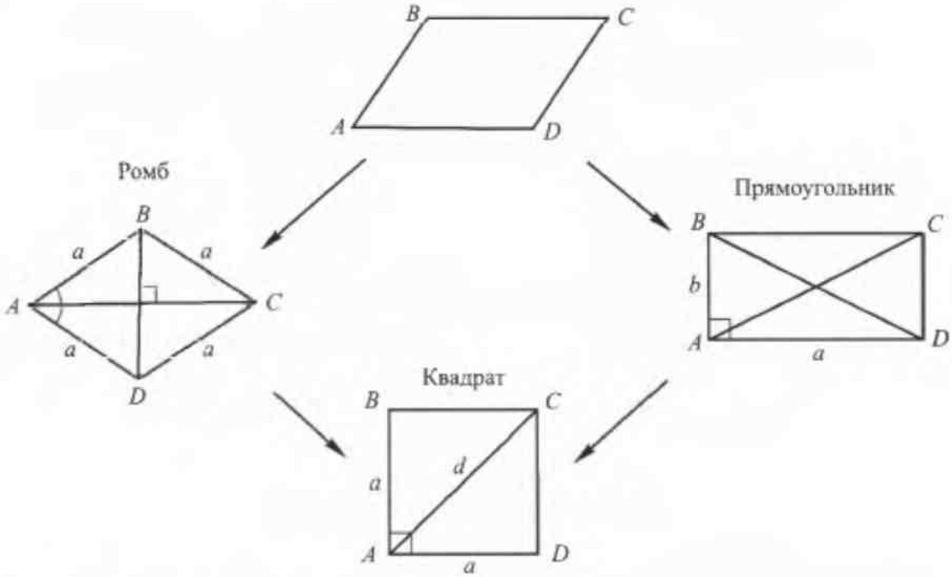
Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.

$$AK \perp BE$$

Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

$$AB = AE,\ DF = CD$$

Виды параллелограммов



Ромб. Параллелограмм, у которого все стороны равны.
Диагонали ромба перпендикулярны.
Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

$S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 — диагонали.

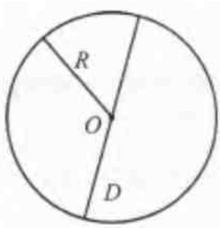
Прямоугольник. Параллелограмм, все углы которого прямые.
Диагонали прямоугольника равны.

$S_{\text{прямоугольника}} = a \cdot b.$

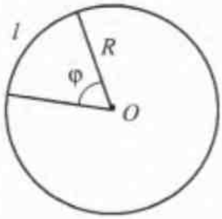
Квадрат. Ромб, все углы которого прямые. Другими словами: прямоугольник, у которого все стороны равны.

$d = a\sqrt{2}$, где d — диагональ.
$S_{\text{квадрата}} = a^2.$

Окружность и круг

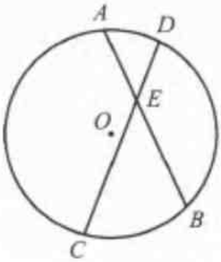


$L = 2\pi R$ — длина окружности
$S = \pi R^2$ — площадь круга
$D = 2R$ — диаметр окружности



$$l_{дуги} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi R$$ — длина дуги

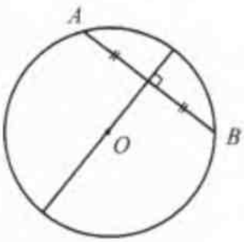
$$S_{сектора} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi R^2$$ — площадь сектора



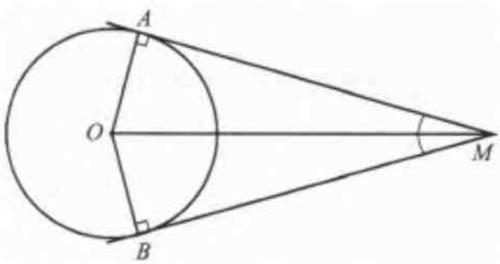
Хорда — отрезок, соединяющий две точки на окружности.

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE$$



Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.



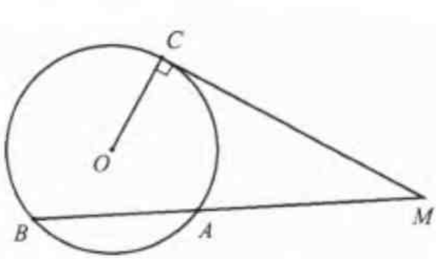
Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.

$$MA = MB$$

Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

$$OA \perp MA$$

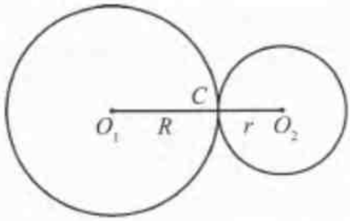
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.



Теорема о секущей и касательной.

Квадрат отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей.

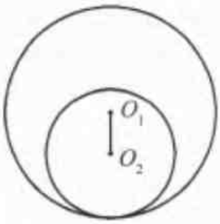
$$MC^2 = MA \cdot MB$$



Точка касания окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры.

Внешнее касание окружностей:

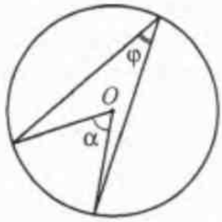
$$O_1O_2 = R + r$$



Внутреннее касание окружностей:

$$O_1O_2 = R - r$$

Центральный и вписанный углы



α — центральный угол,
φ — вписанный угол.

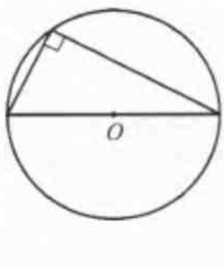
Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается.

Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

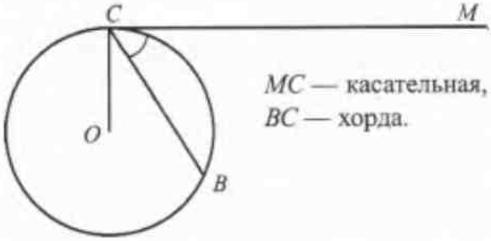
$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги или на одну и ту же дугу, равны.

Равные дуги стягиваются равными хордами.



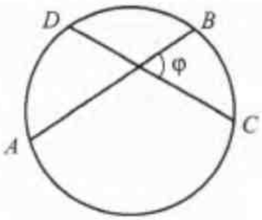
Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.



MC — касательная,
BC — хорда.

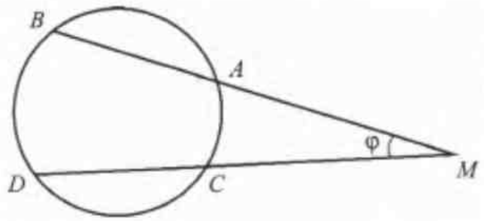
Угол между хордой и касательной, проведенной через конец этой хорды, равен половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.

$$\angle MCB = \frac{1}{2}\breve{CB}$$



Угол между пересекающимися хордами равен полусумме заключенных между ними дуг.

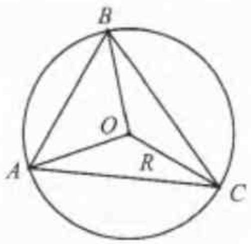
$$\varphi = \frac{\smile AD + \smile BC}{2}$$



Угол между секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности угловых величин дуг, заключенных внутри угла.

$$\varphi = \frac{\smile BD - \smile AC}{2}$$

Описанные и вписанные треугольники



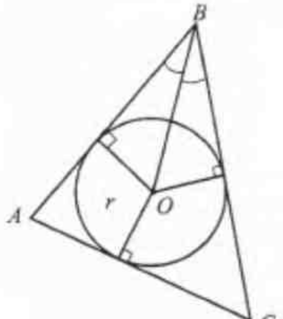
Центр окружности, описанной вокруг треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Центр описанной окружности равноудален от вершин треугольника.

$$OA = OB = OC$$

$\dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{AC}{\sin\angle B} = \dfrac{BC}{\sin\angle A} = 2R$ (теорема синусов)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$



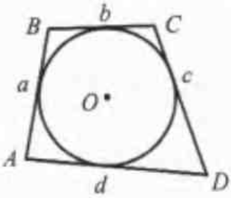
Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения биссектрис треугольника.

Центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.

$$S_{\Delta ABC} = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{AB + BC + AC}{2}$$

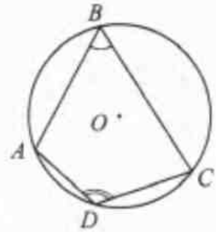
Описанные и вписанные четырехугольники

Описанный четырехугольник



$a + c = b + d$

Вписанный четырехугольник

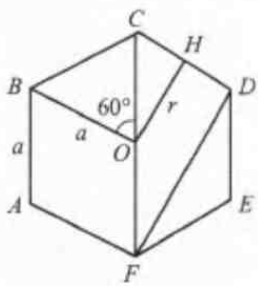


$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

Окружность можно **вписать** в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

Окружность можно **описать** вокруг четырехугольника тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°.

Правильный шестиугольник



$S_{\text{пр. шестиугольника}} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$R = a$ — радиус описанной окружности

$r = OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ — радиус вписанной окружности

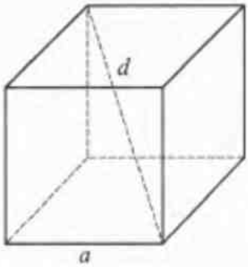
$CF = 2a$ — большая диагональ

$FD = a\sqrt{3}$ — диагональ

Стереометрия. Основные формулы

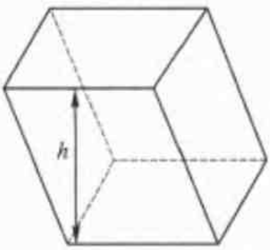
Многогранники

Куб



$V = a^3$ — объем
$S = 6a^2$ — площадь полной поверхности
a — ребро куба
$d = a\sqrt{3}$ — длина диагонали

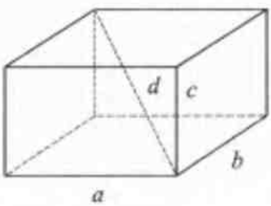
Параллелепипед



$V = S_{осн} \cdot h$ — объем
$S_{осн}$ — площадь основания
h — высота

Площадь поверхности параллелепипеда равна сумме площадей всех его граней.

Прямоугольный параллелепипед

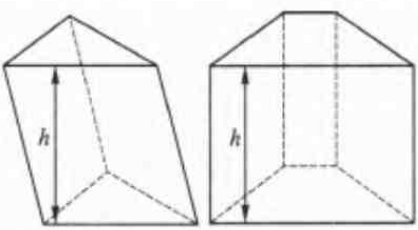


$V = a \cdot b \cdot c$ — объем

$S = 2ab + 2bc + 2ac$ — площадь полной поверхности

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ — длина диагонали

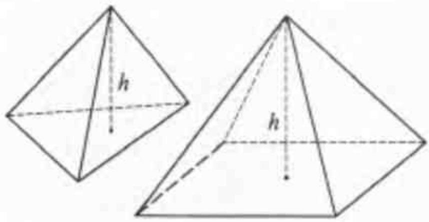
Призма



$V = S_{осн} \cdot h$ — объем призмы

$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ — площадь полной поверхности призмы

Пирамида

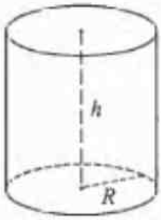


$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ — объем пирамиды

$S = S_{осн} + S_{бок}$ — площадь полной поверхности пирамиды

Тела вращения

Цилиндр

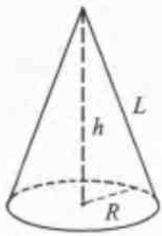


$V = \pi R^2 \cdot h$ — объем цилиндра

$S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ — площадь полной поверхности цилиндра

h — высота цилиндра

Конус



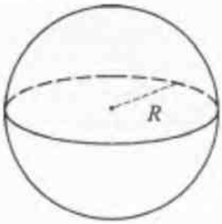
$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$ — объем конуса

$S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi RL$ — площадь полной поверхности конуса

L — образующая

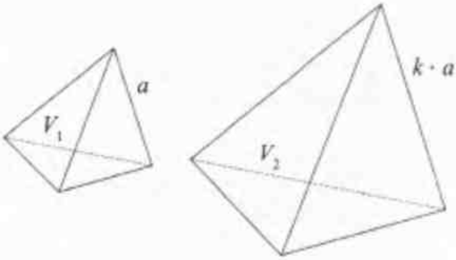
$L = \sqrt{R^2 + h^2}$

Шар



$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ — объем шара

$S = 4\pi R^2$ — площадь сферы



Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия. Если все линейные размеры объемного тела увеличить в k раз, то его площадь поверхности увеличится в k^2 раз, а объем в k^3 раз.

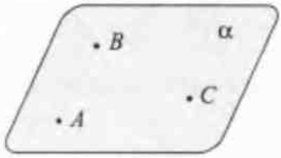
$$S_2 = k^2 \cdot S_1$$
$$V_2 = k^3 \cdot V_1$$

Основные понятия стереометрии

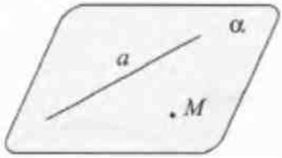
Плоскости в пространстве

Плоскость в пространстве можно провести:

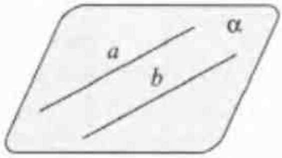
1) через три точки, не лежащие на одной прямой



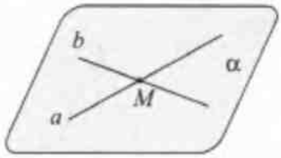
2) через прямую и не лежащую на ней точку



3) через две параллельные прямые

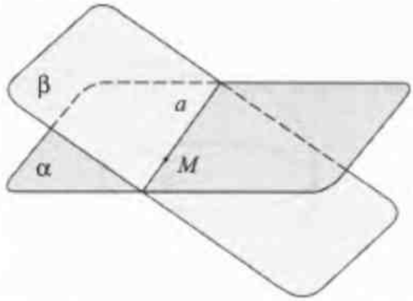


4) через две пересекающиеся прямые

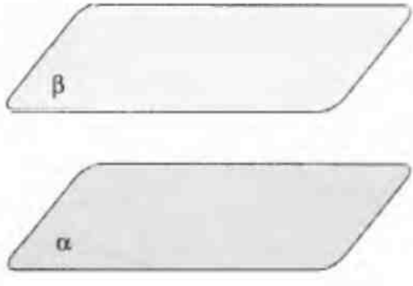


Плоскости в пространстве могут быть параллельными или пересекаться.

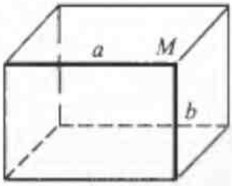
Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.



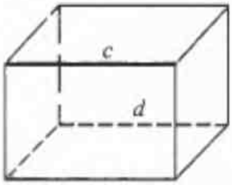
Если две плоскости не имеют общих точек, то они параллельны друг другу.



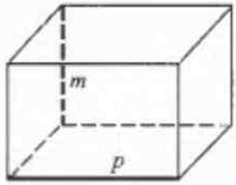
Расположение прямых в пространстве, три случая:



Пересекаются
$a \cap b = M$



Параллельны
$c \parallel d$



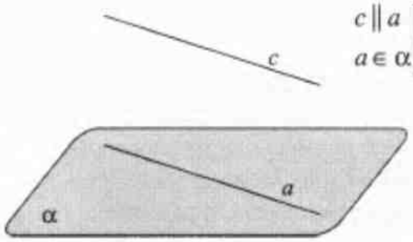
Скрещиваются
$m \dot{-} p$

Параллельность прямой и плоскости

Определение: прямая параллельна плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек.

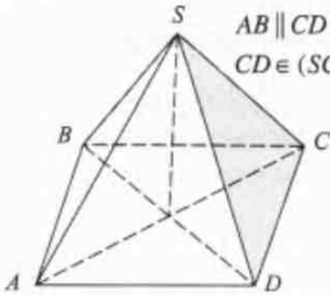
$$\left.\begin{matrix} c \parallel a \\ a \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$$

Признак параллельности прямой и плоскости: прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости.



$$\left.\begin{matrix} AB \parallel CD \\ CD \in (SCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$$

Применение в задачах:



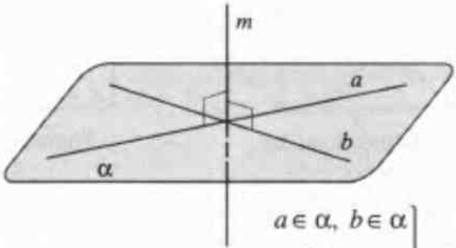
Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение: прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

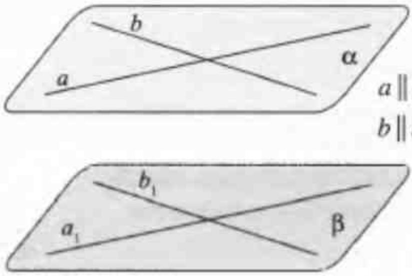


$$\left.\begin{array}{l} a\in\alpha,\ b\in\alpha \\ m\perp a \\ m\perp b \end{array}\right\}\Rightarrow m\perp\alpha$$

Параллельность плоскостей

Определение: плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

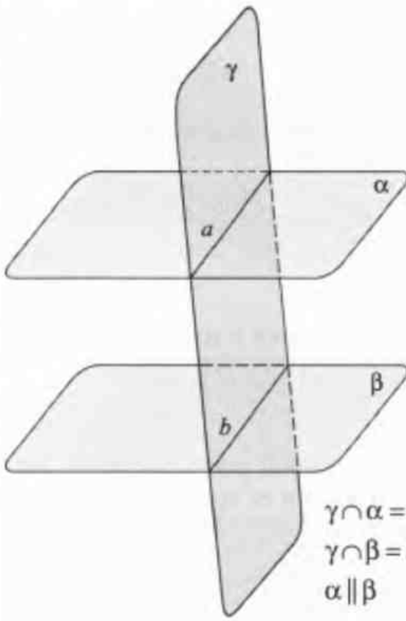
Признак параллельности плоскостей: плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.



$$\left.\begin{array}{l} a\parallel a_1 \\ b\parallel b_1 \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\parallel\beta$$

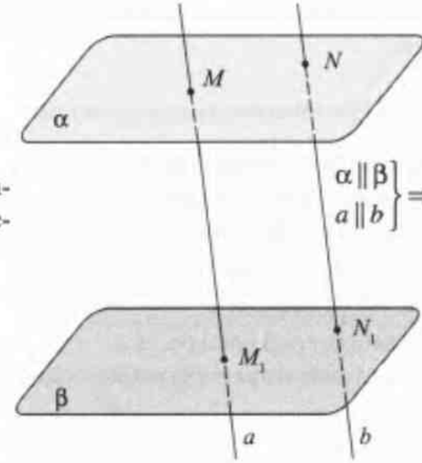
Свойства параллельных плоскостей

Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.



$$\left.\begin{array}{l} \gamma\cap\alpha=a \\ \gamma\cap\beta=b \\ \alpha\parallel\beta \end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

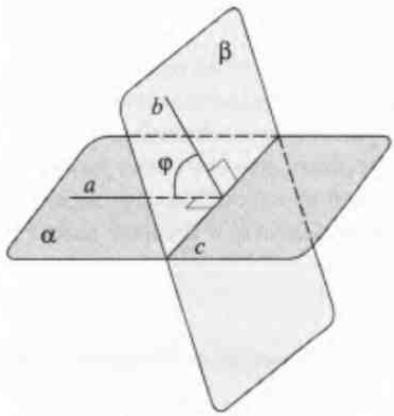
Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ a \parallel b\end{array}\right\} \Rightarrow MM_1 = NN_1$$

Угол между плоскостями

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

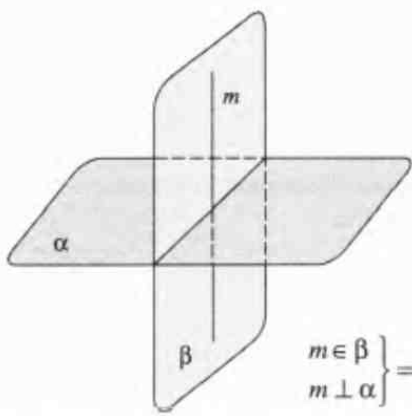


φ — угол между плоскостями α и β

Перпендикулярность плоскостей

Определение: две плоскости перпендикулярны, если угол между ними равен 90°.

Признак перпендикулярности плоскостей: если плоскость β содержит перпендикуляр к плоскости α, то плоскости α и β перпендикулярны.



$$\left.\begin{array}{l}m \in \beta \\ m \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

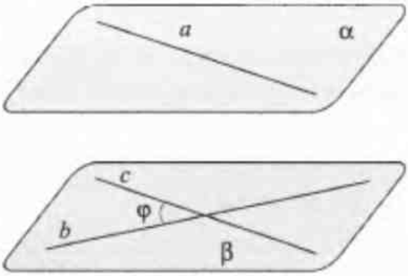
Угол между скрещивающимися прямыми

Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.

$$a \in \alpha,\ b \in \beta,\ \alpha \parallel \beta$$

Прямые a и b скрещиваются.

Проведем в плоскости β прямую $c \parallel a$. Угол φ между b и c равен углу между a и b.

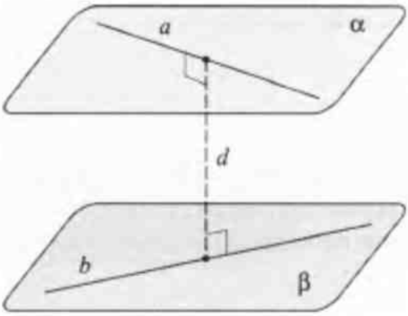


Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Другими словами, оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.

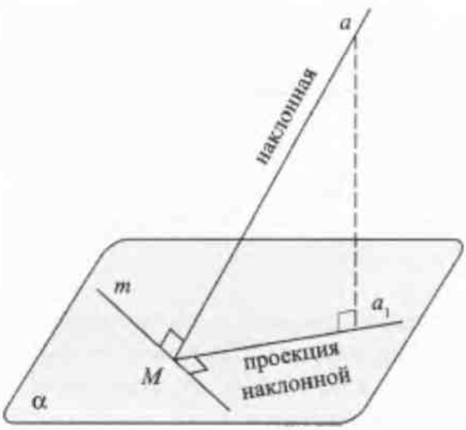
Можно сказать, что оно равно расстоянию от одной из этих прямых до параллельной ей плоскости, в которой лежит другая прямая.



Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

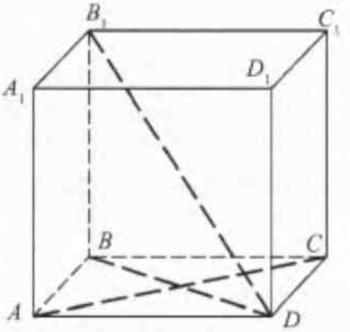
$m \in \alpha$
a — наклонная
a_1 — проекция наклонной на плоскость α
$m \perp a \Leftrightarrow m \perp a_1$



Теорема о трех перпендикулярах выполняется и в этом случае.

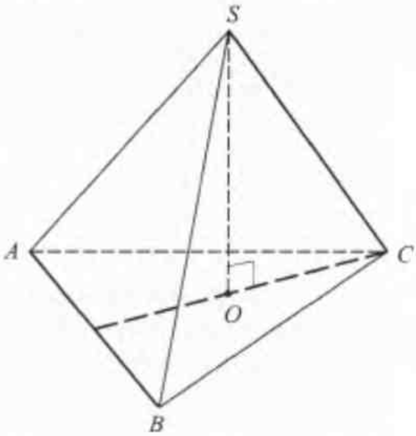
Теорема о трех перпендикулярах в задачах

В кубе



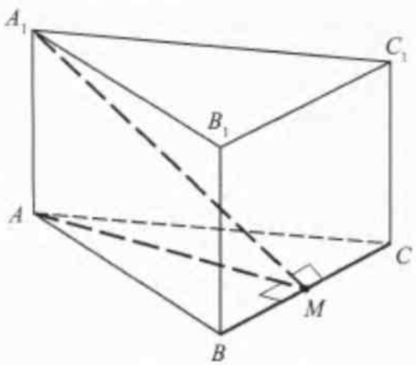
$BD \perp AC \Leftrightarrow B_1D \perp AC$

В правильном тетраэдре $SABC$



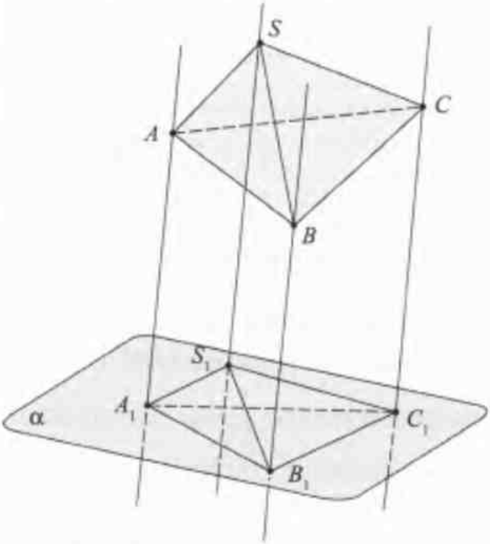
OC — проекция SC на плоскость ABC,
$OC \perp AB \Leftrightarrow SC \perp AB$

В правильной треугольной призме



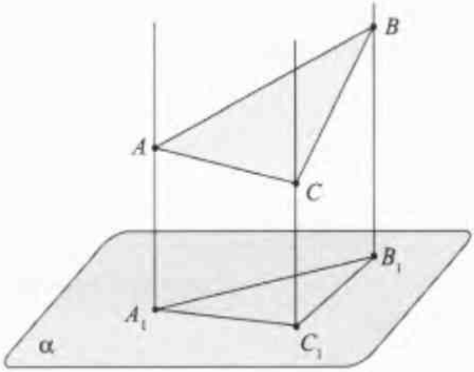
$AM \perp BC \Leftrightarrow A_1M \perp BC$

Параллельное проецирование



α — плоскость проекции

Площадь прямоугольной проекции фигуры

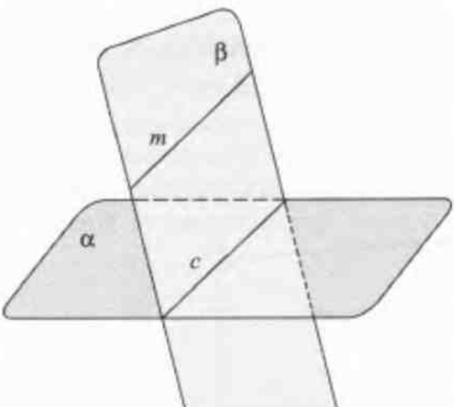


Площадь прямоугольной проекции фигуры равна произведению площади фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

$$S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos\varphi$$

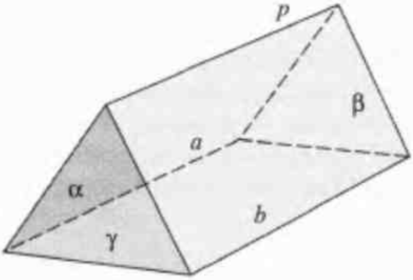
Теорема о прямой и параллельной ей плоскости

Пусть прямая m параллельна плоскости α. Если плоскость β проходит через прямую m и пересекает плоскость α по прямой c, то c параллельна m.



$$\left.\begin{array}{l} m \parallel \alpha \\ m \in \beta \\ \beta \cap \alpha = c \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel m$$

Теорема. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой p. Плоскость γ параллельна прямой p. Тогда она пересекает плоскости α и β по прямым, параллельным p.



$$\left.\begin{aligned}&\alpha\cap\beta=p\\&p\parallel\gamma\\&\alpha\cap\gamma=a\\&\beta\cap\gamma=b\end{aligned}\right\}\Rightarrow a\parallel b\parallel p$$

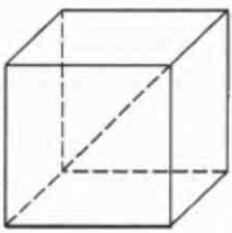
Если боковые **ребра** пирамиды равны, то ее вершина проецируется в центр **описанной** окружности основания.

Если боковые **ребра** пирамиды образуют одинаковые углы с плоскостью основания, то ее вершина проецируется в центр **описанной** окружности основания.

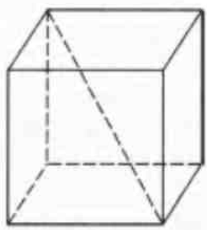
Если боковые **грани** пирамиды образуют одинаковые углы с плоскостью основания, то ее вершина проецируется в центр **вписанной** окружности основания.

Чертежи в задачах по стереометрии

Куб

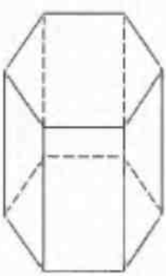


Неудачно. Главная диагональ и боковые ребра оказались на одной линии.

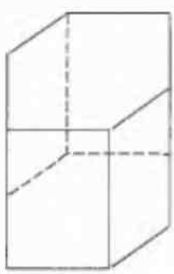


ОК

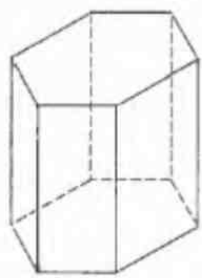
Шестигранная призма



Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования. Ребра передней и задней граней оказались на одной линии.

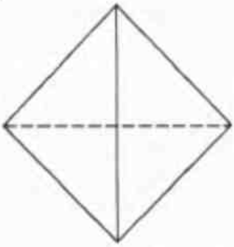


Неудачно. Стороны основания и боковые ребра оказались на одной линии.

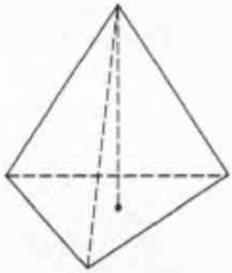


ОК

Тетраэдр

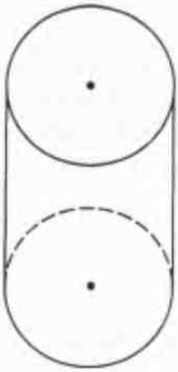


Неудачно. Рисунок стал «плоским». Не видна высота тетраэдра.

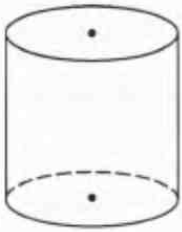


ОК

Цилиндр

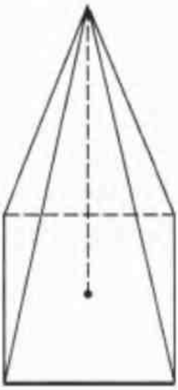


Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования.

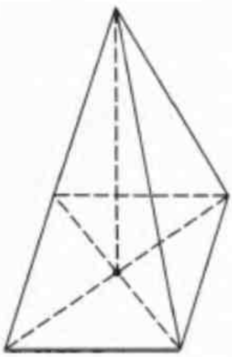


ОК

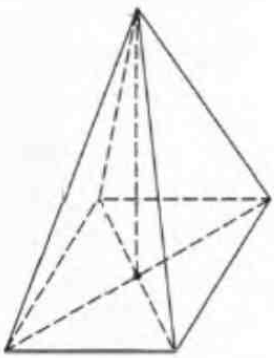
Правильная четырехугольная призма



Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования.



Неудачно. Левая боковая грань не видна.



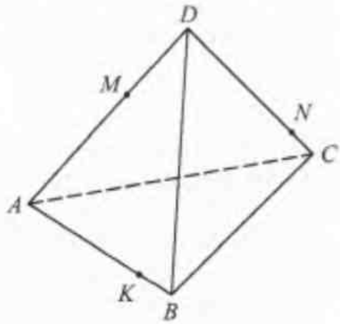
ОК

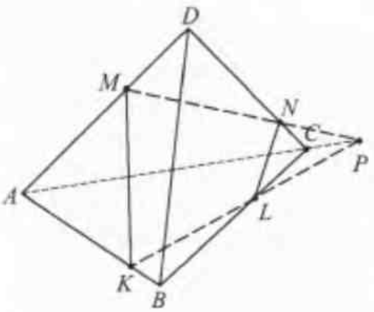
И еще о чертежах в планиметрии и стереометрии. Я много раз наблюдала, как старшеклассник рисует микроскопический и кривой чертежик, на котором невозможно что-либо разглядеть. Как безуспешно сидит над ним, проводя новые и новые линии, но отказывается от предложений нарисовать другой.

И я видела, как буддийские монахи в течение месяцев трудятся над сложнейшими многоцветными мандалами из ярко окрашенного песка. А потом, полюбовавшись замысловатым узором и проведя церемонию, сметают весь песок веником, потому что стремятся достичь непривязанности к материальному. Так стоит ли привязываться к жалкому чертежу, на который вы потратили полминуты? Не нравится? Зачеркните и нарисуйте другой!

Задачи на построение сечений

1. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N, K. Точка M лежит на ребре AD, N — на ребре DC, K — на ребре AB.



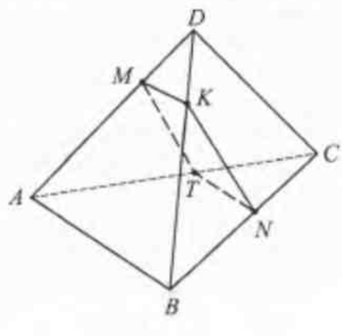


Проведем MK в плоскости грани ABD и MN в плоскости грани ADC.

Продлим отрезки MN и AC; $(MN) \cap (AC) = P$; $P \in (ABC)$.

Проведем PK в плоскости нижней грани; $PK \cap BC = L$; четырехугольник $MNLK$ — искомое сечение.

2. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N, K. Точка N лежит на ребре BC, $M \in AD$, $K \in BD$, $MK \parallel AB$.

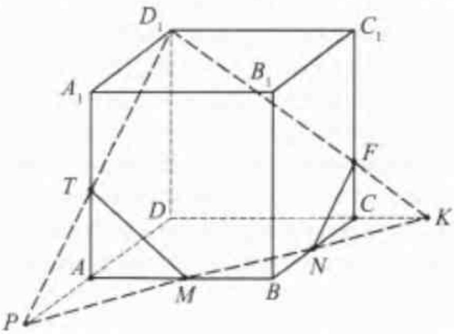


Покажем, что плоскость сечения пересекает плоскость основания пирамиды по прямой NT, параллельной MK.

Прямая MK параллельна AB, лежащей в плоскости основания ABC. Значит, $MK \parallel (ABC)$.

Плоскость сечения проходит прямую MK, параллельную плоскости ABC. По теореме о прямой и параллельной ей плоскости, линия пересечения плоскости сечения и плоскости ABC параллельна прямой MK. Трапеция $MKNT$ — искомое сечение.

3. Постройте сечение куба $A...D_1$, проходящее через вершину D_1 и середины ребер AB и BC.



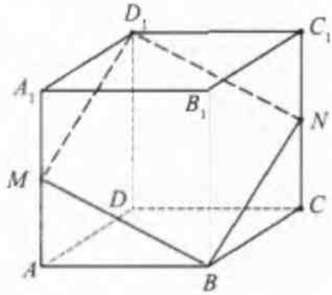
Пусть M — середина AB, N — середина BC, $MN \in (ABC)$. Продолжим прямую MN до пересечения с продолжениями ребер DC и AD; $(MN) \cap (DC) = K$; $(MN) \cap (AD) = P$.

Треугольники AMP и KCN — прямоугольные равнобедренные, причем $AP = CK = \frac{AB}{2}$.

Проведем D_1K — в плоскости задней грани и D_1P — в плоскости левой грани куба; $D_1K \cap CC_1 = F$; $D_1P \cap AA_1 = T$.

Пятиугольник $MNFD_1T$ — искомое сечение. В нем есть параллельные стороны: $TM \parallel D_1F$, $TD_1 \parallel NF$, так как линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

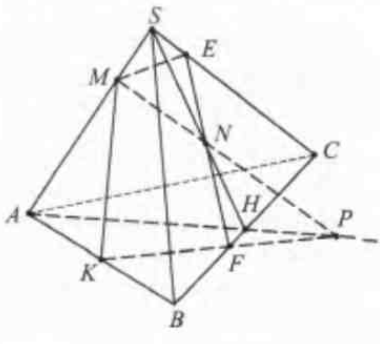
4. Постройте сечение куба $A...D_1$, проходящее через вершину B и середины ребер AA_1 и CC_1.



Пусть M — середина ребра AA_1, N — середина ребра CC_1

Поскольку линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны, плоскость сечения пересекает заднюю грань по прямой, параллельной BM, а левую грань — по прямой, параллельной BN. Искомое сечение — ромб BND_1M.

5. Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCS$, проходящее через точку K — середину ребра AB, точку M, делящую ребро AS в отношении $SM : AM = 1 : 2$, и точку N — середину апофемы грани SBC.



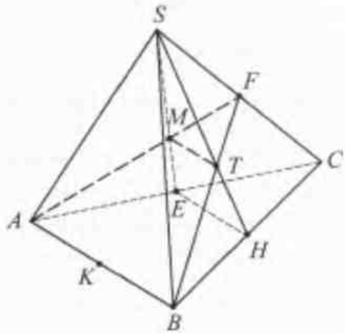
Пусть SH — апофема[1] грани SBC; N — середина SH.

Проведем MN в плоскости ASH; $(MN) \cap (AH) = P$; $P \in (ABC)$; $KP \cap BC = F$; $FN \cap SC = E$.

Четырехугольник $KMEF$ — искомое сечение.

[1] Апофема — высота боковой грани.

6. Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCS$, проходящее через точку K — середину ребра AB — и точки M и T — центры граней ASC и SBC.



Пусть SE и SH — апофемы граней ASC и SBC; точки M и T делят отрезки SE и SH в отношении $2 : 1$, считая от точки S.

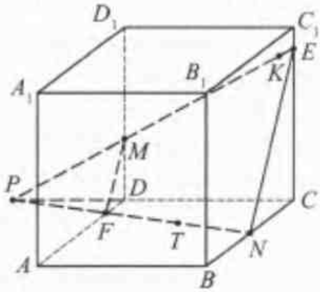
Из подобия треугольников SMT и SEH получим, что $MT \parallel EH$. Значит, $MT \parallel (ABC)$.

По теореме о прямой и параллельной ей плоскости, линия пересечения плоскости сечения и нижней грани параллельна прямой MT. Это значит, что плоскость сечения пересекает грань ABC по прямой AB. Достроим сечение.

$(BT) \cap SC = F$, где F — середина SC; $(AM) \cap SC = F$.

ΔABF — искомое сечение.

7. Постройте сечение куба $A \ldots D_1$, проходящее через точку M, лежащую на ребре DD_1, и точки T и K, принадлежащие граням ABC и DCC_1.

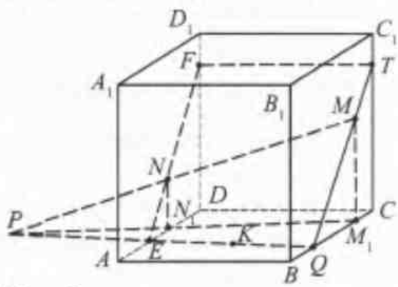


Точки M и K лежат в плоскости задней грани DCC_1D_1. Соединив M и K, получим, что $MK \cap CC_1 = E$, $(MK) \cap (DC) = P$.

Соединив точки P и T в нижней грани, получим FN — линию пересечения плоскости сечения с нижней гранью; $F \in AD$, $N \in BC$.

Трапеция $FMEN$ — искомое сечение.

8. И самый сложный случай. Построим сечение куба $A \ldots D_1$ плоскостью MNK, где $M \in BB_1C_1$, $N \in AA_1D_1$, $K \in ABC$, причем расстояния от точек M и N до плоскости ABC различны.



Пусть точки M_1 и N_1 — проекции точек M и N на плоскость нижней грани.

Плоскость MNN_1 проходит через параллельные прямые MM_1 и NN_1.

Проведем в этой плоскости MN и M_1N_1; $(MN) \cap (M_1N_1) = P$.

Точки P и K лежат в нижней грани куба, следовательно, плоскость сечения пересекает плоскость нижней грани по прямой PK. Дальнейшее построение очевидно.

Задачи по стереометрии в формате ЕГЭ

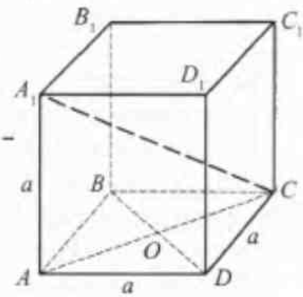
Задачи сгруппированы по темам. Оформление задач соответствует критериям ФИПИ.

Теорема о трех перпендикулярах

1. (ЕГЭ-2017) Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1C = BD = 2$.



Пусть $AB = AA_1 = AD = a$.

а) Поскольку $ABCD$ — ромб, его диагонали перпендикулярны, $AC \perp BD$.

Точка A — проекция точки A_1 на плоскость ABC.

Тогда $A_1C \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах.

б) Пусть $A_1C = BD = 2$. Найдем объем призмы.

Мы знаем, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, $V = S_{осн} \cdot h$.

O — точка пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании, $O = BD \cap AC$; $BD = 2 \Rightarrow OD = 1$.

Пусть $OC = AO = c$.

Из ΔAOD, где $\angle O = 90°$: $AD^2 = AO^2 + OD^2$; $a^2 = c^2 + 1$.

Из ΔAA_1C, где $\angle A = 90°$: $A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$,

$A_1C = 2$ по условию; $4 = (2c)^2 + a^2$.

Из системы уравнений $\begin{cases} c^2 + 1 = a^2 \\ 4c^2 + a^2 = 4 \end{cases}$ найдем $c = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $AC = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $a = AA_1 = \sqrt{\dfrac{8}{5}}$.

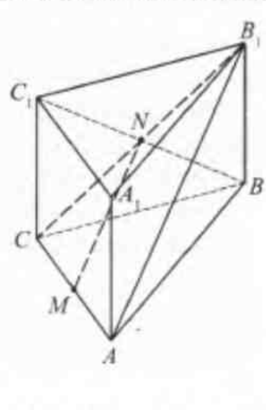
Объем призмы: $V = \dfrac{AC \cdot BD}{2} \cdot AA_1 = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{5}$.

Угол между скрещивающимися прямыми

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



а) Рассмотрим сечение призмы плоскостью AB_1C.

$MN \in (AB_1C)$, M — середина AC, N — середина B_1C.

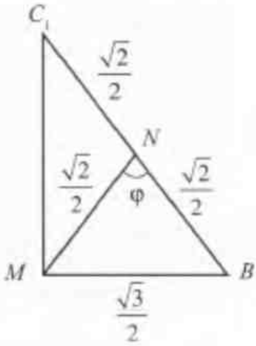
Значит, MN — средняя линия треугольника AB_1C и $MN \parallel AB_1$.

б) Найдем косинус угла между AB_1 и BC_1.

Прямые AB_1 и BC_1 — скрещивающиеся.

Угол между скрещивающимися прямыми — это угол между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.

Поэтому угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу между MN и BC_1, лежащими в плоскости AB_1C.



Рассмотрим треугольник BC_1M. Он прямоугольный. В самом деле, прямая BM перпендикулярна прямым AC и CC_1 — значит, она перпендикулярна плоскости ACC_1. Это значит, что $BM \perp C_1M$, поскольку $C_1M \in (ACC_1)$. BM — высота и биссектриса правильного треугольника ABC со стороной 1; $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BC_1 = \sqrt{2}$, так как CC_1B_1B — квадрат со стороной 1, $C_1N = NB = MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пусть $\angle MNB = \varphi$.

По теореме косинусов из треугольника MNB найдем $\cos\varphi$.

$MB^2 = MN^2 + BN^2 - 2MN \cdot BN \cdot \cos\varphi$;

Получим: $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

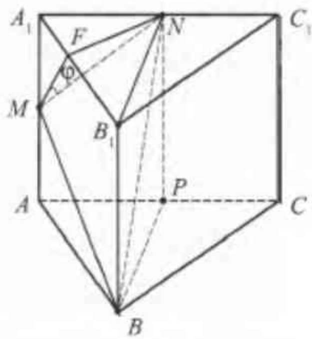
Ответ: $\varphi = \arccos\frac{1}{4}$.

Угол между плоскостями

3. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины ребер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.



а) Покажем, что $\angle BMN = 90°$.

Пусть точка P — середина AC.

В плоскости BNP проведем отрезок BN.

Рассмотрим треугольник BMN, из которого можно найти угол BMN.

Сначала найдем MN, BM и BN — стороны этого треугольника.

ΔABC правильный, BP — его высота, $BP = \frac{6\sqrt{3}}{2}$.

Из $\Delta BPN: BN^2 = BP^2 + NP^2 = \frac{36 \cdot 3}{4} + 36 = 36 \cdot \frac{7}{4} = 63$.

Из $\Delta A_1MN: MN^2 = A_1M^2 + A_1N^2 = 18$, поскольку $A_1M = NA_1 = 3$.

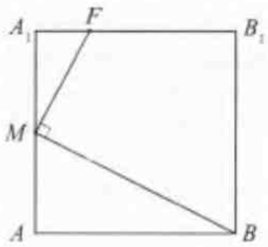
Из $\Delta ABM: BM^2 = AB^2 + AM^2 = 36 + 9 = 45$.

Для треугольника BMN выполняется теорема Пифагора: $BN^2 = MN^2 + BM^2$. Значит, он прямоугольный.

б) Найдем угол φ между плоскостями BMN и ABB_1.

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Плоскости BMN и ABB_1 пересекаются по прямой BM, причем в пункте (а) мы доказали, что $MN \perp BM$. В плоскости ABB_1 построим $FM \perp BM$.



Заметим, что $\Delta ABM \sim \Delta A_1MF$, $\dfrac{A_1F}{AM} = \dfrac{AM}{AB}$, значит, $A_1F = \dfrac{1}{4}A_1B_1$.

Следовательно, отрезок NF равен половине высоты правильного треугольника $A_1B_1C_1$, $NF = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $NF \perp A_1B_1$. Кроме того, отрезок NF лежит в плоскости верхнего основания призмы, которая перпендикулярна боковому ребру AA_1. Значит, $NF \perp AA_1$. Поскольку NF перпендикулярен двум пересекающимся прямым A_1B_1 и AA_1, лежащим в плоскости AA_1B_1, получим: $NF \perp (AA_1B_1)$.

Тогда $NF \perp FM$; ΔNFM — прямоугольный, $\sin\varphi = \dfrac{NF}{MN} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$;

$\varphi = \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

Применение теоремы о прямой и параллельной ей плоскости

Вспомним теорему, которой мы пользовались при построении сечений.

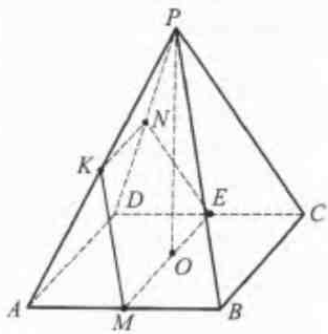
Пусть прямая *m* параллельна плоскости α. Если плоскость β проходит через прямую *m* и пересекает плоскость α по прямой *c*, то прямая *c* параллельна *m*.

---

4. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 8, точка K — середина бокового ребра AP.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

б) Найдите площадь сечения.



Точка M — середина AB. Тогда $KM \parallel PB$ как средняя линия ΔAPB.

Точка N — середина PD. Поскольку KN — средняя линия ΔAPD, $KN \parallel AD$, тогда $KN \parallel BC$.

Построим сечение пирамиды плоскостью KMN. Пусть плоскости KMN и ABC пересекаются по прямой ME. Покажем, что $ME \parallel AD$.

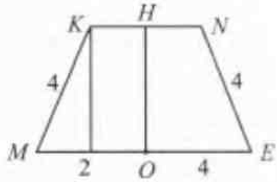
По теореме о прямой и параллельной ей плоскости,

$$\left.\begin{array}{l} KN \parallel (ABC) \\ KN \in (KMN) \\ (KNM)\cap(ABC) = ME \end{array}\right| \Rightarrow ME \parallel KN.$$

Это значит, что $ME \parallel AD$. Прямая ME содержит точку O, являющуюся проекцией вершины P на плоскость ABC. Трапеция $KNEM$ — искомое сечение.

б) Найдем площадь сечения.

$S_{KNEM} = \dfrac{1}{2}\cdot(ME + KN)\cdot h$, где h — высота трапеции $KNEM$.



Пусть H — середина KN, $OH \perp KN$.

$MK = NE = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4,\ KN = 4,$

тогда $HO = 2\sqrt{3},\ S_{KNEM} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$

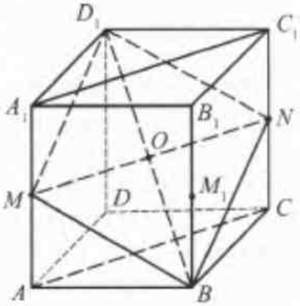
Нахождение угла между плоскостями через формулу площади прямоугольной проекции фигуры

---

5. (ЕГЭ-2017) Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.



а) Построим сечение, содержащее прямую BD_1 и параллельное прямой AC.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда; $O = BD_1 \cap AC_1$; O — середина диагонали BD_1.

В плоскости AA_1C_1 через точку O проведем прямую MN, параллельную AC. Точка M лежит на ребре AA_1, точка N лежит на ребре CC_1.

Мы построили искомое сечение. Это четырехугольник MD_1NB, который, по условию, является ромбом.

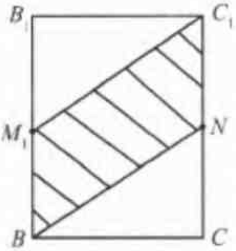
Так как MD_1NB — ромб, $MN \perp BD_1$. Тогда $AC \perp BD_1$, так как $MN \parallel AC$. По теореме о трех перпендикулярах, $AC \perp BD$. Это значит, что $ABCD$ — прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны, то есть квадрат.

б) Угол между плоскостью сечения α и плоскостью BCC_1 — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Мы можем найти искомый угол между α и BCC_1, пользуясь этим определением. Однако есть более простой способ. Вспомним формулу площади прямоугольной проекции фигуры.

Пусть S — площадь фигуры. Тогда площадь ее прямоугольной проекции равна $S \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

$$S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos\varphi.$$



Пусть M_1 — середина BB_1. Тогда BM_1C_1N — проекция ромба на плоскость BB_1C_1.

Площадь ромба:

$$S_{BMD_1N} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot BD_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + 6^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{68} = 4\sqrt{34}.$$

Площадь его проекции на плоскость BB_1C_1:

$$S_{BM_1C_1N} = \frac{1}{2} \cdot S_{BB_1C_1C} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12.$$

Подставив эти значения в формулу для площади проекции, найдем, что

$$\cos\varphi = \frac{12}{4\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34};\ \ \varphi = \arccos\frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

Решая задачу другим способом, можно получить ответ $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

Покажем, что эти два ответа эквивалентны. Поскольку φ — острый угол, его тангенс и косинус положительны.

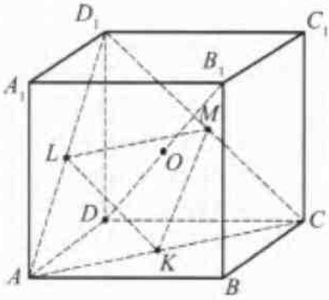
$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$, тогда $\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{34}}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{3}$.

---

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.

б) Найдите объем B_1KLM.



Докажем, что B_1KLM — правильная пирамида.

Построим сечение куба плоскостью KLM.

Заметим, что точки L, M, K — середины сторон правильного треугольника ACD_1. Отрезки LM, LK и MK — его средние линии. Они равны друг другу, и значит, ΔLMK — правильный.

$ABCD$ — квадрат, и поэтому $BD \perp AC$. По теореме о трех перпендикулярах, $B_1D \perp AC$.

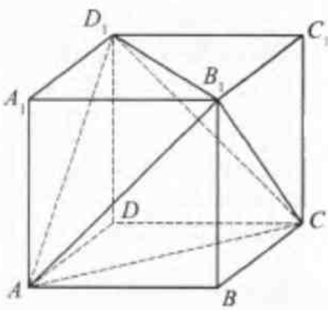
Аналогично, $A_1D \perp AD_1$ и по теореме о трех перпендикулярах, $B_1D \perp AD_1$ — поскольку A_1D является проекцией прямой B_1D на плоскость AA_1D_1.

Значит, $B_1D \perp (AD_1C)$.

Пусть прямая B_1D пересекает плоскость AD_1C в точке O. Поскольку $AB_1 = B_1D_1 = B_1C = 6\sqrt{2}$, точка B_1 равноудалена от точек A, D_1 и C. Значит, B_1 — вершина правильной пирамиды ACD_1B_1, B_1O — ее высота.

В правильном тетраэдре AD_1CB_1 отрезки B_1K, B_1L и B_1M — апофемы боковых граней. Грани B_1AC, B_1D_1C и B_1AD_1 — правильные треугольники, $B_1K = B_1L = B_1M$, значит B_1KLM — правильная пирамида. Площадь ее основания — треугольника KLM — в 4 раза меньше площади треугольника ACD_1. Значит, ее объем в 4 раза меньше, чем объем пирамиды ACD_1B_1.

Найдем объем пирамиды ACD_1B_1 как разность объемов куба и четырех пирамид с вершинами в точках B, C_1, A_1 и D. Похожая задача была в первой части ЕГЭ по математике.



$$V_{ACD_1B_1} = V_{\text{куба}} - V_{ABCB_1} - V_{D_1C_1CB_1} - V_{D_1ACD} = V_{B_1AA_1D_1} =$$

$$= V_{\text{куба}} - 4\cdot\frac{1}{6}V_{\text{куба}} = \frac{1}{3}V_{\text{куба}} = \frac{6^3}{3} = \frac{216}{3}.$$

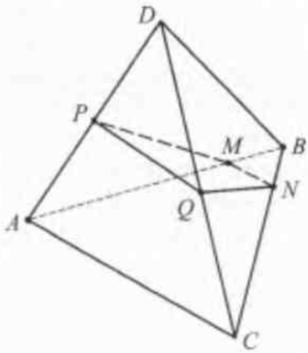
$$V_{B_1KLM} = \frac{1}{4}V_{AD_1CB_1} = \frac{216}{12} = 18.$$

---

7. На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, $AM : MB = CN : NB = 3 : 1$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.



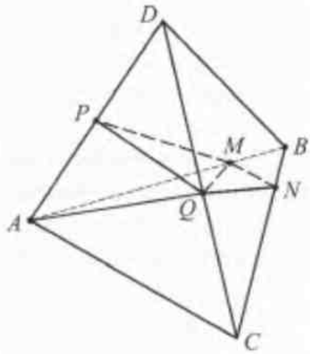
а) Рассмотрим треугольники MBN и ABC.

$\Delta MBN \sim \Delta ABC$ (по углу и двум сторонам), значит, $MN \parallel AC$.

PQ — средняя линия ΔADC, значит, $PQ \parallel AC$.

$\left.\begin{matrix} MN \parallel AC \\ PQ \parallel AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \parallel PQ$. Через параллельные прямые MN и PQ проходит единственная плоскость, в которой лежат точки M, N, P и Q.

б) Найдем, в каком отношении плоскость MNP делит объем пирамиды.



Как назвать многогранники $AMNCPQ$ и $PQNMBD$? Они не являются ни призмами, ни пирамидами. Не будем ломать голову над их названиями — лучше разобьем многогранник $AMNCPQ$ на пирамиды $ACNMQ$ и $AQMP$.

Объем четырехугольной пирамиды $ACNMQ$ найти легко: ее высота в 2 раза меньше высоты пирамиды $ABCD$, а площадь основания — разность площадей треугольников ABC и BMN.

$$S_{ACNM} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMN} = S_{\Delta ABC} - \frac{1}{16}S_{\Delta ABC} = \frac{15}{16}S_{\Delta ABC}.$$

Значит, $V_{AMNCPQ} = \dfrac{15}{32}V_{ABCD}$.

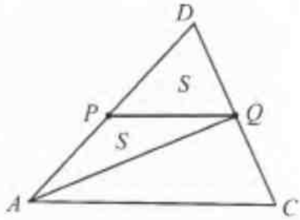
Осталось найти объем пирамиды $AMQP$.

$V_{AMQP} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta APQ} \cdot h$, где h — расстояние от точки M до плоскости ADC.

Заметим, что $h = \dfrac{3}{4}H$, где H — расстояние от точки B до плоскости ADC. Это легко доказать, опустив перпендикуляры из точек M и B на плоскость ADC и рассмотрев соответствующие подобные треугольники.

PQ — средняя линия треугольника ADC; $S_{\Delta PDQ} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta ADC}$.

Поскольку P — середина AD, $S_{\Delta APQ} = S_{\Delta PDQ} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta ADC}$.



$$V_{AMQP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S_{\Delta ADC}\cdot\frac{3}{4}H = \frac{3}{16}V_{ABCD};$$

$$V_{ACNMPQ} = \left(\frac{15}{32} + \frac{3}{16}\right)V_{ABCD} = \frac{21}{32}V_{ABCD}.$$

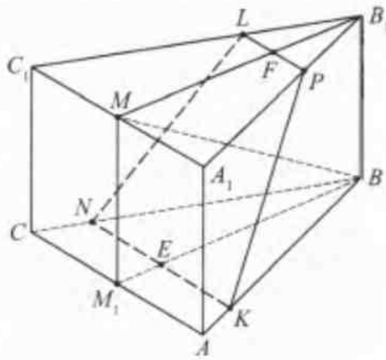
Отношение объемов частей, на которые плоскость $PMNQ$ делит пирамиду, равно $11 : 21$.

Расстояние от точки до плоскости

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 12, боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На ребрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причем $AK = 2$, $B_1L = 4$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L, точка M — середина ребра A_1C_1.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.



По условию, точки K и L лежат в плоскости γ. Кроме того, плоскость γ параллельна прямой AC.

Построим сечение призмы плоскостью γ.

В плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$ через точки K и L проведем прямые $KN \parallel AC$ и $LP \parallel A_1C_1$. Тогда KN и LP параллельны друг другу.

Трапеция $KNLP$ — искомое сечение.

Плоскость KNL параллельна прямой AC по признаку параллельности прямой и плоскости.

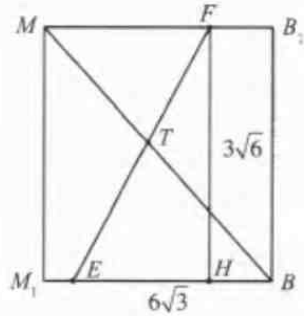
а) Докажем, что $\gamma \perp BM$.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Пусть M_1 — середина AC, тогда $MM_1 \parallel AA_1$, $MM_1 \perp AC$, $BM_1 \perp AC$ и, по теореме о трех перпендикулярах, $BM \perp AC$. Значит, $BM \perp KN$.

Пусть E и F — середины KN и LP соответственно.

Покажем, что $BM \perp EF$. Для этого построим сечение призмы плоскостью BMM_1.



$$AB = 12,\text{ тогда } BM_1 = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.\ AA_1 = BB_1 = 3\sqrt{6},$$

$$AK = \frac{1}{6}AB,\text{ тогда } M_1E = \frac{1}{6}M_1B,$$

$$B_1P = \frac{1}{3}A_1B_1,\text{ тогда } B_1F = \frac{1}{3}B_1M.$$

Пусть $BM \cap EF = T$; $FH \parallel BB_1$; $EH = BM_1 - \frac{1}{3}BM_1 - \frac{1}{6}BM_1 = \frac{1}{2}BM_1$.

Из ΔFEH: $\operatorname{tg}\angle FEH = \dfrac{FH}{EH} = \dfrac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{2}$;

Из ΔMBM_1: $\operatorname{tg}\angle MBM_1 = \dfrac{MM_1}{M_1B} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Для треугольника ETB: $\operatorname{tg}\angle TBE \cdot \operatorname{tg}\angle BET = \sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Значит, $\operatorname{tg}\angle TBE = \operatorname{ctg}\angle BET$ и $\angle TBE + \angle BET = 90°$. Тогда $\angle BTE = 90°$, $MB \perp EF$, что и требовалось доказать.

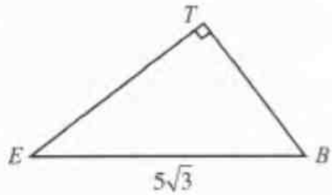
Мы получили, что $MB \perp EF$, $MB \perp KN$. Прямая BM перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости γ, поэтому $BM \perp \gamma$.

б) **Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.**

Найдем расстояние от точки B до плоскости γ. Согласно определению, это длина перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость γ.

Мы доказали, что $BM \perp \gamma$. T — точка пересечения прямой BM и плоскости γ. Значит, BT — искомое расстояние.

Рассмотрим ΔBET, где $\angle T = 90°$.



В нем $BE = \dfrac{5}{6} BM_1 = 5\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\angle TBE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ найдем $\cos\angle TBE = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

$BT = BE \cdot \cos\angle TBE = 5\sqrt{2}$.

Расстояние от точки до плоскости. Метод объемов

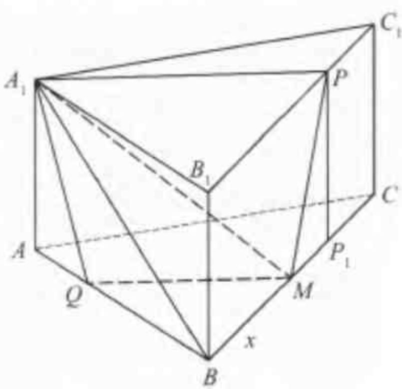
Метод объемов состоит в том, чтобы, записав двумя разными способами объем какой-либо треугольной пирамиды и приравняв эти выражения, найти нужную нам величину. Он отлично подходит для вычисления расстояния от точки до плоскости.

---

9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На ребрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причем $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC.

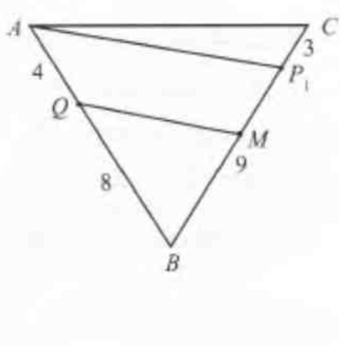
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.



Построим сечение призмы плоскостью A_1PQ.

Проведем $QM \parallel A_1P$ в плоскости ABC, точка M лежит на ребре BC.

Мы пользуемся здесь тем, что линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны. Трапеция $QMPA_1$ — искомое сечение.



а) Покажем, что M — середина BC.

Пусть P_1 — проекция точки P на плоскость ABC, $P_1C = 3$. Тогда $AP_1 \parallel A_1P$.

Пусть $BM = x$. $\Delta QBM \sim \Delta ABP_1$ (по двум углам);

$\dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{BM}{BP_1}$; $\dfrac{8}{12} = \dfrac{x}{9}$.

Отсюда $x = 6$ и M — середина BC.

б) Найдем расстояние от точки B до плоскости A_1PQ, пользуясь методом объемов. Выразим двумя способами объем треугольной пирамиды A_1QMB.

$V_{A_1QMB} = \frac{1}{3} S_{\Delta QMB} \cdot h_1 = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1QM} \cdot h_2$, где h_1 — расстояние от точки A_1 до плоскости QMB, т. е. до плоскости основания призмы. Оно равно высоте призмы. $h_1 = 2$.

h_2 — искомое расстояние от точки B до плоскости A_1QM.

$S_{\Delta QMB} = \frac{1}{2} \cdot BQ \cdot BM \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$

Из ΔQMB по теореме косинусов: $QM^2 = BQ^2 + BM^2 - 2BQ \cdot BM \cdot \cos 60^\circ$;

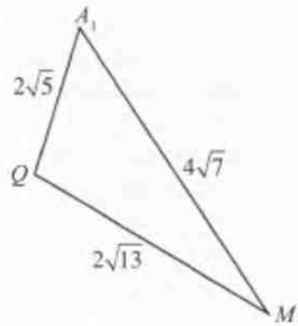
$QM^2 = 64 + 36 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 100 - 48 = 52$; $QM = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$

Из AA_1Q: $A_1Q = \sqrt{AQ^2 + AA_1^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}.$

Точка M — середина BC, $AM = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$

Из прямоугольного треугольника A_1AM найдем $A_1M = 4\sqrt{7}$.

Рассмотрим треугольник A_1QM, в котором мы знаем все стороны.



По теореме косинусов:

$A_1Q^2 = A_1M^2 + QM^2 - 2QM \cdot A_1M \cdot \cos \angle A_1MQ,$

$20 = 112 + 52 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \angle A_1MQ$; $\cos \angle A_1MQ = \frac{9}{\sqrt{91}}.$

Тогда $\sin \angle A_1MQ = \sqrt{\frac{10}{91}}.$

Объем пирамиды A_1QBM: $V_{A_1QBM} = \frac{1}{3} S_{\Delta QBM} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} S_{A_1QM} \cdot h_2.$

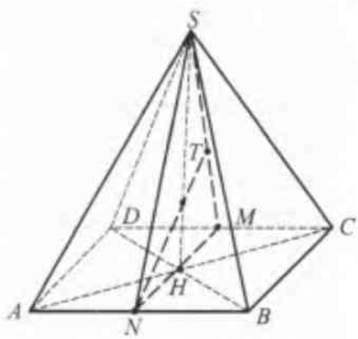
Отсюда $h_2 = \frac{S_{\Delta QBM} \cdot AA_1}{S_{A_1QM}} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 2}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}.$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, а высота SH пирамиды равна $\sqrt{3}$. Точки M и N — середины ребер CD и AB соответственно, NT — перпендикуляр из точки N на плоскость SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой SM.

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

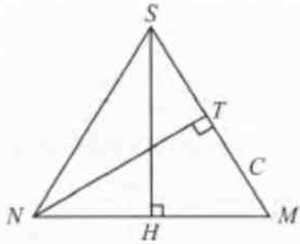


а) Докажем, что точка T — середина отрезка SM.

Рассмотрим сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью SMN.

В треугольнике SMN проведем высоту NT.

Заметим, что $MN \perp DC$, $SM \perp DC$, и значит, $(SMN) \perp DC$.



Мы воспользовались признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Тогда $NT \perp DC$.

Действительно, если прямая DC перпендикулярна плоскости SMN, то она, по определению, перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости SMN. В том числе и прямой NT.

Кроме того, $NT \perp SM$ по построению. Мы получили, что $NT \perp (SDC)$.

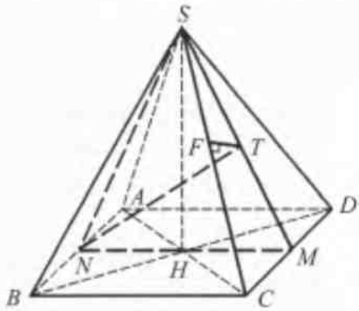
Высота пирамиды $SH = \sqrt{3}$, а боковое ребро $SA = \sqrt{5}$. Из треугольника SAH найдем $AH = \sqrt{2}$, и тогда $AC = 2\sqrt{2}$, $AB = AD = MN = 2$.

SN — апофема боковой грани пирамиды. Из треугольника SNA найдем $SN = 2$, и тогда треугольник SNM — правильный, NT — его высота и медиана, T — середина SM.

б) Найдем расстояние между NT и SC.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

$NT \perp (SDC)$, и значит, $NT \perp SC$.



Опустим из точки T в плоскости SDC перпендикуляр TF на ребро SC. Обратите внимание — сделан новый чертеж, в другом ракурсе.

Получим, что $TF \perp SC$ по построению, $TF \perp NT$, поскольку $TF \in (SDC)$, $(SDC) \perp NT$.

Треугольники STF и SCM подобны (по двум углам),

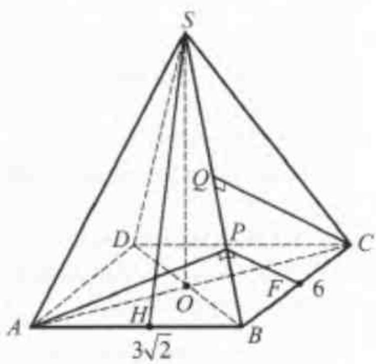
$$\frac{TF}{CM} = \frac{ST}{SC};\ TF = CM \cdot \frac{ST}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

---

11. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Высота пирамиды падает в центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

а) Докажите, что точка P — середина BQ.

б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если $SD = 9$.



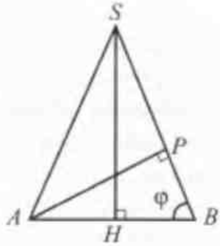
а) Покажем, что P — середина BQ.

Поскольку $ABCD$ — прямоугольник, его диагонали равны, $AC = BD$. Точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, $AO = OC = OB = OD$, тогда $SA = SB = SC = SD$. Наша пирамида не является правильной, но все ее боковые ребра равны.

Значит, треугольники ASB и BSC — равнобедренные.

Пусть b — боковое ребро пирамиды.

Заметим, что $\Delta APB \sim \Delta SHB$, где SH — апофема боковой грани.



$\angle PAB = \angle HSB$; $\sin\angle PAB = \sin\angle HSB$; $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{AB}{2\cdot b}$

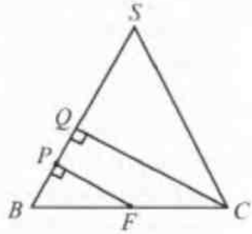
Тогда $PB = \dfrac{AB^2}{2\cdot b} = \dfrac{18}{2b}$.

Аналогично, рассмотрев треугольник SBC, получим,что

$BQ = \dfrac{BC^2}{2\cdot b} = \dfrac{36}{2b}$.

Тогда $BQ = 2PB$, точка P — середина BQ.

б) Найдем угол между плоскостями SBA и SBC, если $SD = b = 9$.



AP и CQ — перпендикуляры к прямой SB, проведенные в плоскостях SAB и SBC, точка P — середина BQ.

Пусть F — середина BC, тогда PF — средняя линия треугольника BQC, $PF \parallel QC$, $PF \perp SB$.

Угол APF найдем из треугольника APF.

Из ΔABF: $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{18+9} = 3\sqrt{3}$.

Если $SD = b = 9$, $PB = 1$, то $AP = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{17}$.

$BQ = 2$. Тогда $QC = \sqrt{BC^2 - BQ^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

$PF = \dfrac{1}{2}QC = 2\sqrt{2}$.

В треугольнике APF, по теореме косинусов,

$AF^2 = AP^2 + PF^2 - 2AP\cdot PF\cdot\cos\angle APF$;

$27 = 17 + 8 - 2\cdot\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\angle APF$;

$\cos\angle APF = -\dfrac{1}{2\sqrt{34}}$.

Поскольку угол между плоскостями — это меньший из углов, ими образуемых, угол φ между плоскостями ASB и BSC — это угол, смежный с углом APF.

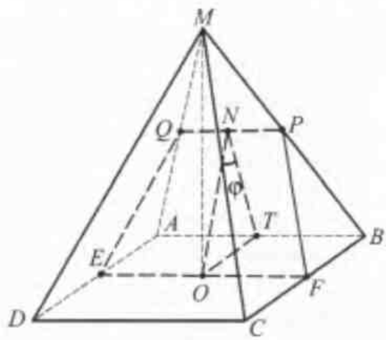
$\cos\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{34}} = \dfrac{\sqrt{34}}{68}$; $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{34}}{68}$.

---

12. Ребро основания правильной пирамиды $MABCD$ равно 10.

а) Постройте сечение, проходящее через центр основания пирамиды параллельно прямым AB и MC.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в это сечение, и угол между плоскостью сечения и гранью ABM.



Пусть O — центр основания пирамиды.

а) Построим сечение, проходящее через точку O параллельно прямым AB и MC.

Проведем $EF \parallel AB$, $O \in EF$; тогда F — середина BC, E — середина AD.

Пусть P — середина MB, тогда FP — средняя линия треугольника BMC, $FP \parallel MC$.

Пусть точка Q — середина AM. Проведем в плоскости AMB отрезок $PQ \parallel AB$.

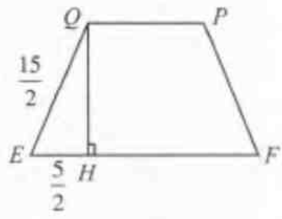
Трапеция $EFPQ$ — искомое сечение.

Почему мы провели $PQ \parallel AB$?

Вспомним теорему:

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой p. Плоскость γ параллельна прямой p. Тогда она пересекает плоскости α и β по прямым, параллельным p.

Плоскости PEF и MAB пересекают нижнюю грань ABC по параллельным прямым EF и AB. Значит, линия пересечения плоскостей PEF и MAB параллельна прямым EF и AB.



б) Найдем радиус окружности, вписанной в это сечение, и угол между плоскостью сечения и гранью ABM.

В трапецию $EFPQ$ можно вписать окружность, значит, $EF + QP = 2QE$ — по свойству четырехугольника, описанного вокруг окружности.

Тогда $QE = PF = \dfrac{10+5}{2} = \dfrac{15}{2}$.

Высоту трапеции $EFPQ$ найдем из прямоугольного треугольника QEH, где QH — высота трапеции.

$$QH = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2} = 2R;\ R = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

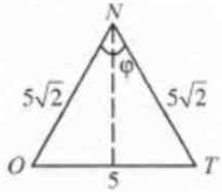
Найдем угол между плоскостью сечения и гранью ABM.

Пусть T — середина AB, N — середина PQ. Поскольку ON и TN — перпендикуляры к PQ, $\angle ONT$ — искомый.

$OT = 5$; $ON = 2R = 5\sqrt{2}$; NT — половина апофемы грани ABM.

Заметим, что $MC = 2PF = 15$.

Из треугольника AMT: $MT = \sqrt{15^2 - 5^2} = 10\sqrt{2}$; $NT = \dfrac{1}{2}MT = 5\sqrt{2}$.



Треугольник ONT — равнобедренный.

По теореме косинусов:

$$OT^2 = ON^2 + NT^2 - 2ON \cdot TN \cdot \cos\varphi;\ 25 = 100 - 100 \cdot \cos\varphi;$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{4};\ \varphi = \arccos\frac{3}{4}.$$

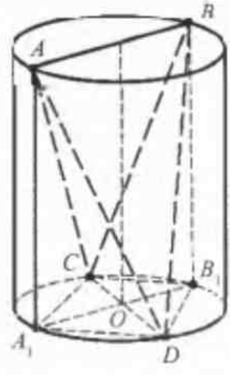
Тела вращения

---

13. Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причем отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.

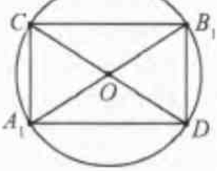
а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся ребра попарно равны.

б) Найдите объем этого тетраэдра, если $AC = 6$, $AD = 8$, а радиус цилиндра равен 3.



Докажем, что $AC = BD$ и $BC = AD$.

Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на нижнее основание цилиндра. Тогда $\angle CA_1D = \angle A_1DB_1 = \angle DB_1C = \angle B_1CA_1 = 90°$, поскольку все эти углы опираются на диаметр окружности основания. Значит, A_1CB_1D — прямоугольник, $A_1D = B_1C$.

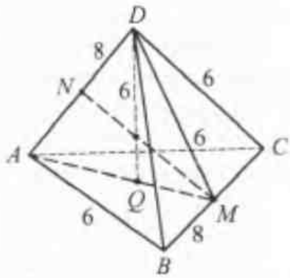


Прямоугольные треугольники AA_1D и BB_1C равны по двум катетам. Поэтому их гипотенузы равны, то есть $AD = BC$. Аналогично, $BD = AC$.

б) Найдем объем тетраэдра $ABCD$.

Если $R = 3$ — радиус цилиндра, то $A_1B_1 = CD = AB = 6$.

Заметим, что все грани тетраэдра — равнобедренные треугольники со сторонами 6, 6 и 8.



Пусть M — середина BC, тогда $AM \perp BC$ и $DM \perp BC$, так как треугольники ABC и DBC — равнобедренные.

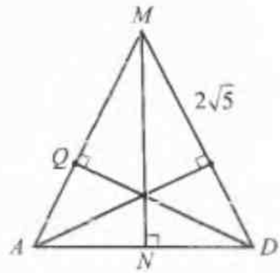
В плоскости ADM проведем $DQ \perp AM$. Плоскость ADM перпендикулярна BC и, значит, лежащая в ней прямая DQ также перпендикулярна BC. Получим, что DQ — перпендикуляр к плоскости ABC, то есть точка Q — проекция вершины D на плоскость ABC.

По формуле объема пирамиды, $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$.

По формуле Герона: $S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)}$, где p — полупериметр треугольника ABC. Получим, что $S_{\Delta ABC} = \sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$.

Из прямоугольного треугольника ABM:

$AM = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5} = DM$, так как $\Delta ABC = \Delta DBC$.



Треугольник ADM — равнобедренный, $AD = 8$, N — середина AD.

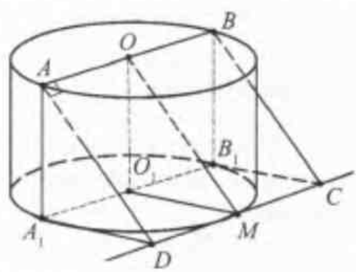
$AM = MD = 2\sqrt{5}$, тогда $S_{\Delta ADM} = \frac{1}{2} AM \cdot DQ = \frac{1}{2} AD \cdot MN$.

$MN = \sqrt{MD^2 - ND^2} = \sqrt{20 - 16} = 2$; $2\sqrt{5} \cdot DQ = 8 \cdot 2$.

$DQ = \frac{8\sqrt{5}}{5}$; $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{64}{3}$.

---

14. Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.



а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

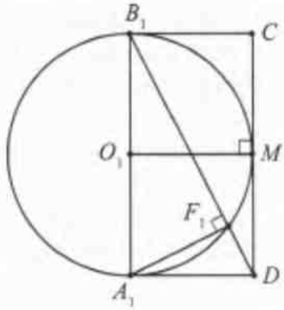
Главное в этой задаче — хороший рисунок.

а) Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на нижнее основание цилиндра. Покажем, что угол между плоскостями ABC и A_1B_1C равен 60°.

Пусть M — точка касания окружности нижнего основания цилиндра и прямой CD.

$A_1B_1 \parallel CD$, точка M — середина CD. Очевидно, $O_1M \perp CD$.

Обозначим $O_1M = r$; $r = \frac{1}{2} A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$.



Тогда $OM = AD = 2r$.

В треугольнике OO_1M гипотенуза OM в 2 раза больше катета O_1M. Значит, $\angle O_1OM = 30°$, $\angle OMO_1 = 60°$. Угол $\angle OMO_1$ — это угол между плоскостями ABC и A_1B_1C.

б) Пусть длина образующей цилиндра $AA_1 = \sqrt{6}$, F — точка пересечения отрезка BD с поверхностью цилиндра, F_1 — проекция точки F на плоскость A_1B_1C.

В пункте (а) мы нашли, что $OM = 2r$. Тогда $OO_1 = AA_1 = r\sqrt{3}$ — образующая цилиндра.

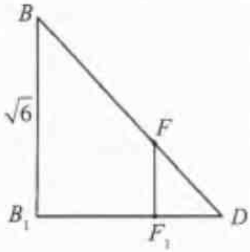
Поскольку $AA_1 = \sqrt{6}$, найдем $r = \sqrt{2}$.

Теперь нам известны стороны квадрата. $AD = BC = AB = 2\sqrt{2}$.

Диагональ квадрата $ABCD$ в $\sqrt{2}$ раз больше его стороны, поэтому $BD = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$.

Из ΔA_1B_1D: $B_1D = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = r\sqrt{5} = \sqrt{10}$; $\cos\angle A_1B_1D = \dfrac{2r}{r\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

$\angle A_1F_1B_1 = 90°$ (опирается на диаметр A_1B_1), $B_1F_1 = A_1B_1\cdot\cos\angle A_1B_1D = 2r\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4r}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.



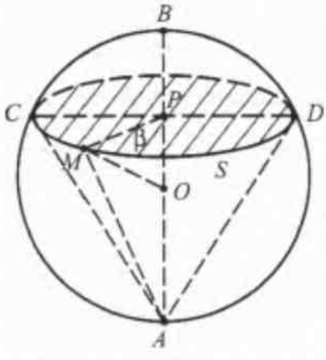
Тогда $F_1D = B_1D - B_1F_1 = \sqrt{10} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$;

$\Delta BB_1D \sim \Delta FF_1D$:

$\dfrac{B_1D}{F_1D} = \dfrac{BD}{FD}$; $FD = \dfrac{F_1D\cdot BD}{B_1D} = \dfrac{\sqrt{10}\cdot 4}{5\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{4}{5}$;

$BF = BD - FD = 4 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{5}$.

BF — это часть отрезка BD, которая находится внутри цилиндра. Она равна $\dfrac{16}{5}$.



15. Точка P лежит на диаметре AB сферы. При этом $AP : PB = 3 : 1$. Через прямую AB проведена плоскость α, а через точку P — плоскость β, перпендикулярная AB. Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы этими плоскостями, S — окружность пересечения сферы с плоскостью β, M — точка, лежащая на окружности S.

а) Докажите, что $AM = CD$.

б) Найдите объем пирамиды с вершиной M и основанием $ACBD$, если диаметр сферы равен 12, а M — наиболее удаленная от плоскости β точка окружности S.

Поскольку диаметр шара, которым является отрезок AB, лежит в плоскости α — центр шара точка O также лежит в плоскости α.

Пусть P — точка пересечения отрезков AB и CD. Тогда $P \in \alpha$, $P \in \beta$.

CD — диаметр окружности S, $\alpha \cap \beta = CD$.

Пусть α — плоскость чертежа.

Вспомним признак перпендикулярности плоскостей.

Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны.

В нашем случае $\beta \perp AB$ и, значит, $\beta \perp \alpha$.

а) Точка M лежит на окружности S. Покажем, что $AM = CD$.

Треугольники APM и APC равны по двум катетам, значит, $AM = AC$.

Поскольку точка P делит отрезок AB в отношении 3 : 1, а точка O — середина AB, точка P является серединой OB.

$OP = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OC$, так как OB и OC — радиусы шара.

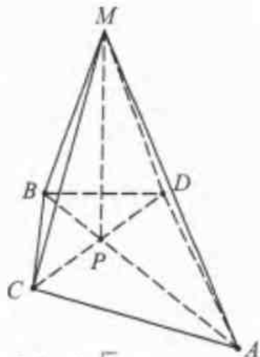
В треугольнике OPC катет OP вдвое меньше гипотенузы OC, поэтому $\angle PCO = 30°$, $\angle POC = 60°$. Тогда $\angle COD = 120° = \angle COA = \angle AOD$.

Равные дуги стягиваются равными хордами, $AC = CD = AM$ и ΔACD — правильный.

б) Пусть M — наиболее удаленная от плоскости α точка окружности S.

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Наибольшее возможное расстояние от точки M до плоскости α будет в случае, если проекцией точки M на плоскость α окажется точка P. Тогда $PM \perp \alpha$ и длина отрезка PM равна радиусу окружности S.



Найдем V_{ABCDM} — объем пирамиды с основанием $ACBD$ и высотой PM.

Поскольку $AB \perp CD$, площадь четырехугольника $ACBD$ найдем как половину произведения его диагоналей.

$$S_{ACBD} = \frac{1}{2}AB \cdot CD.$$

$$AP = \frac{3}{4}AB = 9,\ BP = \frac{1}{4}AB = 3.$$

По теореме о пересекающихся хордах, $CP \cdot PD = AP \cdot BP$,

отсюда $CP = PD = 3\sqrt{3}$, $CD = 6\sqrt{3}$, $S_{ACBD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$; $PM = PC = 3\sqrt{3}$ — как радиус окружности S.

Тогда $V = \frac{1}{3}S_{ACBD} \cdot PM = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 108.$

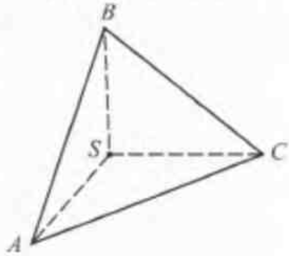
И заключительная задача — с сайта *http://alexlarin.net*. Я рекомендую вам этот сайт, на котором часто нахожу интересные, иногда нестандартные задачи.

---

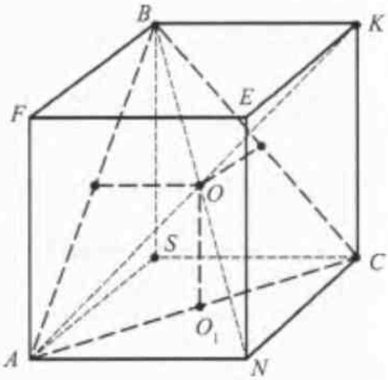
16. Все плоские углы при вершине S пирамиды $SABC$ прямые.

а) Докажите, что точка S, точка пересечения медиан треугольника ABC и точка, равноудаленная от вершин пирамиды (центр описанной сферы), лежат на одной прямой.

б) Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, если известно, что $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$.

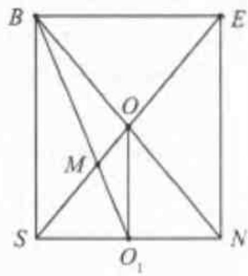


а) Докажем, что S, M, O лежат на одной прямой, где M — точка пересечения медиан ΔABC, O — центр сферы, описанной вокруг пирамиды $SABC$.



Центр описанной сферы — это точка, равноудаленная от S, A, B и C. Она лежит на пересечении серединных перпендикуляров к ребрам пирамиды. Достроим пирамиду до прямоугольного параллелепипеда $ASCNFBKE$. Точка $O = AK \cap BN$ — точка пересечения диагоналей параллелепипеда.

Она равноудалена от всех его вершин, в том числе от A, B, C, S и является центром сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCS$; $O \in SE$, где SE — диагональ параллелепипеда. Проекциями точки O на грани пирамиды ASC, ASB и BSC будут середины ребер AC, AB и BC.



Рассмотрим сечение параллелепипеда плоскостью SBE. Пусть $SO \cap BO_1 = M$. Точка M — точка пересечения диагонали SE с плоскостью ABC.

Поскольку O — середина BN, O_1 — середина SN, M — точка пересечения меридиан ΔBSN;

$SM : MO = 2 : 1$ (по свойству медиан),

$BM : MO = 2 : 1$.

При этом BO_1 — медиана ΔABC, и тогда M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

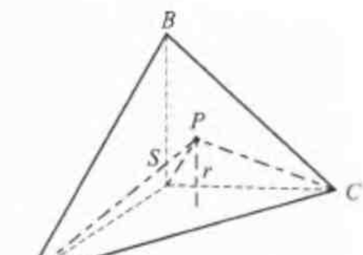
Мы доказали, что $M \in SO$, т. е. точки S, M и O лежат на одной прямой.

б) Пусть $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$.

Найдем r — радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Расстояние от центра вписанной сферы до любой из граней одинаково и равно r.

Тогда объем пирамиды $SABC$ складывается из объемов четырех пирамид с вершиной P: $PABC$, $PABS$, $PBCS$ и $PACS$, причем у этих пирамид одинаковые высоты, равные радиусу r.



$$V_{ABCS} = V_{PABC} + V_{PABS} + V_{PBCS} + V_{PACS};$$

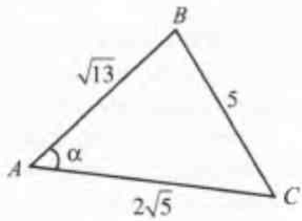
$$\frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SC = \frac{1}{3} \cdot r\left(S_{\Delta ABS} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCS} + S_{\Delta ACS}\right).$$

Найдем все необходимые отрезки и площади перечисленных треугольников:

$$AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$



Из треугольника ABC по теореме косинусов,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$$

$$25 = 13 + 20 - 4\sqrt{65}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{65}}; \text{ тогда } \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{65}} = \sqrt{\frac{61}{65}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}} = \sqrt{61};$$

$$S_{\Delta ABS} = 3,\ S_{\Delta BCS} = 6,\ S_{\Delta ASC} = 4;$$

$$12 = r\left(3 + 6 + 4 + \sqrt{61}\right);$$

$$r = \frac{12}{13 + \sqrt{61}}.$$

Глава 4
НЕРАВЕНСТВА: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ

Задача из второй части ЕГЭ, в которой надо решить неравенство, — своеобразная граница между «неплохо сдал ЕГЭ» — и «поступил в достойный вуз». Если эта задача дается легко, значит, вы хорошо освоили школьную математику. Тогда и задача с параметрами, и высшая математика вам доступны.

Вспомним для начала, что вообще можно делать с неравенствами и чего с ними делать нельзя.

При решении неравенств мы **можем**:

1. Умножать обе части неравенства на число или выражение, не равное нулю.

При умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

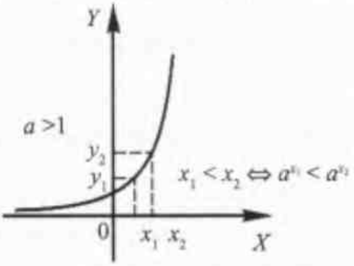
При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

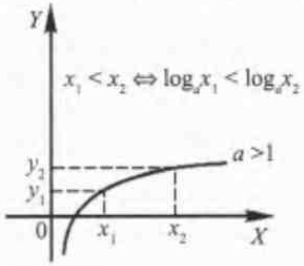
2. Можем возводить обе части неравенства в квадрат при условии, что они неотрицательны.

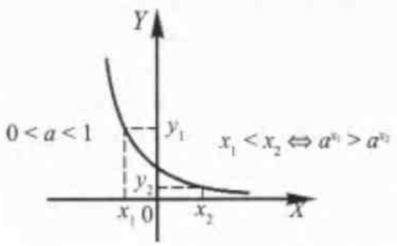
3. Имея дело с показательным или логарифмическим неравенством, мы можем «отбрасывать» основания или логарифмы. Если основание степени или логарифма больше единицы, знак неравенства будет тот же. Если основание степени или логарифма положительно и меньше единицы — знак неравенства меняется на противоположный.

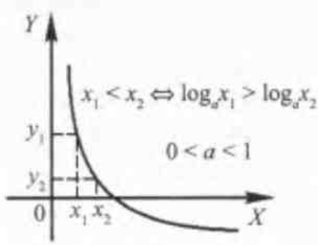
Конечно, мы не просто «отбрасываем» основания степеней или логарифмы. Мы пользуемся свойствами монотонности соответствующих функций. Если основание степени больше единицы, показательная функция монотонно возрастает. Если основание положительно и меньше единицы — показательная функция монотонно убывает. Аналогично ведет себя и логарифмическая функция.

Показательные неравенства | **Логарифмические неравенства**









4. При решении показательных или логарифмических неравенств применяется метод рационализации (замены множителя). О нем я расскажу подробно.

5. Общее правило. Если неравенство можно хоть как-то упростить — это необходимо сделать! Иначе его решение может занять восемь страниц и два часа времени.

Чего **нельзя** делать при решении неравенств? Вот 7 ловушек, в которые часто попадают абитуриенты.

1. Нельзя умножать (или делить) неравенство на выражение, знака которого мы не знаем.

Например, в неравенстве $x(3x-2) > x(x+1)$ нельзя поделить левую и правую часть на x. Правильный способ: перенести все в левую часть неравенства, разложить на множители и решить неравенство методом интервалов:

$x(3x-2) - x(x+1) > 0$

$x(2x-3) > 0.$

Получаем, что $x < 0$ или $x > \frac{3}{2}$. «Сократив» на x, который может быть отрицательным, мы не получили бы правильного ответа.

2. Извлекать из неравенства корень тоже нельзя. Такого действия просто нет.

Как, например, решить неравенство $x^2 > 100$?

Перенесем все в левую часть неравенства, чтобы в правой остался ноль.

$x^2 - 100 > 0$

Разложим левую часть на множители.

$(x-10)(x+10) > 0$

Решим неравенство, пользуясь свойствами квадратичной функции $y = x^2 - 100$, и запишем ответ: $x < -10$ или $x > 10$.

Запомним: ответы типа «$x > \pm 10$» абсурдны.

3. Как решать неравенство $x^2 > 0$? Это типичная ловушка для абитуриентов. Так и хочется сказать, что $x > 0$ (то есть извлечь корень из неравенства). Но этого делать нельзя. Выражение x^2 положительно при всех x, кроме нуля. Правильное решение неравенства: $x \neq 0$.

4. Возводить обе части неравенства в квадрат можно, только если они неотрицательны.

5. Помним о том, в каких случаях знак показательного или логарифмического неравенства меняется, а в каких остается тем же. «Отбрасывая» логарифмы, делаем это грамотно.

6. Если в неравенстве есть дроби, корни четной степени или логарифмы — там обязательно будет область допустимых значений.

7. Сложная тема для старшеклассников — задачи с модулем. Уравнениям и неравенствам с модулем посвящена целая глава в моей книге «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ».

При решении неравенств большое значение имеет правильное оформление. В этой главе приведены примеры грамотного оформления задач. Рекомендуется делать именно так: переходить от исходного неравенства к равносильному ему неравенству или системе.

Обратите внимание на приемы, позволяющие решать неравенства легко, быстро и без лишних вычислений.

Начнем с **дробно-рациональных неравенств**. Так называются неравенства, содержащие рациональные (или дробно-рациональные) выражения, зависящие от переменной.

1. Решите неравенство: $\dfrac{(5x-3)^2}{x-2} \ge \dfrac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$.

Заметим, что числитель дроби в правой части неравенства — полный квадрат. А знаменатель этой дроби разложим на множители.

Мы знаем, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

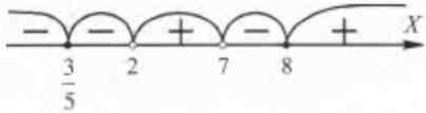
Тогда $14 - 9x + x^2 = (x - 2)(x - 7)$.

Вспомним также, что $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

Тогда $9 - 30x + 25x^2 = (5x - 3)^2$.

Приведем неравенство к виду $\dfrac{(5x-3)^2}{x-2}\left(1-\dfrac{1}{x-7}\right) \ge 0$.

Мы перенесли все в левую часть и вынесли общие множители за скобки. Далее, $\dfrac{(5x-3)^2(x-8)}{(x-2)(x-7)} \ge 0$.



Решаем неравенство методом интервалов. Отметим на числовой прямой точки $x = \dfrac{3}{5}, x = 2, x = 7$, $x = 8$, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль.

Точки $x = 2$ и $x = 7$ (нули знаменателя) — выколотые, поскольку в этих точках функция в левой части неравенства не определена (на ноль делить нельзя). Нули числителя $\dfrac{3}{5}$ и 8 — закрашены, так как неравенство нестрогое.

Эти точки разбивают ось X на 5 промежутков (интервалов).

Определим знак дробно-рациональной функции в левой части неравенства на каждом из этих промежутков. Мы помним, что **дробно-рациональная функция может менять знак только в тех точках, в которых она равна нулю или не существует.** Это значит, что на каждом из промежутков между точками, где числитель или знаменатель обращаются в нуль, знак выражения в левой части неравенства будет постоянным — либо «плюс», либо «минус».

И поэтому для определения знака функции на каждом таком промежутке мы берем любую точку, принадлежащую этому промежутку. Ту, которая нам удобна.

Возьмем, например, $x = 10$ и проверим знак выражения в левой части неравенства. Каждая из «скобок» положительна. Значит, при $x > 8$ левая часть имеет знак (+).

На интервале от 7 до 8 левая часть неравенства отрицательна — поскольку выражение $x - 8$ теперь отрицательно, а все остальные «скобки» положительны.

На интервале от 2 до 7 левая часть неравенства снова положительна, а на интервале от $\dfrac{3}{5}$ до 2 — отрицательна. А вот при переходе через точку $x = \dfrac{3}{5}$ смены знака не происходит, поскольку при переходе через точку $\dfrac{3}{5}$ соответствующий ей множитель $(5x - 3)^2$ не изменил знак.

Осталось записать ответ: $x \in \left\{\dfrac{3}{5}\right\} \cup (2;7) \cup [8;+\infty)$.

Обратите внимание на отдельную точку $x=\frac{3}{5}$. Действительно, $x=\frac{3}{5}$ — решение неравенства, поскольку при $x=\frac{3}{5}$ и левая, и правая части неравенства равны нулю.

---

2. Решите неравенство: $\frac{x^2+2x-4}{x+3}+\frac{x^2+5x+3}{x+5}\le 2x-1.$

Приводить обе части к одному знаменателю? Не хочется. Вот просто не хочется, и все, потому что выражение, которое мы получим, — третьей степени. Покажу простое и быстрое решение этого неравенства.

Выражение x^2+2x-4 представим как $x^2+3x-x-4=x^2+3x-(x+4)$, а дробь $\frac{x^2+5x+3}{x+5}$ представим в виде суммы двух дробей.

$$\frac{x^2+3x-(x+4)}{x+3}+\frac{x^2+5x}{x+5}+\frac{3}{x+5}\le 2x-1$$

$$\frac{x(x+3)}{x+3}-\frac{x+3}{x+3}-\frac{1}{x+3}+\frac{x(x+5)}{x+5}+\frac{3}{x+5}\le 2x-1$$

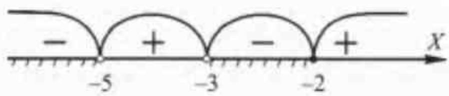
$$x-1-\frac{1}{x+3}+x+\frac{3}{x+5}\le 2x-1$$

$$\frac{3}{x+5}-\frac{1}{x+3}\le 0$$

$$\frac{3(x+3)-(x+5)}{(x+5)(x+3)}\le 0$$

$$\frac{2x+4}{(x+5)(x+3)}\le 0$$

$$\frac{x+2}{(x+5)(x+3)}\le 0$$



$x\in(-\infty;-5)\cup(-3;-2]$.

Ловкость рук? Хитрость ума? Нет, просто действия с дробями! Мы часто складываем дроби — так почему бы не представить дробь в виде нужной нам суммы двух дробей? Попробуйте, вам понравится!

---

3. Решите неравенство: $\frac{x^2+16x+39}{x^2+12x+27}\ge\frac{x+18}{x+9}-\frac{6}{x+8}.$

Применим тот же метод — разложение дроби на сумму дробей и выделение целой части. Этот метод пригодится вам и на первом курсе — когда будете брать интегралы от рациональных дробей.

$$\frac{x^2+12x+27+4x+12}{x^2+12x+27}\ge\frac{x+9+9}{x+9}-\frac{6}{x+8}$$

$$1+\frac{4(x+3)}{(x+9)(x+3)}\ge 1+\frac{9}{x+9}-\frac{6}{x+8}$$

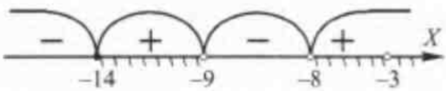
Сократим дробь $\frac{4(x+3)}{(x+3)}$ на $x+3$ при условии, что $x+3\neq 0$. Наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}\frac{4}{x+9}\geq\frac{9}{x+9}-\frac{6}{x+8}\\ x+3\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5}{x+9}-\frac{6}{x+8}\leq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5x+40-6x-54}{(x+9)(x+8)}\leq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{x+14}{(x+9)(x+8)}\geq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}$$



Решаем неравенство методом интервалов и записываем ответ:

$x\in[-14;-9)\cup(-8;-3)\cup(-3;+\infty)$.

Отличный метод, применяемый и в решении уравнений, и в решении неравенств, — замена переменной.

---

4. Решите неравенство: $\frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1}+\frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3}\geq 2$.

Сделаем замену $0,5x\sqrt{5}-2=t$. Тогда $0,5x\sqrt{5}-1=t+1$, а $0,5x\sqrt{5}-3=t-1$.

Получим:

$$\frac{2}{t+1}+\frac{t}{t-1}\geq 2$$

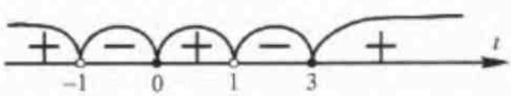
$$\frac{2t-2+t^2+t}{t^2-1}-2\geq 0$$

$$\frac{t^2+3t-2+2t^2+2}{t^2-1}\geq 0$$

$$\frac{3t-t^2}{t^2-1}\geq 0$$

$$\frac{t(t-3)}{(t-1)(t+1)}\leq 0$$

Решим неравенство относительно t методом интервалов.



Получим:

$$\left[\begin{array}{l} -1 < t \le 0 \\ 1 < t \le 3 \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} -1 < 0{,}5x\sqrt{5} - 2 \le 0 \\ 1 < 0{,}5x\sqrt{5} - 2 \le 3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x \le \dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{6}{\sqrt{5}} < x \le \dfrac{10}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right] \cup \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}; 2\sqrt{5}\right]$.

Еще задача на неочевидную замену переменной:

---

5. Решите неравенство: $(6x + 7)^2 (3x + 4)(x + 1) \le 6$.

Четвертая степень… А если вот так?

$(6x + 7)^2 (3x + 4)(x + 1) \le 6$

$(36x^2 + 84x + 49)(3x^2 + 7x + 4) \le 6$

$(12(3x^2 + 7x + 4) + 1)(3x^2 + 7x + 4) \le 6$

Сделаем замену: $3x^2 + 7x + 4 = z$.

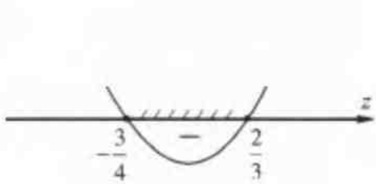
Получим неравенство:

$(12z + 1) \cdot z - 6 \le 0$

$12z^2 + z - 6 \le 0$

$$12\left(z - \frac{2}{3}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right) \le 0$$

Возвращаться к переменной x еще рано! Сначала решим неравенство относительно z.



$$-\frac{3}{4} \le z \le \frac{2}{3}$$

И вот теперь вернемся к переменой x: $-\dfrac{3}{4} \le 3x^2 + 7x + 4 \le \dfrac{2}{3}$.

Решая это двойное неравенство, получим $x \in \left[-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3}\right]$.

6. Еще неравенство. Обратите внимание на логику решения! Я очень рекомендую вам оформлять свое решение именно так.

$$\left(\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{x-4}{3-x}\right)\sqrt{6x-x^2}\le 0.$$

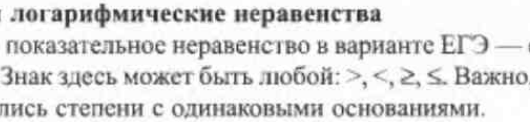
Выражение под корнем должно быть неотрицательно. Это область допустимых значений неравенства.

Произведение двух множителей меньше нуля тогда и только тогда, когда множители имеют разные знаки. Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

Корень квадратный не может быть отрицательным. Он может быть только положителен или равен нулю. И если он равен нулю — знак первого множителя (в скобках) уже не важен. И значит, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 6x-x^2\ge 0 \text{ (ОДЗ)} \\ \left[\begin{array}{l} 6x-x^2=0 \\ \dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{x-4}{3-x}\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6-x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{1}{(x-3)(x-4)}-\dfrac{x-4}{x-3}\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{1-(x-4)^2}{(x-3)(x-4)}\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{(1-x+4)(1+x-4)}{(x-3)(x-4)}\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{(5-x)(x-3)}{(x-3)(x-4)}\le 0 \end{array}\right. \end{cases}$$



Ответ: $[0;3)\cup(3;4)\cup[5;6]$.

Показательные и логарифмические неравенства

Каким бы ни было показательное неравенство в варианте ЕГЭ — его надо упростить до неравенства $a^{x_1}<a^{x_2}$. Знак здесь может быть любой: >, <, ≥, ≤. Важно, чтобы слева и справа в неравенстве находились степени с одинаковыми основаниями.

И после этого убираем основания! При этом, если основание степени $a>1$, знак неравенства остается тем же. Если основание такое, что $0<a<1$, знак неравенства меняется.

Точно так же с логарифмическими неравенствами. Каким бы ни было логарифмическое неравенство, мы приводим его к виду $\log_a x_1<\log_a x_2$.

Знак неравенства тоже может быть любой: >, <, ≥, ≤. Главное, чтобы слева и справа в неравенстве находились логарифмы по одному и тому же основанию. **Важно:** решая логарифмические неравенства, помним про область допустимых значений.

И просто «отбрасываем» логарифмы! При этом, если основание логарифма больше единицы, знак неравенства остается тем же. Если основание больше нуля и меньше единицы, знак неравенства меняется.

7. Решите неравенство: $\dfrac{2}{7^x-7} \geq \dfrac{5}{7^x-4}$.

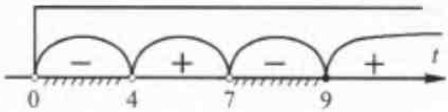
Сделаем замену переменной: $7^x = t$, $t > 0$.

$$\frac{2}{t-7}-\frac{5}{t-4} \geq 0$$

$$\frac{2t-8-5t+35}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{27-3t}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{t-9}{(t-7)(t-4)} \leq 0$$



Обратите внимание, что возвращаться к переменной x еще рано. Сначала решим неравенство с переменой t методом интервалов.

Поскольку $t > 0$, получим: $\left[\begin{array}{l} 0 < t < 4, \\ 7 < t \leq 9. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 7^x < 4, \\ 7 < 7^x \leq 9; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 7^x < 7^{\log_7 4}, \\ 7 < 7^x \leq 7^{\log_7 9}. \end{array}\right.$

Обратите внимание, как мы представили 4 и 9 в виде степеней с основанием 7. Мы применили основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

$$\left[\begin{array}{l} x < \log_7 4, \\ 1 < x \leq \log_7 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_7 4) \cup (1; \log_7 9]$.

8. Решите неравенство: $9^x - 31 \cdot 3^x + 108 \leq 0$.

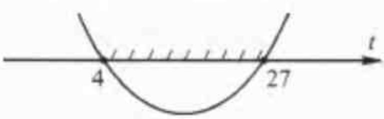
Это простая задача. Я привожу ее только затем, чтобы вы увидели правильное оформление решения показательного неравенства. Все вспомогательные вычисления я делаю на полях.

Сделаем замену: $3^x = t$, $t > 0$.

Получим квадратное неравенство:

$t^2 - 31t + 108 \leq 0$.

$4 \leq t \leq 27$



Вернемся к переменной x:

$3^{\log_3 4} \leq 3^x \leq 3^3$

$\log_3 4 \leq x \leq 3$.

Ответ: $x \in [\log_3 4; 3]$.

$t^2 - 31t + 108 = 0$

$D = 31^2 - 4 \cdot 108 = 961 - 432 = 529$

$\sqrt{D} = 23$

$t_{1,2} = \dfrac{31 \pm 23}{2}$

$t_1 = 27,\ t_2 = 4.$

$t^2 - 31t + 108 = (t-27)(t-4)$

$(t-27)(t-4) \leq 0$

9. Еще простая задача. Пользуемся тем же приемом, что и при решении алгебраических неравенств, — разложением дроби на сумму дробей.

$$2^{\frac{x}{x+1}}-2^{\frac{5x+3}{x+1}}+8<2^{\frac{2x}{x+1}}$$

$$2^{\frac{x}{x+1}}-2^{\frac{3x+3+2x}{x+1}}+8-2^{\frac{2x}{x+1}}<0$$

$$2^{\frac{x}{x+1}}-2^{3+\frac{2x}{x+1}}+8-2^{\frac{2x}{x+1}}<0$$

$$2^{\frac{x}{x+1}}-8\cdot 2^{\frac{2x}{x+1}}-2^{\frac{2x}{x+1}}+8<0$$

$$2^{\frac{x}{x+1}}-9\cdot 2^{\frac{2x}{x+1}}+8<0$$

Сделаем замену $2^{\frac{x}{x+1}}=t,\ t>0.$

$t-9t^2+8<0$

$9t^2-t-8>0$

$9(t-1)\left(t+\dfrac{8}{9}\right)>0$

Поскольку $t>0$, сократим на $t+\dfrac{8}{9}>0.$

Получим:

$t-1>0$

$t>1$

$2^{\frac{x}{x+1}}>1$

$\dfrac{x}{x+1}>0$

$9t^2-t-8=0$

$D=1+4\cdot 72=289$

$\sqrt{D}=17$

$t=\dfrac{1\pm 17}{18}$

$t_1=1,\ t_2=-\dfrac{8}{9}$

$9t^2-t-8=9(t-1)\left(t+\dfrac{8}{9}\right)$

$9(t-1)\left(t+\dfrac{8}{9}\right)>0$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty).$

Обратите внимание — все вспомогательные вычисления я делаю на полях. Сначала решаем неравенство относительно переменной t и только после этого возвращаемся к исходной переменной x.

Теперь **логарифмические неравенства**. Помним про область допустимых значений!

10. Решите неравенство: $\log_2^2 x+5\log_2 x+6>0.$

ОДЗ: $x>0$.

Замена: $\log_2 x=t$.

$t^2+5t+6>0$

$(t+2)(t+3)>0$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x < -3 \\ \log_2 x > -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x < \log_2 \frac{1}{8} \\ \log_2 x > \log_2 \frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{8} \\ x > \frac{1}{4}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Еще раз: сначала мы решаем неравенство относительно t и только потом возвращаемся к переменной x.

Для решения неравенств часто применяется **метод замены множителя**. По-другому он называется **метод рационализации неравенства**.

Суть метода в том, чтобы от неравенства, содержащего в качестве множителей сложные показательные или логарифмические выражения, перейти к равносильному ему более простому рациональному неравенству. При этом сложный множитель заменяется на более простой алгебраический согласно **волшебной таблице**:

Методы замены множителя	
Сложный множитель	На что заменить
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - h^g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - 1$	$(h-1)\cdot f$
$f^h - g^h$	$(f-g)\cdot h$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$f^2 - g^2$
f, g — функции от x, h — функция или число	

Здесь f, g, h — функции, причем такие, что соответствующие выражения определены.

Обратите внимание, что мы говорим о замене именно **множителя** (а не слагаемого, например), причем правая часть неравенства обязательно должна быть равна нулю.

Посмотрим, как применять этот полезный метод.

---

11. Решите неравенство: $\dfrac{2\cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \le 3$.

$$\frac{2\cdot 3\cdot 3^{2x} - 6^x - 4\cdot 2^{2x} - 3\cdot 3^{2x} - 9 + 9}{3^{2x} - 3} \le 0$$

$$\frac{3\cdot 3^{2x} - 3^x\cdot 2^x - 4\cdot 2^{2x}}{3^{2x} - 3} \le 0$$

Числитель дроби в левой части — однородное выражение, где каждое слагаемое имеет степень $2x$. Поделим обе части неравенства на $2^{2x} > 0$.

Получим:

$$\frac{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-4}{3^{2x}-3}\le 0$$

$$\frac{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+1\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-\frac{4}{3}\right)}{3^{2x}-3}\le 0$$

$$3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-4=0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t;\ 3t^2-t-4=0$$

$$D=1+48=49,\ \sqrt{D}=7$$

$$t=\frac{1\pm 7}{6};\ t_1=-1;\ t_2=\frac{4}{3}$$

$$3t^2-t-4=3(t+1)\left(t-\frac{4}{3}\right)$$

Поделим обе части неравенства на $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+1>0$.

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-\frac{4}{3}}{3^{2x}-3}\le 0$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}}}{3^{2x}-3^{1}}\le 0$$

Применяя метод рационализации, множитель вида h^f-h^g заменяем на $(h-1)(f-g)$. Получим:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(x-\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}\right)}{(3-1)(2x-1)}\le 0$$

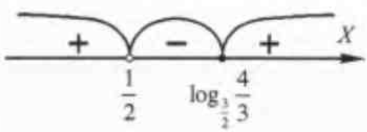
$$\frac{x-\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}}{x-\frac{1}{2}}\le 0$$

Остается решить неравенство методом интервалов. Но как сравнить $\frac{1}{2}$ и $\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}$?

Что больше? Давайте представим $\frac{1}{2}$ как логарифм с основанием $\frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{2}=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{4}{3}\vee\sqrt{\frac{3}{2}};\ \frac{16}{9}\vee\frac{3}{2};\ 32\vee 27;\ 32>27.$$



Значит, $\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}>\frac{1}{2}$.

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{2};\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}\right]$.

Посмотрим, как применяется метод замены множителя в логарифмических неравенствах.

12. $\log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2.$

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2\Leftrightarrow\begin{cases}3-x>0\\3-x\ne 1\\\dfrac{x+4}{(x-3)^2}>0\\\log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}+2\ge 0\end{cases}$$

Мы объединили в систему и область допустимых значений, и само неравенство. Применим формулу логарифма частного, учитывая, что $(a-b)^2=(b-a)^2$. Поскольку при $x\ne 3$ должно выполняться условие $x+4>0$, получим:

$$\begin{cases}x<3\\x\ne 2\\x+4>0\\\log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(3-x)^2+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<3\\x\ne 2\\x>-4\\\log_{3-x}(x+4)\ge 0\end{cases}$$

Обратите внимание, как мы применили формулу для логарифма степени. Строго говоря, $\log_a(b(x))^2=2\log_a|b(x)|$.

Поскольку $3-x>0$, $\log_{3-x}(3-x)^2=2\log_{3-x}|3-x|=2\log_{3-x}(3-x)=2.$

Согласно методу замены множителя, выражение $\log_{3-x}(x+4)$ заменим на $(3-x-1)(x+4-1)$.

Получим систему: $\begin{cases}x\ne 2\\-4<x<3\\(2-x)(x+3)\ge 0\end{cases}$.

Решить ее легко.

Ответ: $x\in[-3;2)$.

13. Решите неравенство: $\dfrac{\ln(3y^2-2y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)^5}\ge\dfrac{\log_{7^5}3}{\log_7 3}.$

Преобразуем правую часть неравенства по формулам перехода к другому основанию:

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

$\dfrac{\log_{7^5}3}{\log_7 3}=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 7^5}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\log_3 7}{\log_3 7}=\dfrac{1}{5}.$

Упростим знаменатель дроби в левой части неравенства:
$\ln(5y^2-6y+1)^5 = 5\cdot\ln(5y^2-6y+1)$.

Неравенство примет вид: $\dfrac{\ln(3y^2-2y+1)}{5\ln(5y^2-6y+1)} \ge \dfrac{1}{5}$. Умножим обе части неравенства на 5.

$$\frac{\ln(3y^2-2y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)} \ge 1.$$

$$\frac{\ln(3y^2-2y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)}-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(3y^2-2y+1)-\ln(5y^2-6y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2-2y+1>0 \\ 5y^2-6y+1>0 \\ 5y^2-6y+1\ne 1 \\ \dfrac{(e-1)(3y^2-2y+1-5y^2+6y-1)}{(e-1)(5y^2-6y)}\ge 0 \end{cases}$$

Мы записали ОДЗ и применили метод замены множителя.
Множитель вида $\log_h f$ заменяется на выражение $(h-1)(f-1)$.
Множитель вида $\log_h f - \log_h g$ заменяется на $(h-1)(f-g)$.
Получаем:

$$\begin{cases} \left(y-\dfrac{1}{5}\right)(y-1)>0 \\ y\ne 0,\ y\ne \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{-2y^2+4y}{5y^2-6y}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y-\dfrac{1}{5}\right)(y-1)>0 \\ y\ne 0,\ y\ne \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{y(y-2)}{y(5y-6)}\le 0 \end{cases}$$

1) $3y^2-2y+1=0$
$D=4-12<0$,
значит, $3y^2-2y+1>0$ всегда.

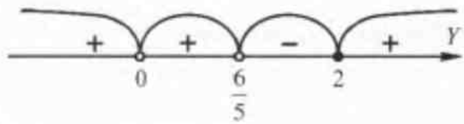
2) $5y^2-6y+1=0$
$D=36-20=16$
$y=\dfrac{6\pm 4}{10}$
$y_1=1;\ y_2=\dfrac{1}{5}$
$5y^2-6y+1=5(y-1)\left(y-\dfrac{1}{5}\right)$

3) $5y^2-6y\ne 0$
$y\ne 0;\ y\ne\dfrac{6}{5}$

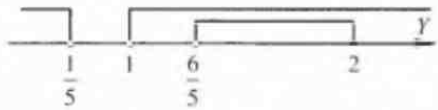
Решим неравенства системы методом интервалов.

1-е неравенство:

2-е неравенство:



В результате получим:



Ответ: $y \in \left(\frac{6}{5}; 2\right]$.

Еще логарифмов? Пожалуйста!

---

14. Решите неравенство: $\lg^2 \frac{(x+2)^2(x+5)}{5} < \lg^2 \frac{x+5}{20}$.

Извлекать корень из неравенства нельзя! Можно перенести все в левую часть неравенства и разложить на множители как разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\left(\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5} - \lg\frac{x+5}{20}\right)\left(\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5} + \lg\frac{x+5}{20}\right) < 0.$$

Применим формулы разности и суммы логарифмов, следя за областью допустимых значений. Все выражения под логарифмами в исходном неравенстве должны быть положительны.

$$\begin{cases} \lg\frac{(x+2)^2(x+5)\cdot 20}{5\cdot(x+5)}\cdot\lg\left(\frac{(x+2)^2\cdot(x+5)^2}{100}\right) < 0. \\ (x+2)^2(x+5) > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}$$

Посмотрим на второе и третье неравенства системы. Поскольку $x + 5$ положительно, то и выражение $(x + 2)^2$ должно быть положительно.

Заметим, что решения неравенства $(x + 2)^2 > 0$ — это все числа, кроме $x = -2$.

Получим:

$$\begin{cases} \lg\left(4\cdot(x+2)^2\right)\cdot\lg\left(\frac{(x+2)^2\cdot(x+5)^2}{100}\right) < 0 \\ x > -5 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

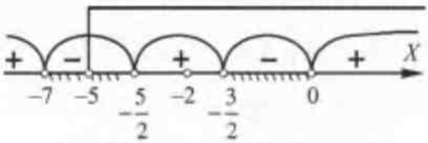
По методу рационализации, каждый из множителей вида $\log_h f$ заменяем на $(h - 1)(f - 1)$.

$$\begin{cases}(10-1)\cdot\left(4\cdot(x+2)^2-1\right)\cdot(10-1)\left(\dfrac{(x+2)^2\cdot(x+5)^2}{100}-1\right)<0\\ x>-5\\ x\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+4-1)\cdot(2x+4+1)\cdot((x+2)\cdot(x+5)-10)\cdot((x+2)\cdot(x+5)+10)<0\\ x>-5\\ x\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)\cdot(2x+5)\cdot x\cdot(x+7)\cdot\left(x^2+7x+20\right)<0\\ x>-5\\ x\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+3)\cdot(2x+5)\cdot x\cdot(x+7)<0\\ x>-5\\ x\neq-2\end{cases}$$

Просто равносильные преобразования. Выражение $x^2+7x+20$ положительно всегда, так как в уравнении $x^2+7x+20=0$ дискриминант отрицателен. Осталось применить метод интервалов.



Ответ: $x\in\left(-5;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};0\right)$.

---

15. Решите неравенство: $\log_3\left(x^2+7x+10\right)+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+5}{9}+1\geq\log_3\left(3x^2+16x+20\right)$.

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}x^2+7x+10>0\\ x+5>0\\ 3x^2+16x+20>0\\ \log_3\left(x^2+7x+10\right)-\log_3\dfrac{x+5}{9}+\log_3 3\geq\log_3\left(3x^2+16x+20\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+5)(x+2)>0\\ x+5>0\\ (x+2)\left(x+\dfrac{10}{3}\right)>0\\ \log_3\dfrac{(x+5)(x+2)\cdot9\cdot3}{x+5}>\log_3\left(3(x+2)\left(x+\dfrac{10}{3}\right)\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\ 9\cdot(x+2)\geq(x+2)\left(x+\dfrac{10}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\ x+\dfrac{10}{3}\leq9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\ x\leq\dfrac{17}{3}\end{cases}$$

$x^2+7x+10=0$

$D=9;\ x_{1,2}=\dfrac{-7\pm3}{2}$

$x_1=-5;\ x_2=-2$

$3x^2+16x+20=0$

$D=16^2-12\cdot20=16\cdot(16-3\cdot5)=16$

$x_{1,2}=\dfrac{-16\pm4}{6}$

$x_1=-2;\ x_2=-\dfrac{10}{3}$

Ответ: $x\in\left(-2;\frac{17}{3}\right]$.

16. Решите неравенство: $\dfrac{1-\sqrt{1-4\log_4^2 x}}{\log_4 x}<2.$

Сразу сделаем замену: $\log_4 x = t$.

Получим неравенство: $\dfrac{1-\sqrt{1-4t^2}}{t}<2;\ \dfrac{1-2t-\sqrt{1-4t^2}}{t}<0.$

Область допустимых значений неравенства:

$$\begin{cases}1-4t^2\geq 0\\ t\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-2t)(1+2t)\geq 0\\ t\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leq t\leq\dfrac{1}{2}\\ t\neq 0\end{cases}.$$

Разложим выражение под корнем на множители по формуле $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Заметим, что $1-2t=\left(\sqrt{1-2t}\right)^2$. Поскольку $t\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$, выражения $1-2t$ и $1+2t$ будут неотрицательными.

$$\frac{\left(\sqrt{1-2t}\right)^2-\sqrt{(1-2t)(1+2t)}}{t}<0;$$

$$\frac{\sqrt{1-2t}\cdot\left(\sqrt{1-2t}-\sqrt{1+2t}\right)}{t}<0.$$

Выражение $\sqrt{1-2t}$ неотрицательно. Более того, если $1-2t=0$, неравенство не выполняется. Поделим обе части неравенства на $\sqrt{1-2t}>0$ при условии $t<\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{1-2t}-\sqrt{1+2t}}{t}<0$$

Согласно методу рационализации, множитель h^f-h^g заменяется на $h\cdot(f-g)$.

В нашем случае $\sqrt{1-2t}=(1-2t)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1+2t}=(1+2t)^{\frac{1}{2}}$, множитель $\sqrt{1-2t}-\sqrt{1+2t}$ заменяем на $\dfrac{1}{2}\cdot(1-2t-1-2t)$. Получим: $\dfrac{-4t}{t}<0.$

Если $t\neq 0$, получаем тождество: $-4<0$.

Итак, $t\neq 0$. При этом $1-2t\neq 0$, т. е. $t\neq\dfrac{1}{2}$.

С учетом ОДЗ получаем: $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leq t<\dfrac{1}{2}\\ t\neq 0\end{cases}.$

Вернемся к переменной x:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le \log_4 x < \frac{1}{2} \\ \log_4 x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ \log_4 \frac{1}{2} \le \log_4 x < \log_4 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ \frac{1}{2} \le x < 2 \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2)$.

И еще задача на метод замены множителя.

---

17. Решите неравенство: $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2-|x|} \le 0$.

Область допустимых значений очевидна:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - |x| \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 0; x \ne 1 \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}.$$

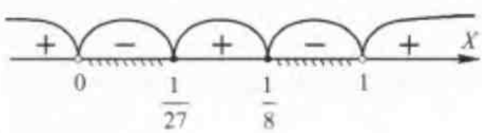
Поскольку $x > 0$, модуль раскрывается однозначно: $|x| = x$.

Мы получим: $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x(x-1)} \le 0$.

Применим к логарифмам в числителе метод замены множителя.
Каждый из множителей вида $\log_h f$ заменяется на $(h-1)(f-1)$.
Получим:

$$\frac{(2-1)\cdot(8x-1)\cdot(3-1)\cdot(27x-1)}{x(x-1)} \le 0$$

$$\frac{(8x-1)\cdot(27x-1)}{x(x-1)} \le 0$$



Решаем методом интервалов.

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; 1\right)$.

---

18. А что делать, если совсем не повезло? Если, несмотря на все старания, получилась третья степень? Как в этом неравенстве:

$$x + \frac{8x-45}{x-7} + \frac{x^2+15x-132}{x^2-16x+63} \le 1.$$

$$x + \frac{x-7+7x-38}{x-7} + \frac{x^2+15x-132}{(x-7)(x-9)} \le 1$$

$$x^{\backslash x^2-16x+63} + \frac{7x-38^{\backslash x-9}}{x-7} + \frac{x^2+15x-132}{(x-7)(x-9)} \le 0$$

$$\frac{x^3-16x^2+63x+7x^2-38x-63x+38\cdot 9+x^2+15x-132}{(x-7)(x-9)}\le 0$$

$$\frac{x^3-8x^2-23x+210}{(x-7)(x-9)}\le 0$$

Больше упростить не удается. Ни одной замены не видно. Неужели третья степень?

Да, это случилось. Как же разложить числитель на множители? Как вообще решать уравнения третьей степени, четвертой и выше?

В общем случае такие уравнения решают численными методами (на компьютере). А нам остается либо разложить выражение высокой степени на множители, либо искать целые корни числителя (если они есть) среди делителей свободного члена.

Будем искать корни уравнения $x^3-8x^2-23x+210=0$ среди делителей числа 210.

А делителей у этого числа немало: 1; –1; 2; –2; 3; –3; 5; –5; 6; –6; 7; –7...

Начнем с меньших по модулю. Подставим $x=1$ в выражение $x^3-8x^2-23x+210$.

Результат не равен нулю. Продолжаем, подставляя по очереди –1; 2; –2...

И когда уже готовы все бросить, наконец получаем: $6^3-8\cdot 6^2-23\cdot 6+210=0$.

Значит, $x=6$ — корень уравнения $x^3-8x^2-23x+210=0$.

И это значит, что $x^3-8x^2-23x+210=(x-6)\cdot(ax^2+bx+c)$.

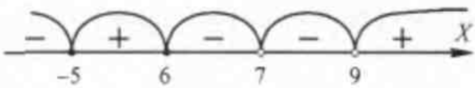
Поделим в столбик выражение $x^3-8x^2-23x+210$ на $x-6$. Так, как мы делим числа в столбик.

$$\begin{array}{r|l}
x^3-8x^2-23x+210 & x-6 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3-6x^2} & x^2-2x-35 \\
-2x^2-23x & \\
-\underline{-2x^2+12x} & \\
-35x+210 & \\
\underline{-35x+210} & \\
0 &
\end{array}$$

Получим: $x^3-8x^2-23x+210=(x-6)\cdot(x^2-2x-35)=(x-6)\cdot(x-7)\cdot(x+5)$.

Неравенство примет вид $\dfrac{(x-6)\cdot(x-7)\cdot(x+5)}{(x-7)(x-9)}\le 0$.

Решим его методом интервалов.



Ответ: $x\in(-\infty;-5]\cup[6;7)\cup(7;9)$.

Когда я училась в школе, меня часто посылали на олимпиады — по математике, физике, истории, биологии… Для меня эти олимпиады были тратой времени и разочарованием. Каждый раз я надеялась выиграть. И каждый раз, придя, я получала задания, с которыми не представляла, что делать. Я видела, как другие что-то быстро пишут, а мне сказать было нечего. «Они умные, а я нет», — думала я, и моя самооценка падала.

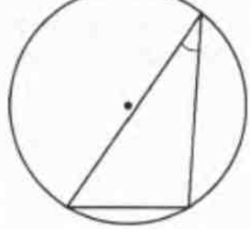
Только став взрослой, я поняла: на олимпиаде побеждает не самый умный, а тот, кто готовился. Кто заранее хотя бы примерно знает, какие там задания. У кого в запасе множество заготовок, приемов и хитростей для их решения.

Точно так же и сдача ЕГЭ на высокий балл — не случайность, не подарок судьбы. Это подготовка, знание специальных приемов, умение распределить и сэкономить время. Поэтому я и решила в одной книге собрать все специальные приемы решения задач ЕГЭ и показать все тонкости оформления. Освойте их — и победа на ЕГЭ станет вашей!

Глава 5
ПЛАНИМЕТРИЯ

Планиметрия — тема, на которой чаще всего «ломаются» абитуриенты. Задачи второй части ЕГЭ не даются сразу, без подготовки. Но, оказывается, даже в первой части ЕГЭ по математике есть подсказки — схемы, на которых строятся сложные задачи. Вот несколько примеров.

1. Найдите хорду, на которую опирается угол 30°, вписанный в окружность радиуса 43.

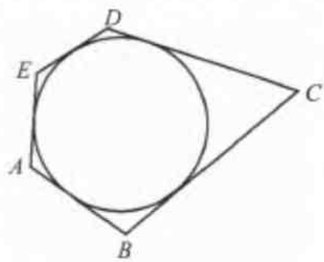


Кажется, что треугольник на рисунке прямоугольный. Но это не так: центр окружности специально показан сбоку от его большей стороны. Зато у нас есть теорема синусов: $\frac{x}{\sin 30^\circ} = 2R$, где x — хорда, лежащая напротив угла в 30°.

Можно поступить иначе — соединить концы хорды с центром окружности и вспомнить, что величина вписанного угла равна половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Ответ: 43.

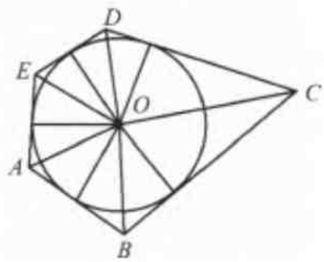
2. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, площадь которого равна 33. Найдите его периметр.



Отметим центр окружности и соединим его с вершинами n-угольника. Перед нами n треугольников, в каждом из которых высота равна радиусу окружности, то есть r.

Очевидно, что площадь многоугольника
$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOE} + S_{EOA}$.

По формуле площади треугольника



$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot r$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot r$$

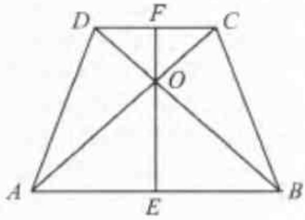
$$S_{COD} = \frac{1}{2} CD \cdot r$$

$$S_{DOE} = \frac{1}{2} DE \cdot r$$

$$S_{EOA} = \frac{1}{2} EA \cdot r$$

Тогда $S = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA) \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r$, где P — периметр, то есть сумма всех сторон многоугольника. Периметр равен 22.

3. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Высота трапеции равна 9. Найдите ее среднюю линию.

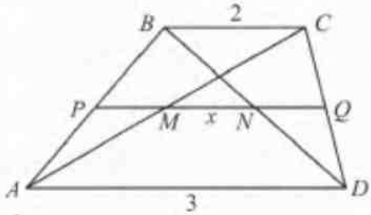


Треугольники AOE и FOC — прямоугольные и равнобедренные, $OF = FC = \frac{1}{2}DC$, $OE = AE = \frac{1}{2}AB$.

Значит, высота трапеции $FE = OF + OE$ равна полусумме ее оснований, то есть средней линии.

Ответ: 9.

4. Основания трапеции равны 2 и 3. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Проведем PQ — среднюю линию трапеции, $PQ = 2{,}5$. Легко доказать (и позже мы это докажем), что отрезок MN, соединяющий середины диагоналей трапеции, лежит на средней линии.

PM — средняя линия треугольника ABC, значит, $PM = 1$.

NQ — средняя линия треугольника BCD, значит, $NQ = 1$.

Тогда $MN = PQ - PM - NQ = 2{,}5 - 1 - 1 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Обязательный этап освоения планиметрии — простые задачи на доказательство. Вот 32 полезных факта, и вам надо их доказать[1]. Все они применяются в решении реальных задач ЕГЭ. На своих интенсивах и мастер-классах я доказываю самые интересные из них.

Углы, треугольники, четырехугольники

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
2. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, считая от вершины.
4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
5. Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.
6. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.
7. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.
8. Замечательное свойство трапеции: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Окружности

9. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
10. Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.
11. Точка касания окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры.
12. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

[1] При составлении списка полезных фактов использованы учебные пособия Р. К. Гордина.

13. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

14. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

15. Теорема о касательной и секущей. Если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.

16. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

17. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

18. Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

19. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

20. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

21. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r равно a и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ и $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

22. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180 градусов.

23. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.

24. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии.

25. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

26. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой AB без точек A и B.

27. Если M — точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то $AM = p - BC$, где p — полупериметр треугольника ABC.

28. Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

29. Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L, M, а угол BAC равен φ, то угол KLM равен $90° - \frac{1}{2}\varphi$.

30. Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.

31. Если AM и CK — высоты треугольника ABC, причем $\angle B \neq 90°$, то треугольник MBK подобен треугольнику ABC, причем коэффициент подобия равен $|\cos B|$.

32. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

Доказывайте полезные факты. Запоминайте картинки и схемы решения. Чем больше у вас таких ассоциативных связей — тем проще решаются задачи по геометрии.

Например, в задаче фигурирует радиус окружности, описанной вокруг треугольника. Для чего он может пригодиться? Может быть, нужно применить теорему синусов? Или формулу площади треугольника через три его стороны и радиус описанной окружности?

Если в задаче есть касательные — наверняка мы используем теорему об отрезках касательных, проведенных из одной точки. Есть еще и секущая — возможно, поможет теорема о секущей и касательной.

Все задачи ЕГЭ решаются простыми школьными способами. Если вы знаете теорему Менелая, теорему Чевы и другие — отлично. Но все же они больше применимы в олимпиадных задачах, а не на ЕГЭ.

И все-таки определенные секреты здесь есть. Например, классические схемы, на которых строится множество задач по геометрии. И эти схемы надо знать.

Полезные схемы для решения задач по геометрии

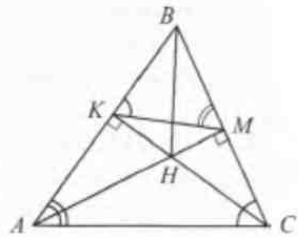


Схема 1. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. H — точка пересечения высот треугольника (ортоцентр), $H = AM \cap CK$.

Получаем сразу несколько полезных фактов:

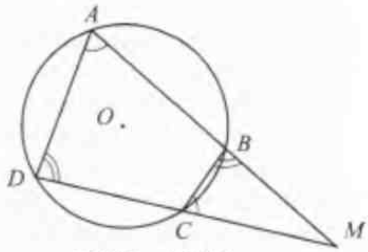
1) $\Delta MBK \sim \Delta ABC$, $k = |\cos B|$;

2) четырехугольник $AKMC$ можно вписать в окружность;

3) четырехугольник $BMHK$ можно вписать в окружность;

4) радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABC, AHC, BHC и ABH, равны;

5) $BH = 2R|\cos B|$, где R — радиус описанной окружности ΔABC.



$\Delta BMC \sim \Delta DMA$

Схема 2. Пусть луч MA пересекает окружность в точках A и B, а луч MD — в точках C и D, причем $MA > MB$, $MD > MC$. Тогда треугольники BMC и DMA подобны.

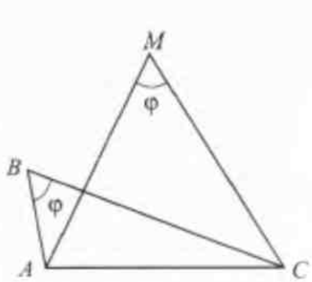
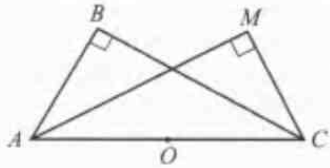


Схема 3. У треугольников ABC и AMC сторона AC — общая, угол B равен углу M. Тогда точки A, B, M, C, лежат на одной окружности.

Другими словами, геометрическое место точек M, из которых отрезок AC виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой AC, без точек A и C.

Схема 4. У треугольников ABC и AMC сторона AC — общая, углы B и M — прямые. Тогда точки A, B, M, C, лежат на окружности, радиус которой равен половине AC.

Иначе говоря, геометрическое место точек M, из которых отрезок AC виден под прямым углом, есть окружность с диаметром AC без точек A и C.



Есть также две теоремы, которые, хоть и входят формально в школьную программу, крайне редко упоминаются на уроках. А в вариантах ЕГЭ есть задачи на их применение. Это теорема о секущей и касательной и свойство биссектрисы треугольника.

Теорема о секущей и касательной. Если к окружности проведены из одной точки касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению длин всей секущей и ее внешней части.

Свойство биссектрисы. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.

Есть простой прием, заменяющий и теорему Менелая, и теорему Чевы. Это использование двух пар подобных треугольников.

Есть теорема косинусов, которая помогает, когда больше ничего не приходит в голову.

Есть интересный способ, который называется «удвоение медианы».

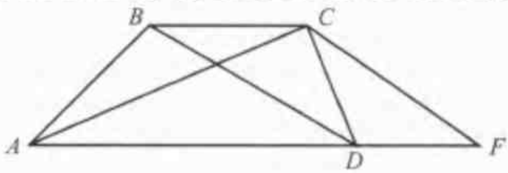
Есть эффектный прием: «Перестроить Ж в треугольник». Что это такое? Сейчас узнаете.

---

1. (ЕГЭ-2017) Основания трапеции равны 4 и 9, а ее диагонали равны 5 и 12.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.



В условии есть тонкий намек. Вспомним пифагорову тройку: 5, 12, 13. Заметим, что значимые для нас отрезки пересекаются. Как бы нам построить треугольник с такими же длинами сторон?

Пусть $BC = 4$, $AD = 9$, $AC = 12$, $BD = 5$.

а) Проведем $CF \parallel BD$, $BCFD$ — параллелограмм, значит, $DF = BC = 4$, $CF = BD = 5$.

Треугольник ACF со сторонами $AC = 12$, $CF = 5$, $AF = 9 + 4 = 13$ прямоугольный (так как $AF^2 = AC^2 + CF^2$). Значит, AC и BD перпендикулярны.

Это известный прием. Если нужные вам отрезки пересекаются вот такой «звездочкой»: Ж, — мы можем перестроить это Ж в треугольник. В нашем случае длины сторон этого треугольника еще и образовали пифагорову тройку.

б) Высота трапеции равна высоте треугольника ACF. Обозначим эту высоту h.

$$S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} AF \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot CF;$$

$$13h = 12 \cdot 5.$$

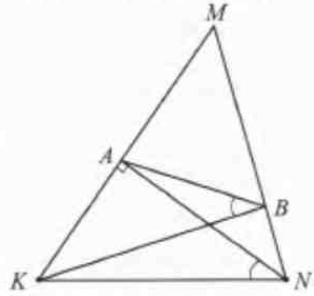
$$h = \frac{60}{13}.$$

Следующая задача — на применение одной из наших классических схем.

2. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA.

а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM, если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45°$.



а) Докажем, что $\angle ABK = \angle ANK$.

$\Delta MBK \sim \Delta MAN$ (по двум углам). Запишем отношение сходственных сторон: $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MN}{MK}$.

Это значит, что $\Delta ABM \sim \Delta NKM$ (по углу и двум сторонам), причем $k = \dfrac{MA}{MN} = \cos\angle KMN$.

$\angle MAB = \angle MNK$, $\angle BAK$ — смежный с углом $\angle MAB$, $\angle BAK = 180° - \angle MAB = 180° - \angle BNK$, $\angle BAK + \angle BNK = 180°$, четырехугольник $ABNK$ можно вписать в окружность.

$\angle ABK = \angle ANK$ (опираются на дугу $\overset{\frown}{AK}$).

б) Найдем $R_{\Delta ABM}$, если $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45°$.

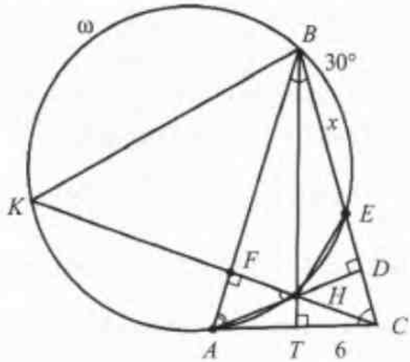
$\Delta ABM \sim \Delta NKM$, $k = \cos\angle KMN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{AB}{KN} = k$; $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 8\sqrt{2} = 8$.

По теореме синусов, $R_{\Delta ABM} = \dfrac{AB}{2\sin\angle AMB} = \dfrac{8\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

3. (Авторская задача) Высоты равнобедренного треугольника ABC с основанием AC пересекаются в точке H, угол B равен 30 градусов. Луч CH второй раз пересекает окружность ω, описанную вокруг треугольника ABH, в точке K.

а) Докажите, что BA — биссектриса угла KBC.

б) Отрезок BC пересекает окружность ω в точке E. Найдите BE, если $AC = 12$.



а) Пусть AD, BT и CF — высоты треугольника ABC. ΔABD — прямоугольный, $\angle BDA = 90°$, $\angle BAD = 60°$. Тогда $\angle HKB = \angle BAH = 60°$ (как вписанные углы, опирающиеся на дугу BH).

ΔKBF — прямоугольный, $\angle FKB = 60°$, тогда $\angle KBF = 30° \Rightarrow BA$ — биссектриса $\angle KBC$.

Кроме того, ΔKBC — правильный ($\angle BKC = 60°$, высота BF является биссектрисой); $KB = BC = KC$.

б) $AC = 12$, $BC \cap \omega = E$. Найдем BE.

По теореме синусов, из ΔABC:

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C};\ \angle C = \frac{180° - 30°}{2} = 75°;\ 24 = \frac{AB}{\sin 75°};\ AB = 24\sin 75°.$$

Заметим, что из точки C проведены к окружности секущие CB и CK; по свойству отрезков секущих $CB \cdot CE = CK \cdot CH$; поскольку $BC = CK$, получается, что $CE = CH$. Значит, треугольник CEH — правильный.

Тогда $BE = CB - CE = AB - CH$.

Из ΔACH, по теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin\angle AHC} = \frac{CH}{\sin\angle HAC};\ \angle AHC = 150^\circ;\ \angle HAC = 15^\circ, CH = 24\sin 15^\circ.$$

$$BE = AB - CH = 24\sin 75^\circ - 24\sin 15^\circ = 24(\sin 75^\circ - \sin 15^\circ) =$$

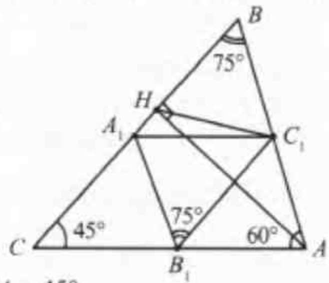
$$= 24\cdot 2\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 24\cos 45^\circ = 12\sqrt{2}.$$

---

4. (ЕГЭ-2017) В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.



а) Докажем, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

A_1B_1 и B_1C_1 — средние линии ΔABC. Это значит, что $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $\angle A_1B_1C = \angle BAC = 60^\circ$, $\angle C_1B_1A = \angle BCA = 45^\circ$.

Тогда $\angle A_1B_1C_1 = 75^\circ$.

$\angle A_1HC_1 = 90^\circ + \angle AHC_1$.

ΔAHC_1 — равнобедренный (поскольку HC_1 — медиана прямоугольного треугольника AHB, $HC_1 = AC_1$).

$\angle AHC_1 = \angle HAC_1 = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$, значит, $\angle A_1HC_1 = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$, $\angle A_1HC_1 + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$.

Четырехугольник $A_1HC_1B_1$ можно вписать в окружность.

б) BC = $2\sqrt{3}$; найдем A_1H.

Очевидно, $B_1C_1 = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{3}$ (как средняя линия ΔABC), $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (по трем сторонам), $\angle A_1 = \angle A = 60^\circ$. Тогда, по теореме синусов, $\dfrac{B_1C_1}{\sin\angle B_1A_1C_1} = 2R$, где R — радиус окружности, на которой лежат точки A_1, H, C_1 и B_1. Найдем R.

$$2R = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}};\ R = 1.$$

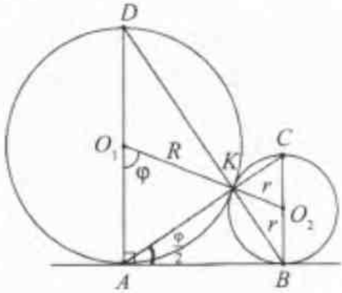
Рассмотрим ΔA_1C_1H: $\dfrac{A_1H}{\sin\angle A_1C_1H} = 2R$, $\angle A_1CH = 180^\circ - \angle HA_1C_1 - \angle A_1HC_1 =$

$$= 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ;\ A_1H = 2R\cdot\sin 30^\circ = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

5. (ЕГЭ-2018, демо-вариант) Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



а) Другими словами, надо доказать, что точка D лежит на прямой AO_1, а точка C — на прямой O_2B.

AO_1O_2B — прямоугольная трапеция, поскольку $O_1A \perp AB$; $O_2B \perp AB$ (как радиусы, проведенные в точку касания), $O_1A \parallel O_2B$.

Если $\angle AO_1K = \varphi$, то $\angle KO_2B = 180° - \varphi$ (как односторонние углы), $\angle O_1AK = \dfrac{180° - \varphi}{2}$;

тогда $\angle KAB = \dfrac{\varphi}{2}$; $\angle O_2BK = \dfrac{\varphi}{2}$ и $\angle KBA = 90 - \dfrac{\varphi}{2}$.

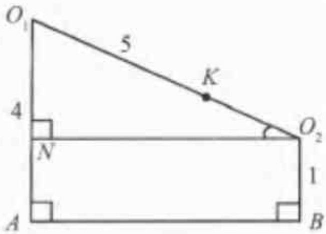
ΔAKB — прямоугольный, $\angle AKB = 90°$.

Тогда $\angle AKD = 90°$ и AD — диаметр первой окружности; $\angle BKC = 90°$ и BC — диаметр второй окружности, так как вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

Значит, $AD \parallel BC$.

б) $O_1A = 4$; $O_2B = 1$. Найдем $S_{\Delta AKB}$.

AK — высота в ΔABD, где $\angle A = 90°$; $\Delta AKB \sim \Delta DAB$; $k = \dfrac{AB}{BD}$.



Рассмотрев прямоугольную трапецию AO_1O_2B, где $O_1A = 4$, $O_2B = 1$, $O_1O_2 = 4 + 1 = 5$, найдем, что $AB = O_2N = 4$.

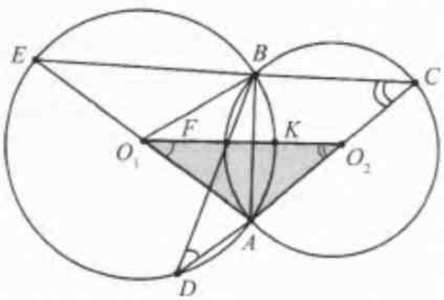
Из ΔABD, по теореме Пифагора, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 4\sqrt{5}$.

$$k = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; S_{\Delta AKB} = k^2 \cdot S_{\Delta DAB} = \frac{1}{5} S_{\Delta DAB} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = \frac{16}{5} = 3,2.$$

6. (ЕГЭ-2017) Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжения диаметра CA второй окружности и хорды CB этой же окружности пересекают первую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD, если углы DAE и BAC равны, радиус первой окружности в 4 раза больше радиуса второй и $AB = 2$.



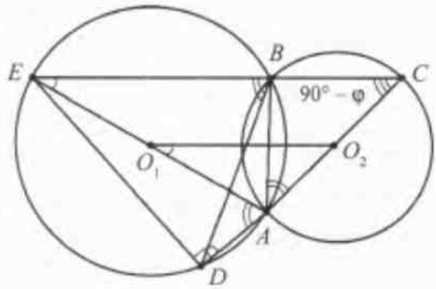
а) Пусть F и K — точки пересечения окружностей с прямой O_1O_2.

ΔO_1AB — равнобедренный, поскольку $O_1A = O_1B$ (как радиусы окружности), $O_1K \perp AB$, значит, луч O_1K является биссектрисой угла AO_1B и углы $\angle AO_1K$ и $\angle BO_1K$ равны. Тогда $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{AK}$, поскольку на эти дуги опираются равные центральные углы.

$\angle AO_1K = \overset{\frown}{AK}$ (как центральный угол, опирающийся на дугу $\overset{\frown}{AK}$), $\angle BDA = \overset{\frown}{AK}$ — поскольку равен половине угловой величины дуги AKB. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую опирается.

Значит, $\angle O_2O_1A = \angle BDC$. Аналогично $\angle BCA = \overset{\frown}{AF}$ (т. е. половине угловой величины дуги AFB), $\angle O_1O_2A = \overset{\frown}{AF}$ и $\angle O_1O_2A = \angle BCD$, $\Delta O_1O_2A \sim \Delta DCB$ по двум углам. Заодно мы доказали, что $CE \parallel O_1O_2$, $\angle O_1AO_2 = \angle DBC$.

Поскольку $CE \parallel O_1O_2$, $\Delta O_1O_2A \sim \Delta ECA$, AE — диаметр первой окружности.

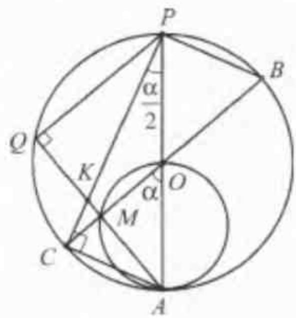


б) Пусть углы DAE и BAC равны, радиус первой окружности в 4 раза больше радиуса второй и $AB = 2$. Найдем AD.

Пусть $O_2A = r$, $O_1A = 4r$.

$\angle DAE = \angle BAC$, ΔABC и ΔADE — прямоугольные (поскольку AC и AE — диаметры окружностей), тогда $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ по двум углам,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC};\ AD = \frac{AE}{AC} \cdot AB = 4 \cdot 2 = 8.$$



7. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.

а) Докажем, что $PQ \parallel BC$.

ΔAOM и ΔAPQ — прямоугольные, поскольку углы AMO и AQP опираются на диаметры малой и большой окружностей соответственно; $\angle A$ — общий.

$\Delta AOM \sim \Delta APQ$ по двум углам, значит, $\angle MOA = \angle QPA$, $MO \parallel QP$ (так как соответственные углы при прямых MO и QP и секущей AP равны), $BC \parallel QP$.

б) $\sin \angle AOC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $PC \cap AQ = K$. Найдем $QK : KA$.

$\angle COA = \angle QPA = \alpha$; тогда $\angle CPA = \angle \dfrac{COA}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$, поскольку $\angle CPA$ вписанный. Значит,

PK — биссектриса треугольника QPA. По свойству биссектрисы, $\dfrac{QK}{KA} = \dfrac{PQ}{PA}$.

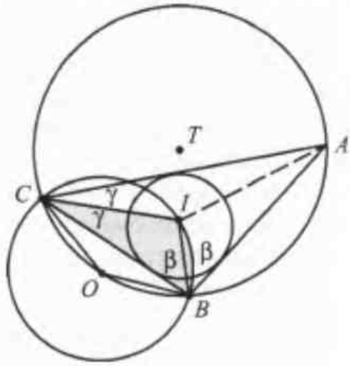
Поскольку ΔQPA прямоугольный, $\dfrac{PQ}{PA} = \cos\angle QPA = \cos\alpha$.

Мы знаем, что $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Тогда $\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{15}{16} = \dfrac{1}{16}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{QK}{KA} = \dfrac{1}{4}$.

8. Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2, как 3 : 4.



В этой задаче главное — чертеж. Потратьте 5, 10 минут, но сделайте хороший. Большой. Где все видно. Ясно, что треугольник ABC не должен быть правильным — поскольку в правильном центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

Пусть T — центр описанной окружности треугольника ABC; ее радиус R_1. Пусть $OC = R_2$.

а) BI, CI — биссектрисы ΔABC. Обозначим углы треугольника ABC: $\angle B = 2\beta$; $\angle C = 2\gamma$;

$\angle A = 180° - 2(\beta + \gamma)$, тогда $\beta + \gamma = \dfrac{180° - \angle A}{2}$.

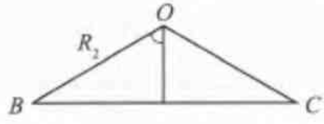
Из ΔIBC: $\angle I = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - \dfrac{180° - \angle A}{2} = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$.

$\angle BIC$ — вписанный в окружность S_2. Тогда величина дуги окружности S_2, на которую он опирается, равна $180° + \angle A$.

$\angle COB = 360° - (180° + \angle A) = 180° - \angle A$, $\angle A + \angle COB = 180°$.

Значит, точки A, C, O, B лежат на одной окружности. Ее центр — точка T.

б) Найдем $\cos\angle BAC$, если $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3}{4}$.



Заметим, что BC — общая хорда окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и BIC. Применим к этим треугольникам теорему синусов. Для треугольника ABC:

$\dfrac{BC}{\sin\angle A} = 2R_1$, отсюда $BC = 2R_1 \sin\angle A$.

Для треугольника BIC: $\dfrac{BC}{\sin\angle BIC} = 2R_2$.

В пункте (а) мы нашли, что $\angle BIC = 180° - \beta - \gamma = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$.

Тогда $\sin\angle BIC = \sin\left(90° + \dfrac{\angle A}{2}\right) = \cos\dfrac{\angle A}{2}$, $BC = 2R_2 \cos\dfrac{\angle A}{2}$.

Получим: $R_1 \sin\angle A = R_2 \cos\frac{\angle A}{2}$

Пусть $\angle A = \alpha$; $R_1 \sin\alpha = R_2 \cos\frac{\alpha}{2}$; $2R_1 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = R_2\cos\frac{\alpha}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R_2}{2R_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;

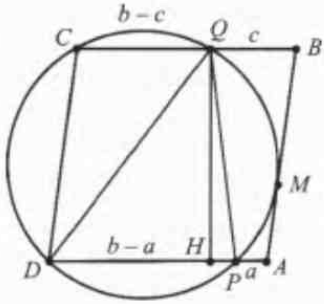
$\cos\angle A = \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$.

---

9. Параллелограмм $ABCD$ и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.



Докажем, что вокруг $ABQP$ можно описать окружность.

$\angle A = \angle C$ (как противоположные углы параллелограмма), $\angle DPQ = 180° - \angle C$ (поскольку $DPQC$ вписан в окружность), тогда $\angle APQ = 180° - \angle DPQ = \angle C = \angle A$; $ABQP$ — равнобокая трапеция, $\angle PAB + \angle BQP = 180°$, $ABQP$ — можно вписать в окружность.

б) $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$; найдем DQ.

Пусть M — точка касания AB с окружностью. По теореме о секущей и касательной, $AM^2 = AP \cdot AD = ab$; $BM^2 = BQ \cdot BC = bc$; $AB = AM + BM = \sqrt{ab} + \sqrt{bc}$.

Проведем QH — высоту трапеции $DPQC$.

Выразим QH из прямоугольных треугольников HQD и HQP. Дальше — просто алгебра!

$QH^2 = DQ^2 - DH^2$; $QH^2 = QP^2 - HP^2$;

$HP = \frac{DP - QC}{2} = \frac{b - a - b + c}{2} = \frac{c - a}{2}$;

$DH = CQ + HP = b - c + \frac{c - a}{2} = b - \frac{c + a}{2}$;

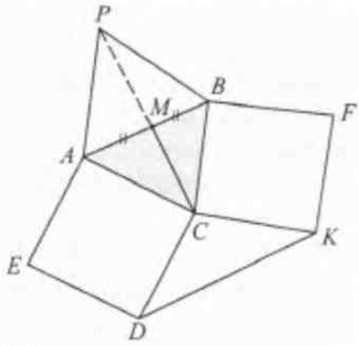
$DQ^2 = QP^2 - HP^2 + DH^2$.

Поскольку $QP = AB$, $DQ^2 = AB^2 - HP^2 + DH^2 = \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc}\right)^2 - \left(\frac{c - a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{c + a}{2}\right)^2 =$

$= ab + bc + 2b\sqrt{ac} + b^2 - b(a + c) + \left(\frac{c + a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c - a}{2}\right)^2 = 2b\sqrt{ac} + b^2 + \frac{1}{4}\cdot 2c \cdot 2a =$

$= b^2 + 2b\sqrt{ac} + ac = \left(b + \sqrt{ac}\right)^2$; $DQ = b + \sqrt{ac}$.

10. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.



а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2} DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150°$.

Необычная задача. Над ней можно долго думать, изводя бумагу. А можно сразу воспользоваться приемом **удвоения медианы**. Смотрите, как это делается.

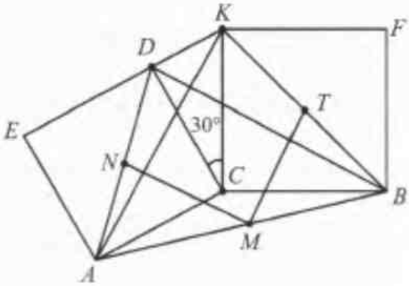
а) Проведем $AP \parallel BC$, $BP \parallel AC$. Получим параллелограмм $ACBP$, где $CP = 2CM$. Покажем, что $\Delta ACP = \Delta CDK$.

$AC = CD$; $AP = BC = CK$; $\angle CAP = 180° - \angle ACB = \angle DCK$,

так как $\angle ACB + 90° + \angle DCK + 90° = 360°$;

$\Delta ACP = \Delta CDK$ по стороне и двум углам и $CM = \frac{1}{2} CP = \frac{1}{2} DK$.

б) Пусть N и T — центры квадратов.



M — середина AB, N — середина AD, тогда MN — средняя линия ΔBAD.

Найдем BD по теореме косинусов из треугольника BCD:

$\angle DCB = 90° + 30° = 120°$,

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\angle DCB$;

$BD^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \cos 120° =$

$= 4(64 + 49 + 14 \cdot 4) = 4 \cdot 169$;

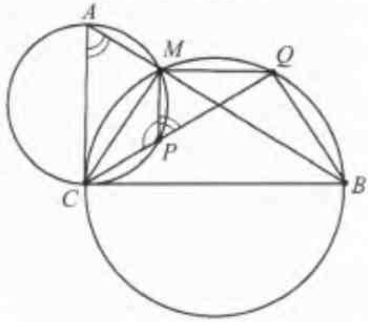
$BD = 2 \cdot 13 = 26$;

Тогда $MN = \frac{BD}{2} = 13$.

Аналогично, MT — средняя линия AKB.

По теореме косинусов, из треугольника AKB найдем $AK = 26$, $MT = MN = 13$.

11. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности, второй раз пересекающиеся в точке M. Точка Q лежит на меньшей дуге MB окружности с диаметром BC. Прямая CQ второй раз пересекает окружность с диаметром AC в точке P.



а) Докажите, что прямые PM и QM перпендикулярны.

б) Найдите PQ, если $AM = 1$, $BM = 3$, а Q — середина дуги MB.

а) Докажем сначала, что три точки — A, M и B — лежат на одной прямой.

$\angle AMC = 90°$ (опирается на диаметр), $\angle BMC = 90°$ (опирается на диаметр).

Тогда $\angle AMB = 90° + 90° = 180° \Rightarrow M \in AB$.

Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$.

Четырехугольник $ACPM$ вписан в окружность. Поэтому $\angle CPM = 180° - \angle CAB$.

Угол MPQ — смежный с углом CPM, значит, $\angle MPQ = \angle CAB$.

Углы MQC и MBC опираются на дугу MC, $\angle MQC = \angle MBC = \beta$.

Поскольку $\alpha + \beta = 90°$, $\angle MPQ + \angle MQP = 90°$. Значит, $\angle PMQ = 90°$, прямые PM и QM перпендикулярны.

Мы получили, что ΔMPQ — прямоугольный, $\Delta MPQ \sim \Delta CAB$.

б) Пусть Q — середина дуги MB, $AM = 1$, $BM = 3$. Найдем PQ.

CM — высота прямоугольного треугольника ABC.

По свойству высоты прямоугольного треугольника, $CM = \sqrt{AM \cdot BM} = \sqrt{3}$.

Тогда $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$, $AB = 4$, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$.

Поскольку Q — середина дуги MB, $\angle MCQ = \angle QCB = 30°$.

ΔCMQ — равнобедренный, $CM = MQ = \sqrt{3}$.

Тогда гипотенуза PQ треугольника MPQ, в котором $\angle MQP = 30°$, равна 2.

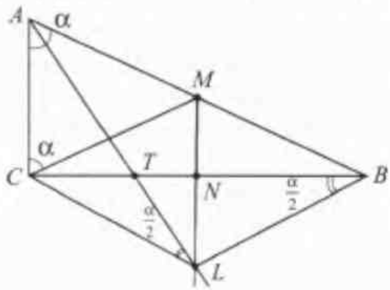
Ответ: $PQ = 2$.

---

12. В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$.



а) AL — биссектриса ΔBAC, $MN \parallel AC$ (так как MN — средняя линия треугольника ABC), $MN \cap AL = L$. Докажем, что ΔAML и ΔBLC подобны.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle LMB = \alpha$, поскольку соответственные углы равны, $\angle AML = 180° - \alpha$, $\angle MAL = \frac{\alpha}{2}$, $\angle MLA = \angle LAC = \frac{\alpha}{2}$ (как накрестлежащие).

Значит, ΔAML — равнобедренный, $AM = ML$.

Так как LN — медиана и высота в треугольнике CLB, ΔCLB — равнобедренный.

$MA = MB = MC = ML$ (по свойствк медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе).

Значит, A, C, L, B лежат на окружности с центром M; $ACLB$ вписан в окружность, $\angle CLB = 180° - \angle CAB = 180 - \alpha$, $\Delta CLB \sim \Delta AML$ по 2 углам.

б) Найдем $\frac{S_{\Delta AML}}{S_{\Delta CLB}}$, если $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$.

$\frac{S_{\Delta AML}}{S_{\Delta CLB}} = k^2$; $k = \frac{AM}{CL} = \frac{CM}{CL}$; $\angle CLN = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle CML = \alpha$ (как накрест лежащий с углом ACM).

Из ΔCML, по теореме синусов, $\frac{CL}{\sin\angle CML} = \frac{CM}{\sin\angle CLM}$;

$$k=\frac{CM}{CL}=\frac{\sin\angle CLM}{\sin\angle CML}=\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\cos\angle BAC=\frac{7}{25};\quad \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2};\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{7}{25}}{2}=\frac{9}{25};$$

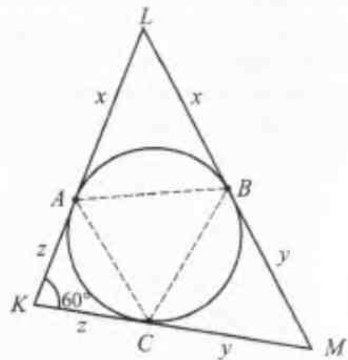
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5};\quad k=\frac{1\cdot5}{2\cdot3}=\frac{5}{6};\quad \frac{S_{\Delta AML}}{S_{\Delta CLB}}=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}.$$

---

13. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается сторон KL, LM и MK в точках A, B и C соответственно.

а) Докажите, что $KC=\dfrac{KL+KM-LM}{2}$.

б) Найдите отношение $BL:BM$, если известно, что $KC:CM=3:2$ и $\angle MKL=60^\circ$.



а) Докажем, что $KC=\dfrac{KL+KM-LM}{2}$.

KC и KA — отрезки касательных, проведенных из точки K, $KC=KA$.

$P_{\Delta KML}=KL+KM+LM=KA+AL+KC+CM+LM=$
$=2KC+(AL+CM)+LM=2KC+(BL+BM)+LM.$

Поскольку $AL=BL$ и $BM=CM$, $KL+KM+LM=2KC+2LM$; $KC=\dfrac{KL+KM-LM}{2}$, что и требовалось доказать.

б) Найдем $BL:BM$, если $KC:CM=3:2$ и $\angle MKL=60^\circ$.

Пусть $BL=x$, $BM=y$, $KC=z$.

Тогда $\dfrac{z}{y}=\dfrac{3}{2}$; $z=\dfrac{3}{2}y$.

Пусть $\dfrac{x}{y}=k$; $x=ky$.

По теореме косинусов, из ΔKML: $LM^2=KM^2+KL^2-2KL\cdot KM\cdot\cos\angle MKL$.

$$(ky+y)^2=\left(\frac{3}{2}y+y\right)^2+\left(\frac{3}{2}y+ky\right)^2-2\cdot\left(\frac{3}{2}y+y\right)\left(ky+\frac{3}{2}y\right)\cdot\frac{1}{2};$$

$$(k+1)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+k\right)^2-\frac{5}{2}\left(k+\frac{3}{2}\right);$$

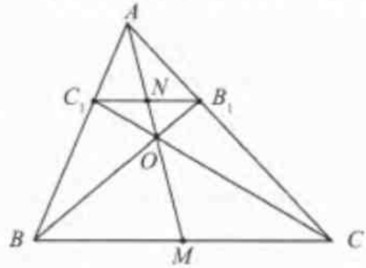
$$k=\frac{5}{2};$$

$$BL=\frac{5}{2}BM.$$

14. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причем $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырехугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.



Часто старшеклассники, видя такие задачи, вспоминают теорему Фалеса или теорему Менелая. Однако теорема Фалеса вряд ли годится для этого случая. Эту теорему так хорошо помнят только потому, что проходят в самом начале курса геометрии. Более универсальный прием — использование двух пар подобных треугольников. Он позволит обойтись и без теоремы Менелая, которая все-таки не входит в школьную программу. Редкий школьник помнит теорему Менелая наизусть, а вот про подобные треугольники знают все. Выбирайте, какой способ проще.

Пусть $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AC_1}{C_1B} = p$.

Тогда $AB_1 = p \cdot B_1C$.

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{p \cdot B_1C}{p \cdot B_1C + B_1C} = \frac{p}{p+1} = k.$$

Аналогично, $\dfrac{AC_1}{AB} = \dfrac{p}{p+1} = k$.

$\Delta AC_1B_1 \sim \Delta ABC$ (по углу и двум сторонам).

Тогда $C_1B_1 \parallel BC$, BCB_1C_1 — трапеция, $AO \cap B_1C_1 = N$, $(AO) \cap (BC) = M$.

Покажем, что N и M — середины B_1C_1 и BC. Другими словами, середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Этот факт носит название «Замечательное свойство трапеции» и входит в наш список полезных фактов.

$$\left.\begin{aligned} &\Delta C_1NO \sim \Delta CMO, \ \frac{C_1N}{CM} = \frac{C_1O}{OC} \\ &\Delta C_1B_1O \sim \Delta CBO, \ \frac{C_1B_1}{BC} = \frac{C_1O}{OC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{C_1N}{CM} = \frac{C_1B_1}{BC};\ \frac{C_1N}{C_1B_1} = \frac{CM}{BC}.$$

С другой стороны, $\left.\begin{aligned} \Delta AC_1N \sim \Delta ABM \\ \Delta AC_1B_1 \sim \Delta ABC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dfrac{C_1N}{BM} = \dfrac{C_1B_1}{BC};\ \dfrac{C_1N}{C_1B_1} = \dfrac{BM}{BC}$

Получим, что $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{CM}{BC}$; отсюда $BM = CM$, M — середина BC.

б) Найдем $\dfrac{S_{AB_1OC_1}}{S_{\Delta ABC}}$.

Если $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AC_1}{C_1B} = p = \dfrac{1}{4}$, то $\dfrac{AC_1}{AB} = \dfrac{p}{p+1} = k = \dfrac{1}{5}$.

$S_{AB_1OC_1} = S_{\Delta OB_1C_1} + S_{\Delta AB_1C_1}$, $\quad \dfrac{S_{AB_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \left(\dfrac{AB_1}{AC}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$; $\quad S_{\Delta AB_1C_1} = \dfrac{1}{25} S_{\Delta ABC}$.

$S_{\Delta BAB_1} = \dfrac{1}{5} S_{\Delta ABC}$, так как ΔABB_1 и ΔABC имеют равные высоты и $\dfrac{AB_1}{AC} = k = \dfrac{1}{5}$.

Тогда $S_{\Delta BB_1C_1} = \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{25}\right) S_{\Delta ABC} = \dfrac{4}{25} S_{\Delta ABC}$.

$\dfrac{S_{\Delta B_1C_1O}}{S_{\Delta BC_1O}} = \dfrac{B_1O}{BO} = \dfrac{1}{5}$; $S_{\Delta B_1C_1O} = \dfrac{1}{5} S_{\Delta BC_1O} = \dfrac{1}{6} S_{\Delta BC_1B_1} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{4}{25} S_{\Delta ABC} = \dfrac{2}{75} S_{\Delta ABC}$;

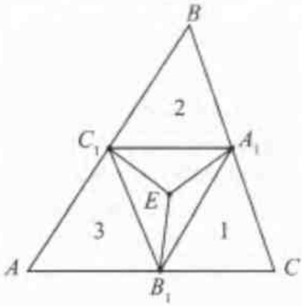
$S_{AB_1OC_1} = \left(\dfrac{1}{25} + \dfrac{2}{75}\right) S_{\Delta ABC} = \dfrac{5}{75} S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{15} S_{\Delta ABC}$.

---

15. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1.

б) Известно, что $AB = AC = 10$ и $BC = 12$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.



В этой задаче не обязательно рисовать все окружности, и сложные формулы тоже не нужны. Решаем легко!

а) Пусть E — точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2, описанных вокруг треугольников 1 и 2.

Покажем, что $E \in \omega_3$ — окружности, описанной вокруг треугольника 3.

$E \in \omega_1$, следовательно, четырехугольник A_1CB_1E вписан в окружность ω_1, $\angle A_1EB_1 = 180° - \angle C$.

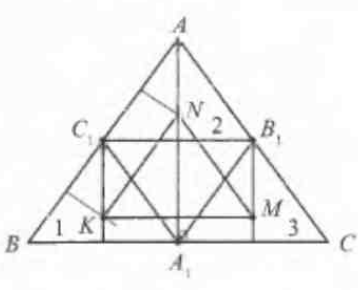
$E \in \omega_2$, следовательно, четырехугольник A_1BC_1E вписан в окружность ω_2, $\angle C_1EA_1 = 180° - \angle B$.

Тогда $\angle C_1EB_1 = 360° - \angle A_1EB_1 - \angle C_1EA_1 = 360° - (360° - \angle B - \angle C) = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$, $\angle C_1EB_1 + \angle A = 180°$, значит, точка E лежит на окружности ω_3, описанной вокруг треугольника B_1AC_1.

б) Пусть K, N, M — центры окружностей ω_1, ω_2 и ω_3.

По условию, треугольник ABC равнобедренный. Значит, и подобные ему треугольники 1, 2 и 3 — равнобедренные.

Точки K и M лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам BA_1 и A_1C. Значит, $KM = \dfrac{1}{2} BC = B_1C_1$.



Точки K и N лежат на серединных перпендикулярах к BC_1 и AC_1. Таким образом, $KN = \frac{1}{2}AB$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Треугольники 1, 2 и 3 равны, значит, равны и радиусы их описанных окружностей.

$\Delta KMN = \Delta A_1C_1B_1$ по трем сторонам; $\Delta KMN \sim \Delta BCA$, $k = \frac{1}{2}$.

Радиус окружности, вписанной в треугольник KMN, равен половине радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Выразим площадь треугольника ABC двумя способами. Очевидно, $AA_1 = \sqrt{AB^2 - BA_1^2} = 8$;

$S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 = 48$; $r = 3$.

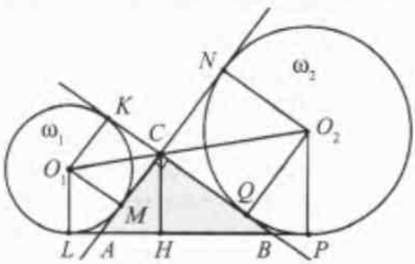
Тогда $r_{\Delta KMN} = \frac{3}{2}$.

---

16. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ABC, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 4 и 8. Прямая, содержащая гипотенузу AB, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ABC.

б) Найдите площадь треугольника ABC.



Часто можно услышать: «В интернете все есть». Да, в интернете можно найти решение этой задачи, и там применяется одна редкая формула. Но на экзамене вы не сможете заглянуть ни в Гугл, ни в Википедию. Сейчас мы решим эту задачу простым школьным способом.

Пусть L, K, M, N, P, Q — точки касания.

а) Докажем, что $AN = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$.

Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны. Значит, $AN = AP$;
$AN = AC + CN = AC + CQ$; $AP = AB + BP = AB + BQ$;

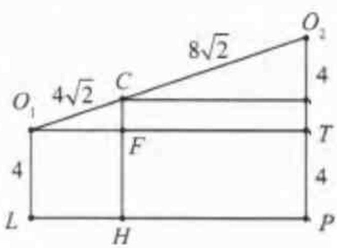
$2AN = AC + AB + CQ + BQ = AC + AB + BC$; $AN = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$.

б) Найдем $S_{\Delta ABC}$, если $r = O_1M = 4$, $R = O_2N = 8$.

Поскольку CMO_1K и CNO_2Q — квадраты, $MC = 4$, $QC = 8$, $C \in O_1O_2$, $O_1C = 4\sqrt{2}$, $O_2C = 8\sqrt{2}$.

Рассмотрим трапецию O_1O_2PL.

$O_1L = 4$, $O_2P = 8$, $O_1O_2 = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.



Точка C делит сторону O_1O_2 в отношении $O_1C : O_2C = 1 : 2$. Тогда $CF = \frac{4}{3}$ (из подобия треугольников O_1CF и O_1O_2T).

Проведем CH, причем CH — высота треугольника ABC.

$CH = CF + FH = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}.$

Из пункта (а): $\begin{cases} AN = AC + 8 = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC} \\ BK = BC + 4 = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC} \end{cases}$

Отсюда $BC = AC + 4$; $AC + 8 = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$; $AC + 8 = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}\cdot 4$; $\frac{1}{2}AB = 6$; $AB = 12$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot 12 = 32.$

Глава 6
ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА. «ЭКОНОМИЧЕСКИЕ» ЗАДАЧИ НА ЕГЭ

Легкая тема. Скучноватая по сравнению с полными сюрпризов задачами с параметрами или нестандартными задачами на числа и их свойства. Единственный ее «подводный камень» — большое количество вычислений. И чем проще они будут, тем лучше. В этой главе — схемы задач на кредиты, образцы решений задач по финансовой математике и приемы быстрого счета без калькулятора.

Задачи на кредиты обычно относятся к одному из двух характерных типов, которые легко различить между собой.

1-й тип. Выплаты кредита производятся **равными платежами**. Эта схема еще называется «аннуитет».

2-й тип. Выплаты кредита подбираются так, что **сумма долга уменьшается равномерно**. Это так называемая схема с дифференцированными платежами.

В задачах первого типа часто применяется формула суммы n членов **геометрической прогрессии**.

В задачах второго типа — формула суммы n членов **арифметической прогрессии**.

Вспомним, что такое арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа d:

$$a_{n+1} = a_n + d \ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Фиксированное число d называется разностью арифметической прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа q:

$$b_{n+1} = b_n q \ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Фиксированное число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суммы $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Две схемы решения задач на кредиты

Пусть S — сумма кредита, n — количество платежных периодов, p — процент по кредиту, начисляемый банком. Коэффициент $k = 1 + \frac{p}{100}$ показывает, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

1. Выплаты кредита равными платежами (аннуитет)

Схема погашения кредита: $\left(\left(\left(S \cdot k - X\right) \cdot k - X\right) \cdot k - X\right) \ldots \cdot k - X = 0.$

X — очередная выплата, n — число платежных периодов.

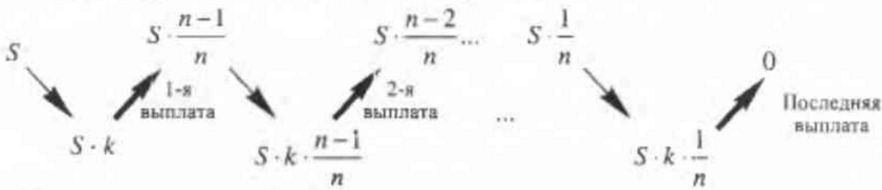
Раскроем скобки: $S \cdot k^n - X\left(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^2 + k + 1\right) = 0.$

Применяем формулу суммы геометрической прогрессии.

Получим: $S \cdot k^n - X\dfrac{k^n - 1}{k - 1} = 0.$

2. Равномерное уменьшение суммы долга (схема с дифференцированными платежами)

Схема погашения кредита для n платежных периодов:



n — число платежных периодов.

1-я выплата: $Z_1 = S \cdot k - S \cdot \dfrac{n-1}{n}.$

2-я выплата: $Z_2 = S \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot k - S \cdot \dfrac{n-2}{n}.$

. . .

n-я выплата: $Z_n = S \cdot \dfrac{1}{n} \cdot k.$

Сумма всех выплат:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = S \cdot k\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Применяем формулу суммы арифметической прогрессии. Общая сумма выплат:

$$Z = S \cdot k \cdot \frac{n+1}{2} - S \cdot \frac{n-1}{2} = S + S\frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{100} = S + П,$$

где $П$ — величина переплаты, $П = S \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{100}$.

Вообще к первому типу можно отнести все задачи, где одинаковы (или известны) платежи. Ко второму — задачи, где равномерно (или по известной схеме) уменьшается сумма долга.

---

1. 1 июня 2013 года Ярослав взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Ярослав переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Ярослав может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Если бы банк не начислял проценты, то Ярослав смог бы вернуть долг за 3 месяца. Поскольку банк начисляет проценты, количество месяцев $n \geq 4$. Покажем, что за 4 месяца Ярослав выплатит кредит. Поскольку проценты начисляются на оставшуюся часть долга, максимальными они будут в первый месяц, когда сумма долга максимальна.

Проценты, начисленные за первый месяц, равны $0{,}01 \cdot 900 = 9$ тысяч рублей.

Значит, проценты, начисленные за 4 месяца, не превышают $9 \cdot 4 = 36$ тысяч рублей. За 4 месяца Ярослав сможет выплатить и «тело кредита», и проценты.

Нам повезло с условием задачи — сумма долга равна 900 тысяч рублей, а максимальная выплата — 300 тысяч рублей. Что делать, если условие не настолько очевидно?

Решим эту задачу в общем виде.

Пусть S — сумма кредита; $p\%$ — процентная ставка банка.

Тогда после каждого начисления процентов сумма долга увеличивается в $k = 1 + \frac{p}{100}$ раза.

Пусть X — величина платежа.

После первого начисления процентов и первого платежа сумма долга равна $Sk - X$, после второго $(Sk - X)k - X$.

Например, долг выплачен равными платежами за 5 платежных периодов. Тогда

$$\left(\left(\left((S \cdot k - X) \cdot k - X\right) \cdot k - X\right) \cdot k - X\right) \cdot k - X = 0,$$

$$Sk^5 - X \cdot \left(k^4 + k^3 + k^2 + k + 1\right) = 0.$$

Заметим, что в скобках — сумма 5 членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1$; $q = k$.

Поскольку $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, эта сумма равна $\frac{k^5 - 1}{k - 1}$.

Получим: $Sk^5 = X \cdot \frac{k^5 - 1}{k - 1}$.

В общем случае для n платежных периодов $Sk^n = X \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$.

Из этой формулы находим S, X или n.

2. 31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платеж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Обозначим сумму кредита S, где $S = 7\,378\,000$ рублей, $p = 12{,}5\%$;

$k = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{12{,}5}{100} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$.

1) Савелий выплачивает кредит тремя равными платежами X.

$$\left(\left(S \cdot k - X\right) \cdot k - X\right) \cdot k - X = 0.$$

Раскрыв скобки, получим: $Sk^3 - X \cdot \left(k^2 + k + 1\right) = 0$; $X = \frac{S \cdot k^3}{k^2 + k + 1}$.

В этом случае Савелий выплатит банку $3X$ рублей.

2) Савелий выплачивает кредит двумя равными платежами Y:

$(S \cdot k - Y) \cdot k - Y = 0$; $S \cdot k^2 - Y(k + 1) = 0$; $Y = \frac{Sk^2}{k+1}$.

Всего Савелий выплатит $2Y$ рублей.

Найдем разность $3X - 2Y$.

Дальше — просто арифметика. Действия с дробями.

$$3X - 2Y = \frac{3Sk^3}{k^2 + k + 1} - \frac{2Sk^2}{k+1} = Sk^2\left(\frac{3k}{k^2 + k + 1} - \frac{2}{k+1}\right) = S \cdot \frac{9^2}{8^2} \cdot \left(\frac{3 \cdot 9}{8 \cdot \left(\frac{9^2}{8^2} + \frac{9}{8} + 1\right)} - \frac{2}{\frac{9}{8} + 1}\right) =$$

$$= S \cdot \frac{81}{64} \cdot \left(\frac{3 \cdot 9 \cdot 8^2}{8 \cdot (81 + 72 + 64)} - \frac{2 \cdot 8}{17}\right) = S \cdot \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{27}{217} - \frac{2}{17}\right) = S \cdot \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{459 - 434}{217 \cdot 17}\right) =$$

$$S \cdot \frac{81}{8} \cdot \frac{25}{217 \cdot 17} = \frac{7378 \cdot 81 \cdot 25}{8 \cdot 217 \cdot 17} \text{(тыс. рублей)} = \frac{434 \cdot 81 \cdot 25}{4 \cdot 217} \text{(тыс. рублей)} =$$

$$= \frac{81 \cdot 25}{4} \text{(тыс. рублей)} = 506\ 250 \text{ рублей.}$$

3. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Как всегда, введем обозначения: $S = 9\,930\,000$ рублей; $p = 10\%$; X — сумма ежегодного платежа; $k = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}1$.

$Sk^3 - X\left(k^2 + k + 1\right) = 0$; $X = \frac{S \cdot k^3}{k^2 + k + 1} = \frac{S \cdot k^3 (k-1)}{k^3 - 1}$.

Для того чтобы проще было считать, мы домножили числитель и знаменатель на $(k-1)$ и применили формулу разности кубов: $k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$.

В нашей задаче $k=1+\dfrac{p}{100}=1{,}1$.

Применим формулу куба суммы: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$$k^3=1{,}1^3=\left(1+\frac{1}{10}\right)^3=1+3\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=1{,}331.$$

Расчеты удобно вести в тысячах рублей. Получим:

$$X=\frac{9930\cdot 1{,}331\cdot 0{,}1}{0{,}331}=\frac{933\cdot 1331}{331}=3\cdot 1331=3993 \text{ (тыс. рублей).}$$

В задаче применяется та же схема, что и в предыдущей. Обратите внимание, как упростить вычисления и обойтись без расчетов в столбик.

В следующей задаче — не кредит, а вклад. Но математическая модель аналогичная.

---

4. Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял к вкладу?

Пусть S — сумма вклада, $p=10\%$; $k=1+\dfrac{p}{100}=1{,}1$. Расчеты удобно вести в тысячах рублей.

Пусть X — ежегодно добавляемая сумма,

$$\big((S\cdot k+X)\cdot k+X\big)\cdot k=S\cdot(1+0{,}485);\ Sk^2+X(k+1)=\frac{S}{k}\cdot 1{,}485;$$

$$X=\frac{\dfrac{1{,}485\cdot S}{1{,}1}-S\cdot 1{,}21}{2{,}1}=\frac{(1{,}35-1{,}21)\cdot S}{2{,}1}=\frac{0{,}14S}{2{,}1}=\frac{140\cdot 360}{210}=\frac{2\cdot 360}{3}=240 \text{ тыс. рублей.}$$

В следующей задаче платежи не равные, однако известен порядок выплат: каждый следующий платеж ровно вдвое меньше предыдущего. Решаем по той же схеме.

---

5. Герасим взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплаты кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10% оставшуюся сумму долга, а затем Герасим переводит в банк очередной платеж. Известно, что Герасим погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Герасим заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

Как всегда, введем обозначения: $S=804$ тыс. рублей; $p=10\%$; $k=1+\dfrac{p}{100}=1{,}1$.

Пусть X — третий платеж. Тогда второй платеж равен $2X$, а первый — $4X$.

Аналогично предыдущим задачам,

$$((S\cdot k-4X)\cdot k-2X)\cdot k-X=0;\ Sk^3-X\left(4k^2+2k+1\right)=0;$$

$$X=\frac{Sk^3}{4k^2+2k+1}=\frac{804\cdot 1{,}331}{4\cdot 1{,}21+2{,}2+1}\text{ (тыс. рублей)}=\frac{804\cdot 1{,}331}{8{,}04}\text{ (тыс. рублей)}=$$

$$=100\cdot 1{,}331\text{ (тыс. рублей)}=133{,}1\text{ (тыс. рублей)}=133\,100\text{ рублей.}$$

Обратите внимание на вычисления. Что если бы я (как многие школьники делают) стала перемножать S и k^3 в числителе? Как бы я поняла, на что можно сократить? Решая задачу, ставьте себе дополнительную цель: максимально упростить вычисления.

---

6. 31 декабря 2014 года Аристарх взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5%), затем Аристарх переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Аристарх выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

Почему в ЕГЭ так много задач, где персонаж берет кредит именно 31 декабря? Для меня это загадка. Представляю, как Аристарх, Сергей и Савелий с усилием отрываются от новогоднего оливье и идут по морозу в банк брать кредиты.

$S=6902$ тыс. рублей; $p=12{,}5\%$; $k=1+\frac{p}{100}=1+\frac{125}{1000}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$

X — сумма ежегодного платежа,

$$(((S\cdot k-X)\cdot k-X)\cdot k-X)\cdot k-X=0;\ Sk^4-X\left(k^3+k^2+k+1\right)=0.$$

Применим формулу суммы геометрической прогрессии:

$$Sk^4=X\cdot\frac{k^4-1}{k-1}=0;\ X=\frac{Sk^4(k-1)}{k^4-1}.$$

$$X=\frac{S\cdot 9^4\left(\frac{9}{8}-1\right)}{8^4\cdot\left(\frac{9^4}{8^4}-1\right)}=\frac{S\cdot 9^4}{8\cdot\left(9^4-8^4\right)}=\frac{S\cdot 9^4}{8\cdot\left(9^2-8^2\right)\left(9^2+8^2\right)}=\frac{S\cdot 9^4}{8\cdot(9+8)\left(9^2+8^2\right)}=\frac{6902\cdot 81^2}{8\cdot 17\cdot 145}=$$

$$=\frac{406\cdot 81^2}{8\cdot 145}=\frac{203\cdot 81^2}{4\cdot 145}=\frac{29\cdot 7\cdot 81^2}{4\cdot 29\cdot 5}=2296{,}35\text{ (тыс. рублей)}=2\,296\,350\text{ рублей.}$$

---

7. Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка — 10% годовых. На какое минимальное количество лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

Пусть Оля берет кредит на n лет. Как быть с тем, что последняя выплаченная сумма может быть меньше предыдущих? Очень просто. Если последняя внесенная сумма будет равна предыдущим, Оля не только погасит кредит, но и переплатит, то есть на карте появятся ее личные деньги. Другими словами, ее долг станет отрицательным. Запишем неравенство: $S\cdot k^n-X\left(k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k+1\right)\le 0.$

В скобках — сумма n членов геометрической прогрессии. Проверьте: здесь n слагаемых, степени которых от 0 до $n-1$. Эта сумма равна $S_n = \dfrac{k^n - 1}{k-1}$.

Тогда $S \cdot k^n - X \cdot \dfrac{k^n - 1}{k-1} \le 0$.

Умножим обе части неравенства на $(k-1) > 0$.

$S(k-1) \cdot k^n - X \cdot k^n + X \le 0;\quad k^n \ge \dfrac{X}{X - S(k-1)}$.

Мы получили: $1{,}1^n \ge \dfrac{24}{24 - 0{,}1 \cdot 100}$. Все расчеты мы ведем в тысячах рублей.

$1{,}1^n \ge \dfrac{24}{14}$; $1{,}1^n > 1{,}714$. Округлив десятичную дробь, равную $\dfrac{24}{14}$, мы перешли к строгому неравенству.

Надо найти n. Единственный способ — возводить 1,1 в натуральную степень до тех пор, пока мы не превысим 1,714. И сейчас я покажу вам полезный прием, помогающий без калькулятора и столбика вычислить $1{,}1^n$. Вы также узнаете, что такое бином Ньютона и треугольник Паскаля.

Мы знаем, что $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Выражение $(a+b)^n$ называется **бином Ньютона.**

$(a+b)^n = c_1 \cdot a^n + c_2 \cdot a^{n-1} \cdot b + \ldots + c_{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + c_n \cdot b^n$.

Обратите внимание: у каждого слагаемого степень a уменьшается, степень b — возрастает. Например,

$(a+b)^7 = a^7 + 7 \cdot a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Так вот ты какой, бином Ньютона! Остается лишь вопрос: как вычислить коэффициенты? Самый простой способ их нахождения — **треугольник Паскаля**.

Смотрите, как он строится. «Боковые стороны» этого треугольника состоят из единиц. А все числа внутри строк получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки.

```
                     1
                   1   1
n = 2            1   2   1
n = 3          1   3   3   1
n = 4        1   4   6   4   1
n = 5      1   5  10  10   5   1
n = 6    1   6  15  20  15   6   1
n = 7  1   7  21  35  35  21   7   1
n = 8 1  8  28  56  70  56  28   8   1
```

Так в какую же степень надо возвести 1,1 для того, чтобы результат превышал 1,714?

Возьмем $n = 6$.

$1{,}1^6 = (1 + 0{,}1)^6 > 1 + 6 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}01 > 1{,}714$.

Может быть, подойдет и $n = 5$?

Нет, не подойдет. Потому что

$1{,}1^5 = (1 + 0{,}1)^5 = 1 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}01 + 10 \cdot 0{,}001 + 5 \cdot 0{,}0001 + 0{,}00001 < 1{,}614$.

Ответ: $n = 6$.

8. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 15 млн рублей.

Пусть S — первоначальная сумма вклада, $p = 10\%$; $k = 1{,}1$.

Будем вести расчеты в миллионах рублей. Обратите внимание на этот прием. Писать длинные ряды нулей не нужно!

$$\left(\left(S \cdot k^2 + 2\right) \cdot k + 2\right) \cdot k < 15;$$

$$Sk^4 + 2k^2 + 2k < 15;$$

$$S < \frac{15 - 2k^2 - 2k}{k^4};$$

$$S < 7{,}2;\;\; S_{\max} = 7.$$

В этой задаче пришлось считать в столбик. Но я думаю, что после бинома Ньютона с делением в столбик вы справитесь.

А теперь второй тип задач на кредиты — такой, где сумма долга уменьшается равномерно. Это ключевые слова в условии задачи!

9. Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $q\%$ этой суммы, и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите q.

Приятная новость: задачу можно решить за 30 секунд! Нам поможет «волшебная формула» для задач с дифференцированными платежами. Вы видели ее в начале главы.

Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S, причем платежи подобраны так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно. Тогда величина переплаты $П$ и полная сумма выплат B за все время выплаты кредита даются формулами

$$П = \frac{q}{100} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot S;\;\; B = S\left(1 + \frac{q(n+1)}{200}\right).$$

Применим формулу к нашей задаче.

$П = 0{,}27S$ (величина переплаты).

$$\frac{q}{100} \cdot \frac{18}{2} \cdot S = \frac{27}{100} S.$$

$q = 3$. Это ответ.

10. 15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастет на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Снова наша «волшебная формула»! Ключевые слова в задаче — «15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца». Это значит, что долг уменьшается равномерно.

В нашей задаче $n = 39$.

$$\Pi = \frac{r}{100} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot S = 0,2S; \; \frac{r}{100} \cdot \frac{40}{2} \cdot S = \frac{20}{100} S; \; r = 1.$$

Ответ: 1.

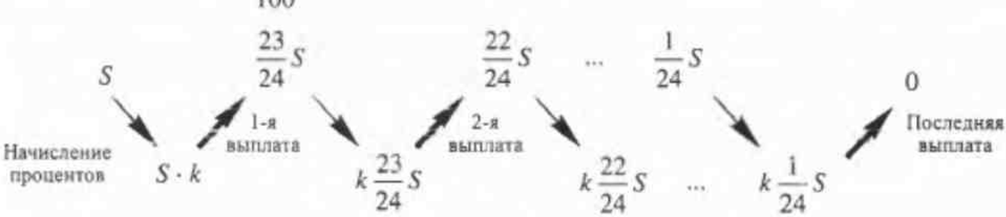
11. Жанна взяла в банке в кредит 1,8 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 1%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернет банку в течение первого года кредитования?

Снова сумма долга уменьшается равномерно. Но «волшебную формулу» применять рискованно: ведь надо посчитать, какую сумму Жанна вернет банку не за весь период, а только в течение первого года кредитования. Поэтому мы решим задачу в общем виде, а заодно выведем ту формулу, которой успешно пользовались в предыдущих задачах.

Пусть S — первоначальная сумма долга, $S = 1800$ тысяч рублей.

Нарисуем схему начисления процентов и выплат. И заметим некоторые закономерности.

Как обычно, $k = 1 + \frac{p}{100}$.



Сумма долга уменьшается равномерно. Можно сказать, равными ступеньками. И каждая ступенька равна $\frac{1}{24}S$. После первой выплаты сумма долга равна $\frac{23}{24}S$, после второй $\frac{22}{24}S$.

Тогда первая выплата $X_1 = kS - \frac{23}{24}S$, вторая выплата $X_2 = k \cdot \frac{23}{24}S - \frac{22}{24}S$,

...

последняя в году выплата $X_{12} = k \cdot \frac{13}{24}S - \frac{12}{24}S$.

Сумма всех выплат в течение первого года:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_{12} = kS\left(1 + \frac{23}{24} + ... + \frac{13}{24}\right) - S\left(\frac{23}{24} + \frac{22}{24} + ... + \frac{12}{24}\right).$$

В первой «скобке» — сумма 12 членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = \frac{13}{24}$; $a_{12} = \frac{24}{24} = 1$. Обозначим эту сумму Z_1.

$$Z_1 = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{13 + 24}{2 \cdot 24} \cdot 12 = \frac{37}{4}.$$

Во второй скобке — также сумма 12 членов арифметической прогрессии, в которой $b_1 = \frac{12}{24}$; $b_n = \frac{23}{24}$. Эту сумму обозначим Z_2.

$$Z_2 = \frac{b_1 + b_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{12 + 23}{2 \cdot 24} \cdot 12 = \frac{35}{4}.$$

Общая сумма выплат за год:

$$X = S(kZ_1 - Z_2) = \frac{1800}{4}(1{,}01 \cdot 37 - 35) = \frac{1800 \cdot 2{,}37}{4} = 2{,}37 \cdot 450 = 1066{,}5 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 1 066 500 рублей.

В следующей задаче мы тоже рисуем такую цепочку выплат. И пусть долг уменьшается не равномерно, но мы знаем закономерность его уменьшения.

---

12. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}6S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

В этой задаче $p = 25\%$; $k = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Год	2016		2017		2018		2019		2020
июль	S		$0{,}8\,S$		$0{,}6\,S$		$0{,}4\,S$		0
			1-я выплата, X_1		2-я выплата, X_2		3-я выплата, X_3		4-я выплата, X_4
январь		kS		$0{,}8\,kS$		$0{,}6\,kS$		$0{,}4\,kS$	

Общая сумма выплат:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = kS - 0{,}8S + 0{,}8kS - 0{,}6S + 0{,}6kS - 0{,}4S + 0{,}4kS =$$
$$= kS\left(1 + 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}4\right) - S\left(0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}4\right) = 2{,}8kS - 1{,}8S.$$

По условию, S — целое, а $X < 50$. Будем вести расчеты в миллионах рублей.

$$S\left(2{,}8\cdot\frac{5}{4} - 1{,}8\right) < 50;\quad 1{,}7S < 50;\quad S_{\max} = 29 \text{ млн рублей.}$$

Вот задача ЕГЭ по математике 2017 года.

---

13. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2017, 2018 и 2019 долг остается равным S тыс. рублей;
— выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс. рублей;
— к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Введем переменные: $k = 1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$, $Y = 625$ тыс. рублей.

Рисуем схему погашения кредита.

Год	2016		2017		2018		2019		2020		2021
июль	S		S		S		S		$kS - Y$		0
									Y		Y
январь		kS		kS		kS		kS		$k(kS - Y)$	

Общая сумма выплат: $X = 3\cdot(kS - S) + 2Y = 3S(k-1) + 2Y$.

Кроме того, долг был полностью погашен последней выплатой Y.

Это значит, что $k(kS - Y) = Y$, и тогда $S = \frac{(k+1)Y}{k^2}$.

$$X = 3\frac{(k+1)Y}{k^2}(k-1) + 2Y = 3Y\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) + 2Y = Y\left(5 - \frac{3}{k^2}\right) = 625\left(5 - \frac{3\cdot 16}{25}\right) =$$
$$= \frac{625\cdot 77}{25} = 77\cdot 25 = 1925 \text{ тыс. рублей.}$$

В 2018 году на ЕГЭ по математике появились задачи, напугавшие многих выпускников. «Это страшно, — говорили они после экзамена. — Никогда такого не было. Решить невозможно».

Действительно ли настолько страшны были «банковские» задачи на ЕГЭ по математике 2018 года? Давайте разберемся.

---

14. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

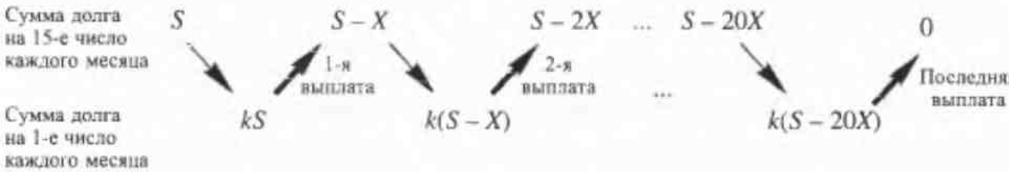
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

Прежде всего, введем переменные. Расчеты будем вести в тысячах рублей.

Пусть S — сумма, которую планируется взять в кредит, Z — общая сумма выплат, $Z = 1604$ (тыс. рублей), X — ежемесячная выплата, $X = 30$ (тысяч рублей), $p = 3\%$ — процент, начисляемый банком ежемесячно. После первого начисления процентов сумма долга равна $S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S \cdot k$. После каждого начисления процентов сумма долга увеличивается в $k = 1 + \frac{p}{100}$ раза. В нашей задаче $k = 1{,}03$.

Определим, к какому типу относится задача. Долг уменьшается равномерно (по условию, 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца). Значит, это задача второго типа. А в задачах второго типа мы рисуем следующую схему:



После первого начисления процентов сумма долга равна kS. Затем, после первой выплаты, сумма долга равна $S - X$, где $X = 30$ (тысяч рублей).

Значит, первая выплата равна $kS - (S - X)$ (смотри схему).

Вторая выплата: $k(S - X) - (S - 2X)$.

…

Последняя выплата: $k(S - 20X)$.

Найдем общую сумму выплат Z.

$Z = kS - (S - X) + k(S - X) - (S - 2X) + \ldots + k(S - 20X) =$

$= k(S + S - X + S - 2X + \ldots + S - 20X) - (S - X + S - 2X + \ldots + S - 20X)$.

Мы сгруппировали слагаемые, содержащие множитель k, и те, в которых нет k.

Упростим выражения в скобках:

$k(21S - X(1 + 2 + 3 + \ldots + 20)) - (20S - X(1 + 2 + 3 + \ldots + 20)) = Z.$

В задачах этого типа (когда сумма долга уменьшается равномерно) применяется формула для суммы арифметической прогрессии: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$

В этой задаче мы тоже ее используем.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = \frac{1 + 20}{2} \cdot 20 = 210.$$

Получим:

$k(21S - 210X) - 20S + 210X = S(21k - 20) - 210X(k - 1) = Z.$

Осталось подставить числовые значения.

$S(21 \cdot 1{,}03 - 20) - 210 \cdot 30 \cdot 0{,}03 = 1604.$

Отсюда $S = 1100$ тысяч рублей = 1 100 000 рублей.

Следующая задача относится к тому же типу. Математическая модель та же самая. Только найти нужно другую величину — процент, начисляемый банком. К тому же количество месяцев, на которое взят кредит, неизвестно.

---

15. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $(n + 1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

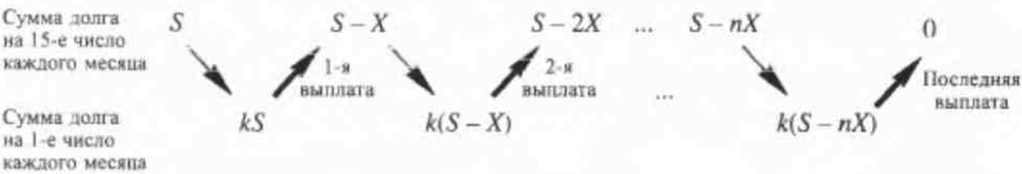
— к 15-му числу $(n + 1)$ — го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Как всегда, введем обозначения. Для удобства ведем расчеты в тысячах рублей.

S = 1 000 000 рублей = 1000 (тыс. рублей) — сумма кредита, $X = 40$ (тыс. рублей) — величина регулярной выплаты, $Z = 1378$ (тыс. рублей) — общая сумма выплат, $k = 1 + \dfrac{r}{100}$ — коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов.

Рисуем уже знакомую схему погашения кредита.



Первая выплата: $kS - (S - X)$.

Вторая выплата: $k(S - X) - (S - 2X)$.

…

Последняя выплата: $k(S - nX)$.

По условию, 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей.

Значит, $S - nX = 200$. Подставим числовые данные:

$1000 - 40n = 200$; тогда $n = 20$, $n + 1 = 21$, то есть кредит был взят на 21 месяц. Очень удобно — количество месяцев в этой задаче оказалось таким же, как в предыдущей. Поэтому кратко повторим основные моменты решения.

Общая сумма выплат Z:

$Z = kS - (S - X) + k(S - X) - (S - 2X) + \ldots + k(S - X) =$

$= k(S + S - X + S - 2X + \ldots + S - 20X) - (S - X + S - 2X + \ldots + S - 20X) =$

$= k(21S - X(1 + 2 + 3 + \ldots + 20)) - (20S - X(1 + 2 + 3 + \ldots + 20)) =$

$= k(21S - 210X) - 20S + 210X = S(21k - 20) - 210X(k - 1)$.

Мы снова использовали ту же формулу для суммы арифметической прогрессии:

$$1+2+3+\ldots+20=\frac{1+20}{2}\cdot 20=210.$$

По условию, $Z = 1378$ (тыс. рублей).

Выразим k из формулы $S(21k - 20) - 210X(k - 1) = Z$.

$$k=\frac{Z+20S-210X}{21(S-10X)}.$$

Подставим данные из условия задачи.

$$k=\frac{1378+20\cdot 1000-210\cdot 40}{21\cdot(1000-10\cdot 40)}=1,03.$$

Ответ: $r = 3\%$.

Тема «Финансовая математика» включает также задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций.

---

16. Алексей приобрел ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Пока Алексей не продал ценную бумагу, ее стоимость ежегодно увеличивается на 2 тысячи рублей. Через n лет ее стоимость равна $7 + 2(n - 1) = 5 + 2n$ тысяч рублей.

Когда Алексей (через n лет после покупки) продал ценную бумагу и положил деньги на банковский счет, сумма на счете ежегодно увеличивается на 10% (то есть в 1,1 раза) в течение $30 - n$ лет.

Значит, через 30 лет после приобретения ценной бумаги эта сумма равна

$S_n = (5 + 2n) \cdot 1,1^{30-n}$.

Рассмотрим функцию $S(x) = (5 + 2x) \cdot 1,1^{30-x}$, совпадающую с S_n при целых значениях x, и найдем ее наибольшее значение на отрезке $0 \le x \le 30$.

Мы знаем, как найти наибольшее значение функции на отрезке. Взять производную, приравнять ее к нулю, найти точки экстремума, сравнить значения в точке максимума и на концах отрезка.

$S'(x) = (5 + 2x)' \cdot 1{,}1^{30-x} + (5 + 2x) \cdot (1{,}1^{30-x})' = 2 \cdot 1{,}1^{30-x} - (5 + 2x) \cdot 1{,}1^{30-x} \cdot \ln 1{,}1 =$
$= 1{,}1^{30-x}(2 - (5 + 2x) \cdot \ln 1{,}1)$.

Приравняем производную к нулю.

Поскольку $1{,}1^{30-x} > 0$, исследуем знак выражения $2 - (5 + 2x) \cdot \ln 1{,}1 = 2 - 5\ln 1{,}1 - 2x \cdot \ln 1{,}1$.

$S'(x) = 0$ при $x_0 = \dfrac{2 - 5\ln 1{,}1}{2\ln 1{,}1}$.

$S'(x) > 0$, если $x < x_0$.

$S'(x) < 0$, если $x > x_0$.

Значит, точка $x_0 = \dfrac{2 - 5\ln 1{,}1}{2\ln 1{,}1}$ — точка максимума функции $S(x)$.

Хорошо, но чем это нам поможет? Ведь значение x_0 невозможно посчитать без калькулятора. Тупик? Зря вычисляли производную?

Нет, не зря. Мы выяснили, что функция стоимости ценной бумаги имеет точку максимума, причем единственную. И если в определенный момент не продать эту ценную бумагу, в итоге ее стоимость будет меньше максимально возможной.

Как же вычислить этот момент? Найдем, после скольких лет хранения будет более выгодно продать ценную бумагу и положить деньги на счет, чем продолжать хранить.

При хранении бумаги ее стоимость ежегодно увеличивается на 2 тысячи рублей. При продаже бумаги — увеличивается в 1,1 раза.

Пусть в момент продажи стоимость ценной бумаги $S(k)$ равна $S(k) = 5 + 2k$.

Если продать бумагу и положить деньги в банк, сумма будет равна $1{,}1\,(5 + 2k)$.

Если продолжать хранить — получим $5 + 2k + 2 = 7 + 2k$.

Необходимо выполнение условия: $1{,}1(5 + 2k) > 7 + 2k$; $5{,}5 + 2{,}2k > 7 + 2k$; $0{,}2k > 1{,}5$; $k > 7{,}5$. Тогда $k = 8$.

Этого условия достаточно, поскольку мы доказали, что функция $S(x)$ имеет единственную точку максимума. Значит, ценную бумагу надо продать на восьмой год после ее приобретения.

Вот похожая задача.

---

17. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1, 2\ldots$) В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года k, то в конце двадцать пятого года на его счете будет $S(k) = k^2(1 + r)^{25-k}$ тысяч рублей.

Рассмотрим функцию $S(x) = x^2(1 + r)^{25-x}$, совпадающую с $S(k)$ при натуральных x, и найдем производную этой функции:

$S'(x) = 2x(1 + r)^{25-x} - x^2(1 + r)^{25-x}\ln(1 + r) = (1 + r)^{25-x}(2x - x^2 \cdot \ln(1 + r))$.

Приравняем $S'(x)$ к нулю и найдем, что $S'(x) = 0$, если $x = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$.

Определим знаки производной и промежутки возрастания и убывания функции $S(x)$.

Мы получили, что функция $S(x)$ имеет точку максимума $x_0 = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$.

Согласно условию, продавать ценные бумаги необходимо строго в конце двадцать первого года. Значит, если продать их в конце двадцать первого года, сумма на счете будет больше, чем при продаже бумаг в конце 20-го года или в конце 22-го года. Поскольку функция $S(x)$ имеет единственную точку максимума, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} S(21) > S(20) \\ S(21) > S(22) \end{cases}.$$

Мы получим

$$\begin{cases} 21^2 \cdot (1+r)^4 > 20^2 \cdot (1+r)^5 \\ 21^2 \cdot (1+r)^4 > 22^2 \cdot (1+r)^3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1+r < \left(\dfrac{21}{20}\right)^2 \\ 1+r > \left(\dfrac{22}{21}\right)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1+r < \dfrac{441}{400} \\ 1+r > \dfrac{484}{441} \end{cases}.$$

$\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$. Это ответ.

Глава 7
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Как научиться решать задачи с параметрами? Вы заметили, что каждую тему в этой книге мы начинаем с краткой теории. Что же на этот раз?

Для того чтобы решать любые задачи с параметрами, необходимы знания о графиках элементарных функций и преобразованиях графиков. Надо также знать, какие уравнения задают на плоскости окружность, круг, ромб и другие «базовые элементы» задач с параметрами.

Существует всего пять типов элементарных функций.

1. Степенные.

Это функции вида $y = x^a$. К этому типу относятся: линейные, квадратичные, кубические, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$ и многие другие — такие, которые содержат переменную, взятую в определенной степени.

2. Показательные — функции вида $y = a^x$.

3. Логарифмические — функции вида $y = \log_a x$.

4. Тригонометрические, в чьих формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

5. Обратные тригонометрические — содержат $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$.

Элементарными они называются потому, что из них, как из элементов, получаются все остальные, встречающиеся в школьном курсе. Например, $y = x^2 e^x$ — произведение квадратичной и показательной функций; $y = \sin(a^x)$ — сложная функция, т. е. комбинация двух функций — показательной и тригонометрической.

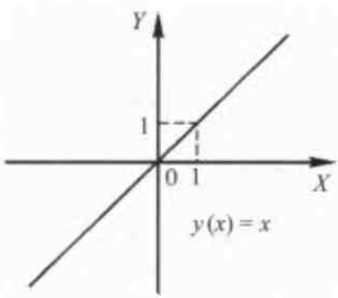
Уравнения, которые вы решаете, также обычно относятся к одному из этих пяти типов. И для каждого типа есть свои способы решения, основанные на тех или иных свойствах функций.

Вспомним графики основных элементарных функций.

Степенные функции

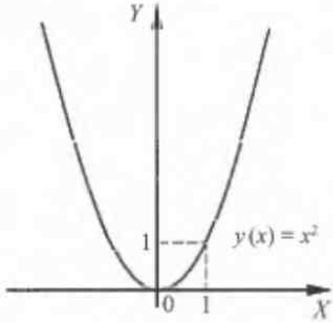
1. Линейная функция $y = kx + b$.
Пример: $y = x$.

Прямые, имеющие одинаковые угловые коэффициенты, параллельны.
Прямые, для угловых коэффициентов которых выполняется равенство $k_1 k_2 = -1$, перпендикулярны.

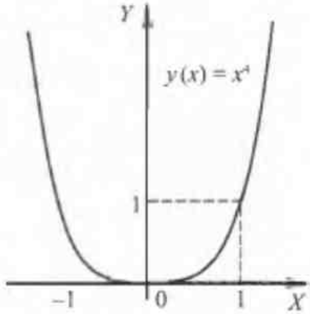


2. Квадратичная парабола $y = ax^2 + bx + c$.
Пример: $y = x^2$.
$a > 0$ — ветви вверх, $a < 0$ — ветви вниз.

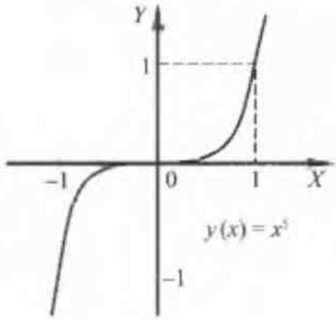
Вершина параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.



3. Функция $y = x^n$, n — четное, $n = 2, 4, 6, \ldots$
Функция в этом случае четная.

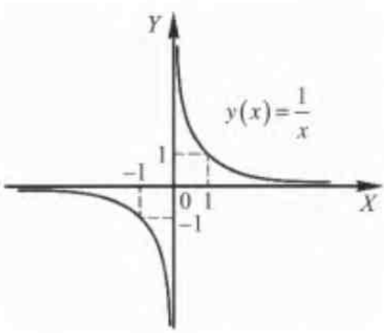


Функция $y = x^n$, n — нечетное, $n = 3, 5, 7, \ldots$
Функция также нечетная.

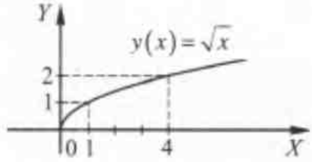


4. Гипербола $y = \dfrac{k}{x}$, $x \neq 0$

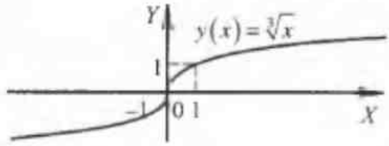
Пример: $y = \dfrac{1}{x}$.



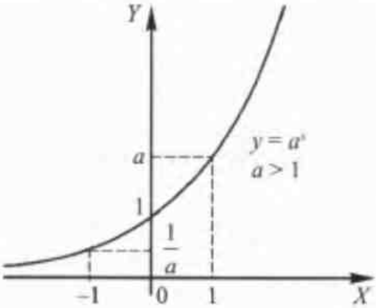
5. $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.



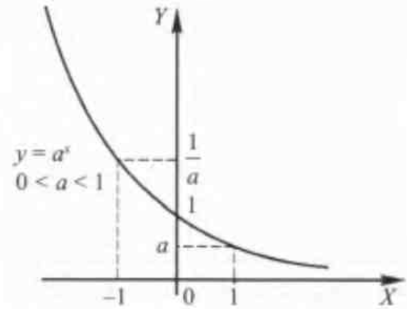
6. $y = \sqrt[3]{x}$.



Показательная функция

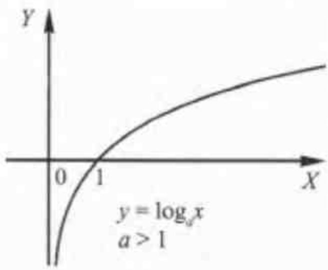


1. $y = a^x$
$a > 1$

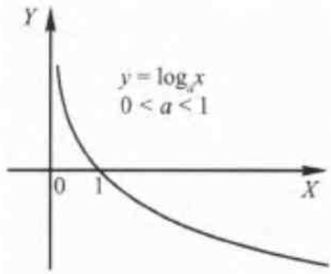


2. $y = a^x$
$0 < a < 1$

Логарифмическая функция



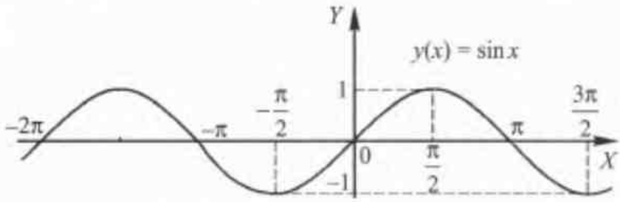
1. $y = \log_a x$
$a > 1$



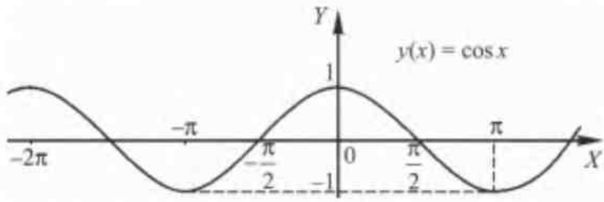
2. $y = \log_a x$
$0 < a < 1$

Тригонометрические функции

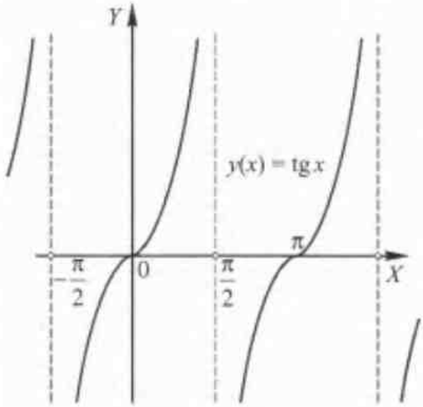
1. $y = \sin x$



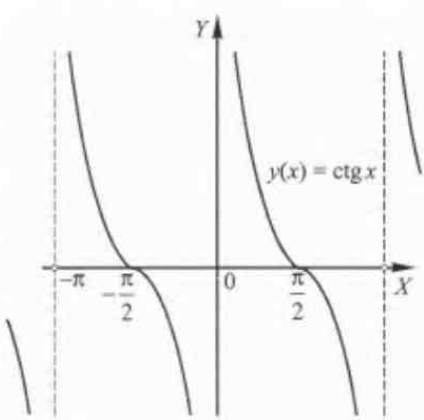
2. $y = \cos x$



3. $y = \operatorname{tg} x$

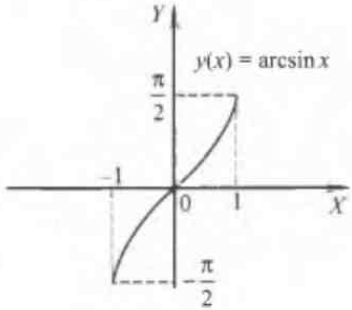


4. $y = \operatorname{ctg} x$

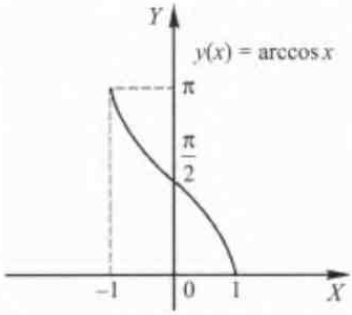


Обратные тригонометрические функции

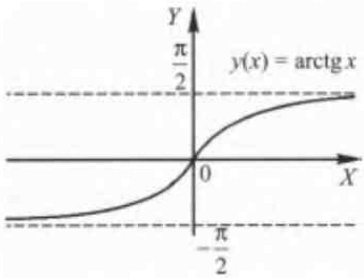
1. $y = \arcsin x$



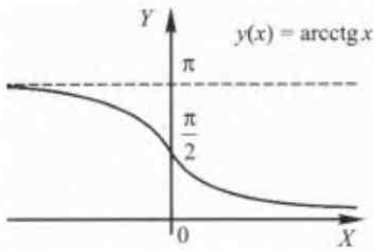
2. $y = \arccos x$



3. $y(x) = \operatorname{arctg} x$

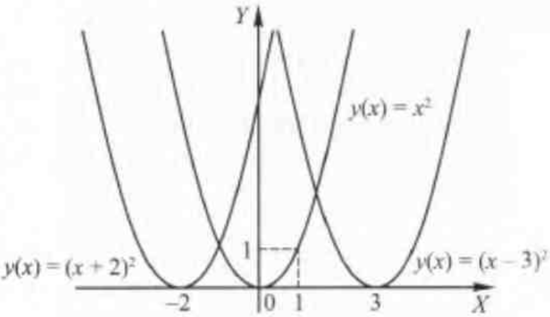


4. $y(x) = \operatorname{arcctg} x$

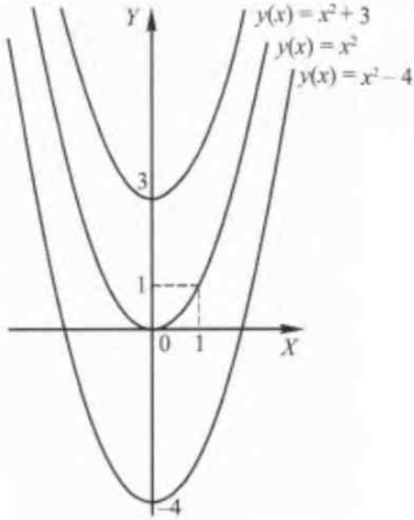


Преобразование графиков функций

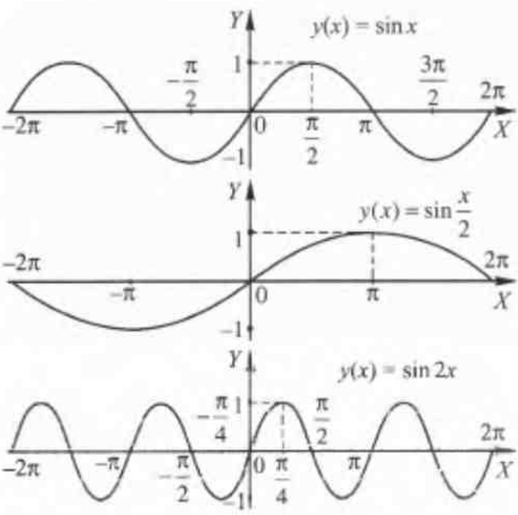
1. Сдвиг по горизонтали.
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a > 0$. Тогда график функции $y = f(x - a)$ будет сдвинут относительно исходного на a вправо. График функции $y = f(x + a)$ сдвинут относительно исходного на a влево.



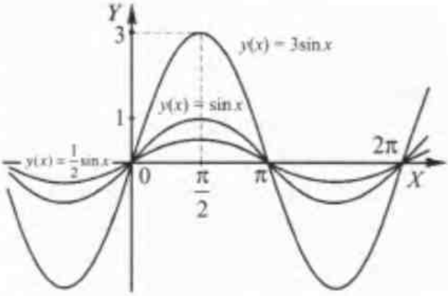
2. Сдвиг по вертикали.
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и C — некоторое положительное число. Тогда график функции $y = f(x) + C$ будет сдвинут относительно исходного на C вверх. График функции $y = f(x) - C$ сдвинут относительно исходного на C вниз.



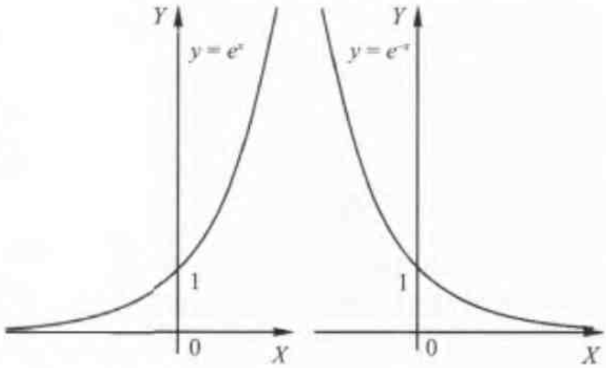
3. Растяжение (сжатие) по горизонтали.
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k > 0$. Тогда график функции $y = f(kx)$ будет растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0 < k < 1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k > 1$.



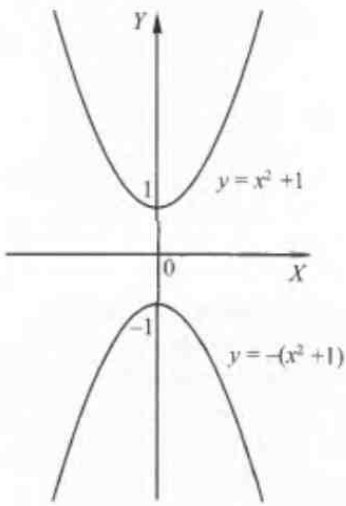
4. Растяжение (сжатие) по вертикали.
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $M > 0$. Тогда график функции $y = M \cdot f(x)$ будет растянут относительно исходного в M раз по вертикали, если $M > 1$, и сжат относительно исходного в M раз по вертикали, если $0 < M < 1$.



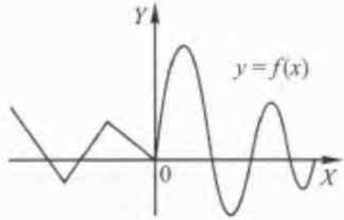
5. Отражение по горизонтали
График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Y.

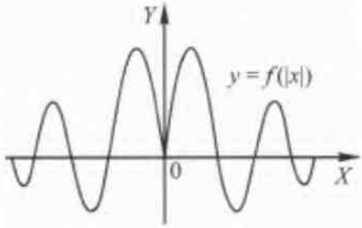


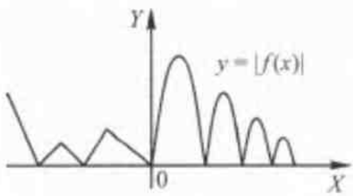
6. Отражение по вертикали.
График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси X.



7. Графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

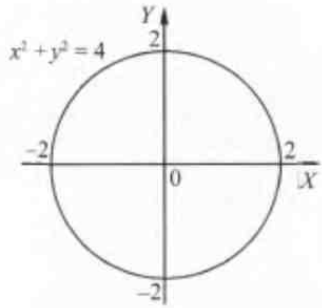




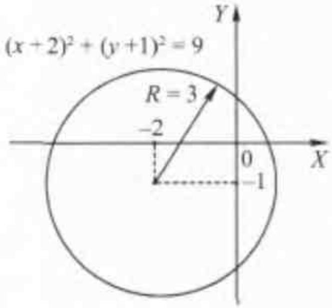


«Базовые элементы» для решения задач с параметрами

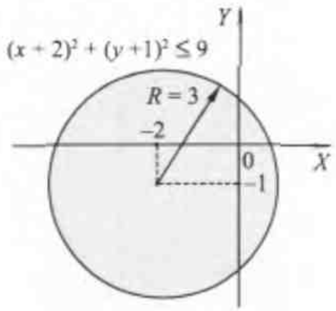
1. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $|R|$.



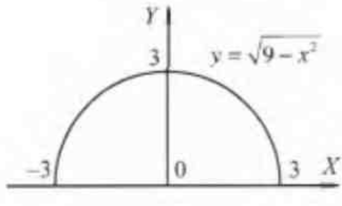
2. Уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ задает окружность с центром в точке $(a;\, b)$ и радиусом $|R|$.



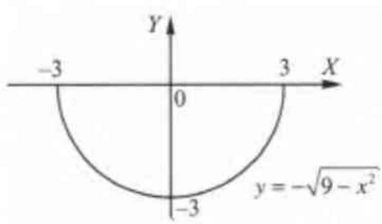
3. Неравенство $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$ задает круг вместе с границей.



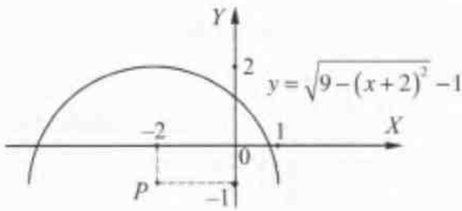
4. Уравнение $y=\sqrt{R^2-x^2}$ задает верхнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|R|$.



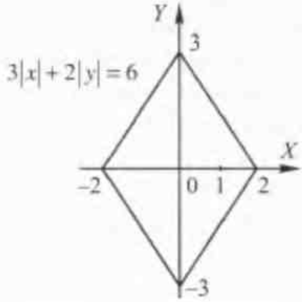
5. Уравнение $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ задает нижнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|R|$.



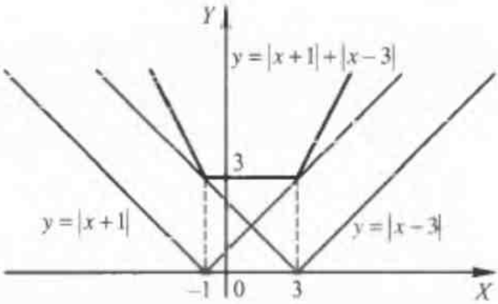
6. Уравнение $y=\sqrt{\left(R^2-(x-a)^2\right)}+b$ задает верхнюю полуокружность с центром в точке P $(a;\,b)$ и радиусом $|R|$.



7. Уравнение $a\,|x|+b\,|y|=c$ при положительных a, b и c задает ромбик, симметричный относительно начала координат.



8. Уравнение $y=|x+a|+|x+b|$ (сумма модулей) задает график следующего вида:



9. Расстояние между точками А $(x_1;\,y_1)$ и В $(x_2;\,y_2)$ находится по формуле

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Координаты середины M отрезка AB находятся по формулам:

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2};\ y_M=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

10. Уравнение отрезка:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}=\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}.$$

Эта устрашающая формула задает отрезок $[MN]$, концы которого $M(a;\,b)$ и $N(c;\,d)$. Пара чисел $(x;\,y)$ соответствует координатам любой точки этого отрезка.

Все эти схемы широко применяются в задачах с параметрами. И в то же время нужно помнить, что построение графика — еще не все решение! Фраза «На графике видно…» не заменяет доказательства. Примеры решения и грамотного оформления задач с параметрами — в этой главе.

1. (Авторская задача) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le x^2y^2+1 \\ x^2+y^2 \le 2 \\ (x-a)^2+(y-a)^2=|a| \end{cases}$$ имеет единственное решение?

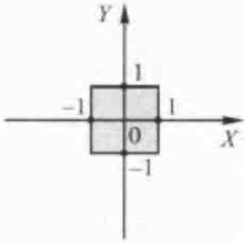
Эту задачу я придумала для одного из своих пробных ЕГЭ, которые регулярно провожу и очно, и онлайн. Захотелось порадовать учеников простой и красивой рисовалкой.

Заметим, что параметр в этой системе есть только в уравнении. А в неравенствах — ни в первом, ни во втором — его нет.

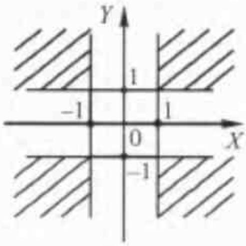
Начнем с первого неравенства:

$$x^2y^2-x^2-y^2+1\ge 0;\ x^2\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)\ge 0;\ \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2\le 1 \\ y^2\le 1 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x^2\ge 1 \\ y^2\ge 1 \end{cases} (2) \end{array}\right..$$

Первая система неравенств задает квадрат с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям; длины сторон равны 2.

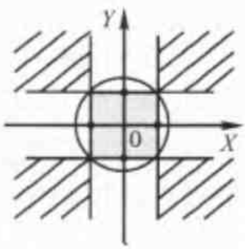


Решения второй системы неравенств показаны на рисунке:



Решим второе неравенство системы: $x^2+y^2\le 2$.

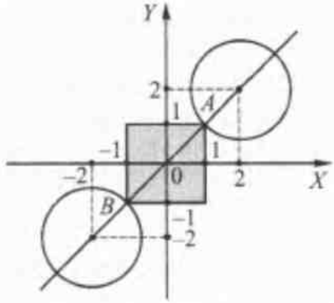
На координатной плоскости это неравенство задает круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$. Совместим решения первого и второго неравенств.



Уравнение $(x-a)^2+(y-a)^2=|a|$ задает окружность радиуса $\sqrt{|a|}$ с центром $(a;\,a)$.

Это значит, что ее центр лежит на прямой $y=x$.

Параметр a может быть положительным или отрицательным. Он может быть также равным нулю, и решением будет точка (0; 0). Тогда исходная система имеет единственное значение, поскольку точка (0; 0) лежит внутри квадрата, задаваемого первым и вторым неравенствами.



Исходная система также имеет единственное решение, если окружность, задаваемая уравнением, проходит через точку A или точку B на рисунке. Во всех остальных случаях система не имеет решений или имеет более одного решения.

Найдем, при каких значениях параметра задаваемая уравнением окружность проходит через точку A или через точку B:

1) подставим координаты точки уравнения $A(1;\,1)$ в уравнение $(x-a)^2+(y-a)^2=|a|$.

Получим: $\begin{cases}2(a-1)^2=|a|\\ a>0\end{cases}$.

Условие $a>0$ добавлено потому, что центр окружности расположен дальше от начала координат, чем точка A. Значит, обе координаты центра окружности положительны.

При $a>0$ имеем: $|a|=a$ и $\begin{cases}2(a-1)^2=a,\\ a>0.\end{cases}$

Решения системы: $a=2$ и $a=\dfrac{1}{2}$. Но если $a=\dfrac{1}{2}$, центр окружности лежит внутри квадрата и система имеет бесконечно много решений. Значит, единственное решение будет при $a=2$;

2) подставив координаты точки B в уравнение окружности, получим:

$$\begin{cases}2(a+1)^2=|a|,\\ a<0;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}a=-2,\\ a=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Второе значение нам не подходит, как и в предыдущем пункте.

Исходная система имеет единственное решение, если $a=-2$. Объединим случаи.

Ответ: $-2;\ 0;\ 2$.

---

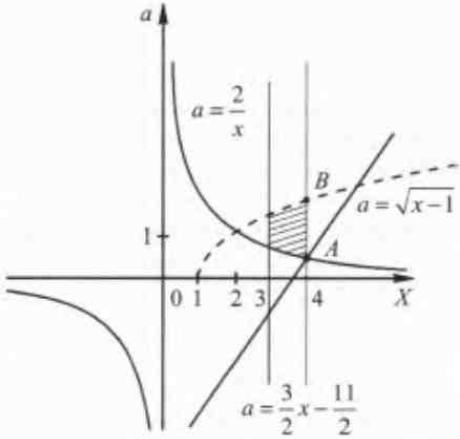
2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}ax\ge 2\\ \sqrt{x-1}>a\\ 3x\le 2a+11\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;\,4]$.

Решим систему графически в координатах x, a.

$$\begin{cases}x-1\ge 0,\\ a\ge \dfrac{2}{x},\\ a<\sqrt{x-1},\\ a\ge \dfrac{3}{2}x-\dfrac{11}{2}.\end{cases}$$

Область, удовлетворяющая системе неравенств и условию $x \in [3; 4]$, показана на рисунке.

Наименьшее значение a, при котором система имеет решение, достигается в точке A, где пересекаются (и это легко проверить) графики функций $a = \frac{2}{x}$ и $a = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$; при этом $x = 4$. В точке A значение параметра a равно $\frac{1}{2}$.



Точка B, где график функции $a = \sqrt{x-1}$ пересекает вертикальную прямую $x = 4$, соответствует значению параметра $a = \sqrt{3}$. Мы просто подставили $x = 4$ в уравнение $a = \sqrt{x-1}$. Чтобы исходная система имела решения, должно выполняться условие $a < \sqrt{3}$.

Следовательно, система имеет хотя бы одно решение на отрезке $x \in [3; 4]$, если параметр a принимает значение от $\frac{1}{2}$ до $\sqrt{3}$, включая значение $a = \frac{1}{2}$.

Ответ: $a \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

---

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} |x| + |a| < 4, \\ x^2 + 16a \le 8x + 48 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0; 1]$.

Выделим во втором неравенстве полный квадрат. Вообще выделение полного квадрата — полезнейший прием для оценки выражений и построения графиков функций. Смотрите, как это делается:

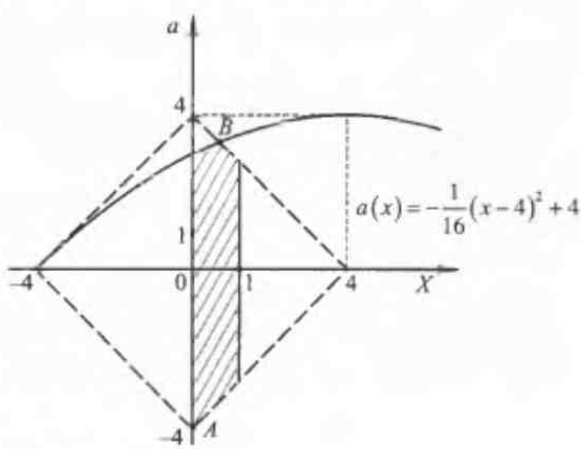
$$16a \le -x^2 + 8x + 48;$$

$$-x^2 + 8x + 48 = -\left(x^2 - 8x - 48\right) = -\left(x^2 - 8x + 16 - 16 - 48\right) = -(x-4)^2 + 64;$$

$$a \le -\frac{1}{16}(x-4)^2 + 4.$$

Решим графически систему неравенств в координатах x, a.

$$\begin{cases} |x| + |a| < 4, \\ a \le -\frac{1}{16}(x-4)^2 + 4. \end{cases}$$



Первое неравенство задает область внутри квадрата (не включая границу), вершины которого находятся в точках (0; 4), (4; 0), (0; –4) и (–4; 0).

Второе неравенство задает область (вместе с границей), лежащую ниже параболы $a=-\frac{1}{16}(x-4)^2+4$. Ветви параболы направлены вниз, ее вершина в точке (4; 4).

Если $x \in [0;\ 1]$, то все возможные значения a больше величины $a_1=-4$ (точка A на чертеже). С другой стороны, все значения a при $x \in [0;\ 1]$ не больше величины a_2, соответствующей точке B. Точка B — точка пересечения прямой $a=4-x$ и параболы $a=-\frac{1}{16}(x-4)^2+4$.

Подставив значение $x=4-a$ в уравнение $a=-\frac{1}{16}(x-4)^2+4$, получим:

$a^2+16a-64=0$.

Отсюда $a_2=-8\pm 8\sqrt{2}$.

Значение $a_2=-8-8\sqrt{2}$ не подходит, поскольку ордината точки B положительна. Значит, $a_2=8\sqrt{2}-8$..

Ответ: система неравенств имеет хотя бы одно решение при $x \in [0;\ 1]$, если $-4<a<8\sqrt{2}-8$.

---

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\cdot\ln(2x+a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;\ 1]$.

Запишем ОДЗ уравнения: $\begin{cases}3x-2\ge 0,\\ x-a>0,\\ 2x+a>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{2}{3},\\ -2x<a<x.\end{cases}$

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3x-2}\cdot\left(\ln(x-a)-\ln(2x+a)\right)=0$.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом имеет смысл. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x\ge\frac{2}{3},\\ -2x<a<x,\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3},\\ x-a=2x+a;\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{2}{3},\\ -2x<a<x,\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3},\\ x=-2a.\end{array}\right.\end{cases}$$

В каких случаях система может иметь единственное решение? Самый простой ответ — когда x одновременно равен и $\frac{2}{3}$, и $-2a$. Тогда $-2a=\frac{2}{3}$, $a=-\frac{1}{3}$. При этом неравенство $-2\cdot\frac{2}{3}<-\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$ выполняется и корень $x=\frac{2}{3}$ принадлежит отрезку $[0;\ 1]$ — т. е. случай совпадения корней при $a=-\frac{1}{3}$ нам подходит.

Пусть теперь корни $x=\frac{2}{3}$ и $x=-2a$ не совпадают. Что же в этом случае?

Очевидно, что уравнение имеет не зависящий от параметра корень $x=\frac{2}{3}$, который принадлежит отрезку [0; 1]. Подставив $x=\frac{2}{3}$ в неравенства, задающие ОДЗ, получим: $-\frac{4}{3}<a<\frac{2}{3}$.

Найдем, при каких a исходное уравнение имеет корень $-2a$, принадлежащий ОДЗ и отрезку [0; 1].

Запишем систему условий для параметра a:

$$\begin{cases} 0\le -2a\le 1, \\ -2a\ge \frac{2}{3}, \\ 4a<a<-2a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -\frac{1}{2}, \\ a\le -\frac{1}{3}, \\ a<0. \end{cases}$$

Отметим на оси a интервалы значений параметра, соответствующих корню $x=\frac{2}{3}$ и корню $x=-2a$.

Мы получили, что если $-\frac{1}{2}\le a\le -\frac{1}{3}$, то исходное уравнение кроме корня $x=\frac{2}{3}$ имеет также корень $x=-2a$, принадлежащий отрезку [0; 1].

Ранее мы выяснили, что при $a=-\frac{1}{3}$ корни $x=\frac{2}{3}$ и $x=-2a$ совпадают и условия задачи выполняются.

Чтобы исходное уравнение имело на отрезке [0; 1] единственный корень, равный $\frac{2}{3}$, значение a должно не принадлежать интервалу $\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$ и при этом удовлетворять условию из ОДЗ: $-\frac{4}{3}<a<\frac{2}{3}$. Значит, $a\in\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Это ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\operatorname{tg}(\pi x)\cdot\ln(x+a)=\ln(x+a)$ имеет ровно один корень x на отрезке [0; 1].

Запишем уравнение в виде $\ln(x+a)(\operatorname{tg}(\pi x)-1)=0$.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+a>0, \\ \cos\pi x\ne 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+a=1, \\ \operatorname{tg}(\pi x)=1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x+a>0, \\ \cos\pi x\ne 0, \\ \operatorname{tg}(\pi x)=1; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x+a>0, \\ \cos\pi x\ne 0, \\ x=1-a. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Начнем с системы (1).

Корнем уравнения $\operatorname{tg}(\pi x)=1$ на отрезке [0; 1] является $x=\frac{1}{4}$. Если $x=\frac{1}{4}$, то $\frac{1}{4}+a>0$, значит, $a>-\frac{1}{4}$.

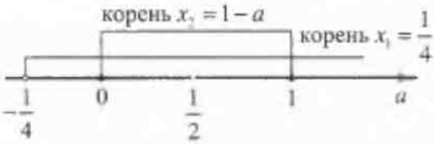
Для того чтобы этот корень был единственным на отрезке [0; 1], необходимо и достаточно, чтобы система (2) не имела решений на отрезке [0; 1] или имела решение $x=\frac{1}{4}$.

Рассмотрим систему (2) при условии $x \in [0;\ 1]$: $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x+a>0, \\ \cos \pi x \ne 0, \\ x=1-a. \end{cases}$

Если $x = 1 - a$, условие $x + a > 0$ выполняется. Для параметра a также получаем условия:
$\begin{cases} 0 \le 1-a \le 1, \\ \cos(\pi(1-a)) \ne 0. \end{cases}$

Условие $\cos(\pi - \pi a) \ne 0$ упростим с помощью формулы приведения: $\cos \pi a \ne 0$. Поскольку $0 \le a \le 1$, получим, что $a \ne \frac{1}{2}$.

В итоге: $\begin{cases} 0 \le a \le 1, \\ a \ne \frac{1}{2}. \end{cases}$



При этих условиях исходное уравнение имеет второй корень $x = 1 - a$ на отрезке [0; 1]. Но по условию нам нужен единственный корень на этом отрезке.

Рассмотрим случаи, когда это происходит.

1) $a \in \left(-\frac{1}{4};0\right) \cup (1;+\infty)$. Тогда $x_1=\frac{1}{4}$ — единственный корень;

2) возможно, будет что-то интересное при $a=\frac{1}{2}$. Подставим $a=\frac{1}{2}$ в исходное уравнение: $\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)(\operatorname{tg}(\pi x)-1)=0$.

Первый множитель равен нулю, если $x=\frac{1}{2}$. Тогда второй множитель не определен, поскольку $\operatorname{tg}=\frac{\pi}{2}$ не существует. Значит, корня $x=\frac{1}{2}$ это уравнение иметь не может.

Второй множитель равен нулю, если $x=\frac{1}{4}$. Значит, при $a=\frac{1}{2}$ уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1}{4}$. Этот случай нам подходит;

3) мы еще не рассмотрели случай, когда корни $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 1 - a$ совпадают. Приравняв их, получим: $1 - a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{3}{4}$.

Значит, исходное уравнение имеет единственный корень на отрезке [0; 1], если $a \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\} \cup (1; +\infty)$. Это ответ.

---

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a}\sin x = -\sqrt{x-a}\cos x$ имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$

Как мы решали бы это уравнение, если бы в нем не было параметра? Очевидно, записали бы ОДЗ и сказали, что произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Сейчас мы сделаем так же.

$$\sqrt{x-a}(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = a, \\ \sin x = -\cos x. \end{array}\right. \end{cases}$$

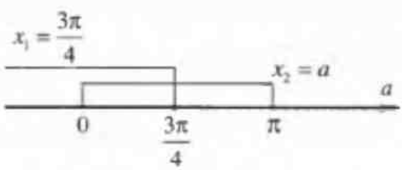
Уравнение $\sin x = -\cos x$ не зависит от a и имеет на отрезке $[0; \pi]$ единственный корень $x = \frac{3\pi}{4}$. При этом $\frac{3\pi}{4} - a \geq 0$, значит $a \leq \frac{3\pi}{4}$.

Заметим, что если $a = \frac{3\pi}{4}$, то система имеет единственное решение $x = \frac{3\pi}{4}$. Это случай совпадения корней.

Займемся корнем $x = a$. Он удовлетворяет условию $x - a \geq 0$.

Поскольку $0 \leq x \leq \pi$, исходное уравнение имеет корень $x = a$ при $0 \leq a \leq \pi$.

Изобразим на оси a промежутки, при которых уравнение имеет корень $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ или $x_2 = a$.



Если $a \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, уравнение имеет 2 корня, причем при $a = \frac{3\pi}{4}$ эти корни совпадают.

Если $a > \pi$, корней на отрезке [0; 1] нет.

Если же $a < 0$ или $\frac{3\pi}{4} < a \leq \pi$, уравнение имеет единственный корень. Объединив случаи, получим ответ $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

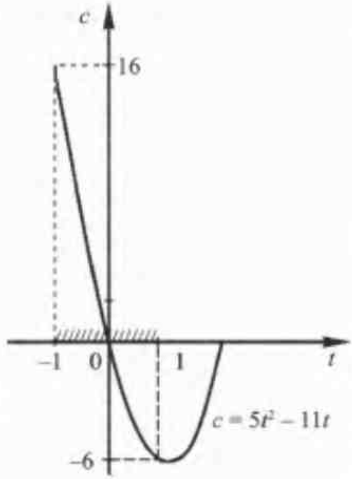
---

7. (Авторская задача) При каких значениях параметра c уравнение $5\sin^2 x = 11\sin x + c$ **не имеет** двух решений на интервале $(0; 2\pi)$?

Сделаем замену $\sin x = t$; $t \in [-1; 1]$.

Запишем уравнение в виде: $c = 5t^2 - 11t$ и рассмотрим функцию $c(t) = 5t^2 - 11t$.

Построим график этой функции в координатах t, c. Это парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $t_0 = \dfrac{11}{10}$. Она пересекает ось t в точках $t = 0$ и $t = \dfrac{11}{5}$. Очевидно, нам нужна часть графика при $t \in [-1; 1]$.



Найдем значения функции $c(t)$ в концах отрезка $[-1; 1]$: $t(1) = -6$, $t(-1) = 16$.

На отрезке $[-1; 1]$ функция $c(t) = 5t^2 - 11t$ убывает и принимает значения от 16 до -6, причем каждое значение c соответствует только одному значению t.

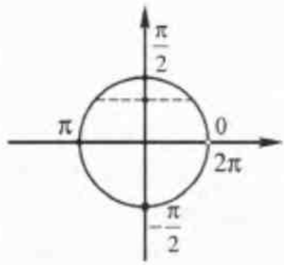
Посмотрим на уравнение $\sin x = t$ при $x \in (0; 2\pi)$.

Уравнение $\sin x = t$ имеет единственное решение на интервале $(0; 2\pi)$ в следующих случаях:

1) если $x = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $t = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$;

2) если $x = \pi$. Тогда $t = \sin\pi = 0$;

3) если $x = \dfrac{3\pi}{2}$. Тогда $t = \sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$.



При всех остальных $t \in (-1; 1)$ уравнение $\sin x = t$ имеет два решения. Если $t > 1$ или $t < -1$ — решений нет.

Вернемся к графику функции $c(t) = 5t^2 - 11t$.

Если $t = 1$, то $c = -6$.

Если $t = 0$, то $c = 0$.

Если $t = -1$, то $c = 16$.

В этих случаях исходное уравнение имеет единственное решение. Если $c < -6$ или $c > 16$, исходное уравнение не имеет решений. По условию, исходное уравнение должно иметь одно решение или ни одного решения при $x \in (0; 2\pi)$.

Ответ: $c \in (-\infty; -6] \cup \{0\} \cup [16; +\infty)$.

Вот отличная задача с сайта Ларина.

---

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2|x - y| = 2 \\ x^2 + y^2 - 2a(x + y) + 2a^2 = 2 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Раскроем модуль в первом уравнении.

Мы знаем, что $|z| = \begin{cases} z, \text{ если } z \ge 0 \\ -z, \text{ если } z < 0 \end{cases}$.

Первое уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y\ge 0\\ x^2+y^2-2x+2y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x-y<0\\ x^2+y^2+2x-2y=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\le x\\ \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+2y+1\right)=4\end{cases}\\ \begin{cases}y>x\\ \left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=4\end{cases}\end{array}\right.$$

Мы сгруппировали слагаемые и увеличили каждую часть уравнения на 2, чтобы появились полные квадраты.

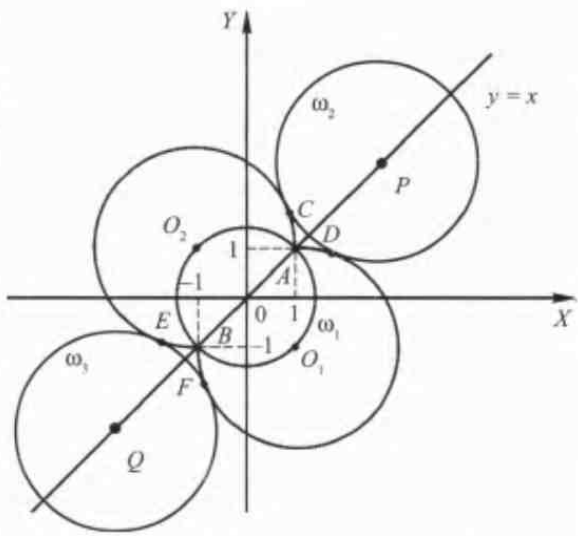
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\le x\\ (x-1)^2+(y+1)^2=4\end{cases} \text{— дуга окружности с центром } O_1(1;-1) \text{ и радиусом 2.}\\ \begin{cases}y>x\\ (x+1)^2+(y-1)^2=4\end{cases} \text{— дуга окружности с центром } O_2(-1;1) \text{ и радиусом 2.}\end{array}\right.$$

Теперь второе уравнение:

$x^2+y^2-2a(x+y)+2a^2=2;$

$\left(x^2-2ax+a^2\right)+\left(y^2-2ay+a^2\right)=2;$

$(x-a)^2+(y-a)^2=2.$



Второе уравнение задает семейство окружностей с радиусом $\sqrt{2}$ и с центрами в точках с координатами $(a;\ a)$. Другими словами, их центры лежат на прямой $y = x$.

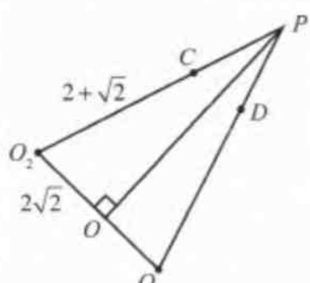
Рисуем все это.

Система имеет ровно два решения в следующих случаях:

1) $a = 0$. Второе уравнение задает окружность ω_1, имеющую с графиком первого уравнения общие точки A и B;

2) второе уравнение задает окружность ω_2, имеющую с графиком первого уравнения общие точки C и D. Ее центр — точка P;

3) второе уравнение задает окружность ω_3 с центром Q, имеющую с графиком первого уравнения общие точки E и F.



Найдем, чему равно значение параметра a для окружностей ω_2 и ω_3. Вспомним, что точка касания окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры, и рассмотрим треугольник O_1O_2P.

В этом треугольнике $O_1O_2=2\sqrt{2}$; $O_1P=O_2P=2+\sqrt{2}$, так как расстояние между центрами касающихся окружностей равно сумме их радиусов.

Из ΔO_2OP: $OP = \sqrt{O_2P^2 - OO_2^2} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{4+4\sqrt{2}} = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

С другой стороны, $OP = |a|\sqrt{2}$.

Получим: $|a|\sqrt{2} = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$; $a = \pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}$.

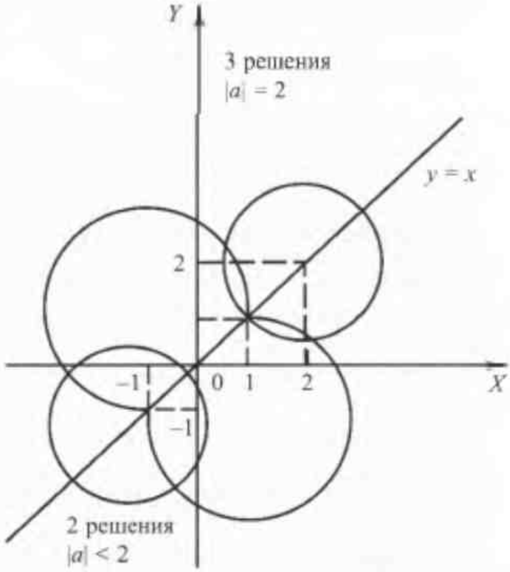
Положительное значение параметра a соответствует окружности ω_2, а отрицательное — окружности ω_1;

4) есть и еще случай, когда исходная система имеет ровно два решения. Будем сдвигать окружность ω_1 с центром O (0; 0) вдоль прямой $y = x$, увеличивая $|a|$. Окружность ω_1 будет иметь ровно две точки пересечения с графиком первого уравнения, пока выполняется условие $|a| < 2$. Если $|a| = 2$, система имеет три решения.

Если $2 < |a| < \sqrt{2+2\sqrt{2}}$, система имеет 4 решения.

Объединим все случаи: $\left[\begin{array}{l}|a| < 2 \\ a = \pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}\end{array}\right.$.

Это ответ.



---

9. Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения

$$\frac{5a\sqrt{3}\sin 4x + \left(\sqrt{3}-5a\right)\cos 4x}{6\sin 4x - \sqrt{3}\cos 4x} = 1$$ при любом значении a из отрезка $\left[-3\sqrt{2};1\right]$.

Сделаем замену $4x = z$. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 5a\sqrt{3}\sin z + \left(\sqrt{3}-5a\right)\cos z = 6\sin z - \sqrt{3}\cos z, \\ 6\sin z - \sqrt{3}\cos z \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(5a\sqrt{3}-6\right)\sin z + \left(2\sqrt{3}-5a\right)\cos z = 0, \\ 6\sin z - \sqrt{3}\cos z \neq 0. \end{cases}$$

Обратим внимание на коэффициенты первого уравнения.

Поскольку $5a\sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}\left(5a - 2\sqrt{3}\right)$, первое уравнение приводим к виду

$\left(5a - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin z - \cos z\right) = 0$.

Запишем систему в виде:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5a-2\sqrt{3}=0,\\ \sqrt{3}\sin z-\cos z=0,\end{array}\right.\\ \operatorname{tg} z\neq\dfrac{\sqrt{3}}{6};\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\dfrac{2\sqrt{3}}{5},\\ \operatorname{tg} z\neq\dfrac{\sqrt{3}}{6};\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{tg} z=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ \operatorname{tg} z\neq\dfrac{\sqrt{3}}{6}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Из первой системы находим, что при $a=\frac{2\sqrt{3}}{5}$ любое значение z, кроме $z=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}+\pi k$, $k\in Z$, является решением исходного уравнения. Но этот случай нам не подходит: ведь надо найти все значения x, каждое из которых является решением уравнения не при каком-то одном, а при любом a.

Во второй системе параметра a вообще нет. Вторая система равносильна уравнению $\operatorname{tg} z=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Его решение: $z=4x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. Тогда $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z$. Мы нашли все значения x, каждое из которых будет решением исходного уравнения при любом значении параметра a.

Возможен и другой способ решения. Выберем «удобное» значение параметра: $a=0$. Ведь мы ищем значения x, которые будут решениями исходного уравнения при любом a из отрезка $\left[-3\sqrt{2};1\right]$, в том числе и при $a=0$. Подставив $a=0$ в исходное уравнение, найдем значения x и убедимся, что они будут решениями при любом a из отрезка $\left[-3\sqrt{2};1\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z$.

---

10. Найдите все неотрицательные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $1\leq\dfrac{a+x^2-4\log_{0,5}\left(a^2-2a+4\right)}{3\sqrt{7x^4+x^2}+a+4+\log_{0,5}{}^2\left(a^2-2a+4\right)}$ состоит из одной точки, и найдите это решение.

Сделаем замену: $\log_{0,5}\left(a^2-2a+4\right)=b$. Конечно, при этом должно выполняться условие $a^2-2a+4>0$.

$$\frac{a+x^2-4b}{3\sqrt{7x^4+x^2}+a+4+b^2}\geq 1.$$

Поскольку $a\geq 0$, знаменатель дроби положителен. Отлично, умножим на него обе части неравенства:

$$a+x^2-4b\geq 3\sqrt{7x^4+x^2}+a+4+b^2;$$

$$x^2-4b-b^2-4\geq 3\sqrt{7x^4+x^2};$$

$x^2-(b^2+4b+4)\ge 3\sqrt{7x^4+x^2}$;

$x^2-(b+2)^2\ge 3\sqrt{7x^4+x^2}$;

$x^2\ge 3\sqrt{7x^4+x^2}+(b+2)^2$.

Заметим, что неравенство четно относительно x. Это значит, что если $x=x_0$ — решение, то и $x=-x_0$ также будет его решением, то есть множество его решений симметрично относительно нуля.

Единственное решение возможно, только если $x=0$. В этом случае $(b+2)^2\le 0$.

Но квадрат числа не может быть отрицательным, и тогда $b+2=0$, $b=-2$.

$$\log_{0,5}(a^2-2a+4)=-2;\ \log_2(a^2-2a+4)=2;\ \begin{cases}a^2-2a+4=4\\a^2-2a+4>0\end{cases}.$$

Очевидно, что если $a^2-2a+4=4$, то $a^2-2a+4>0$. Значит, система равносильна уравнению $a^2-2a+4=4$, откуда $a=0$ или $a=2$.

Проверим, что при $a=0$ и при $a=2$ решение $x=0$ действительно единственно.

При $a=0$ имеем: $\log_{0,5}4=-2$.

Неравенство примет вид: $\dfrac{x^2+8}{3\sqrt{7x^4+x^2}+8}\ge 1$; $x^2\ge 3\sqrt{7x^4+x^2}$.

Обе части неотрицательны — значит, неравенство можно возвести в квадрат.

$x^4\ge 63x^4+9x^2$; $62x^4+9x^2\le 0$ — единственное решение $x=0$.

При $a=2$ получим: $\log_{0,5}(a^2-2a+4)=-2$; $\dfrac{2+x^2+8}{3\sqrt{7x^4+x^2}+10}\ge 1$; $x^2\ge 3\sqrt{7x^4+x^2}$. Это неравенство мы только что решили. У него единственное решение $x=0$.

Ответ: $x=0$ при $a=0$ или $a=2$.

---

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок [0; 1].

Преобразуем знаменатель в формуле функции.

$x^2-2ax+a^2+25=(x-a)^2+25>0$.

Поскольку знаменатель всегда положителен и не равен нулю ни при каких x и a, функция $y(x)=\dfrac{5a-15x+ax}{(x-a)^2+25}$ непрерывна. Значит, если при определенных значениях параметра a найдутся такие x, что $y(x)=0$ и $y(x)=1$, то $y(x)$ принимает все значения на отрезке [0; 1].

Другими словами, множество значений функции содержит отрезок [0; 1], когда уравнения $y(x)=0$ и $y(x)=1$ имеют решения.

1) $y(x)=0$

$$\frac{5a-15x+ax}{(x-a)^2+25}=0;\ 5a-15x+ax=0;\ x=\frac{-5a}{a-15}=\frac{5a}{15-a}.$$

Уравнение имеет решения при $a\ne 15$. Если $a=15$, решений нет.

2) $y(x) = 1$

$5a-15x+ax=(x-a)^2+25;\quad x^2+(15-3a)x+(a^2-5a+25)=0.$

Это квадратное уравнение. Оно имеет решения, если его дискриминант неотрицателен.

$D=(15-3a)^2-4(a^2-5a+25)=225-90a+9a^2-4a^2+20a-100=5a^2-70a+125;$

$a^2-14a+25\ge 0;$

$\left(a-\left(7-2\sqrt{6}\right)\right)\left(a-\left(7+2\sqrt{6}\right)\right)\ge 0.$

Сравним $7+2\sqrt{6}$ и 15.

$2\sqrt{6}\vee 8;\ \sqrt{6}<4\Rightarrow 7+2\sqrt{6}<15.$

Таким образом, условие задачи выполняется, если

$a\in\left(-\infty;7-2\sqrt{6}\right)\cup\left(7+2\sqrt{6};15\right)\cup(15;+\infty)$. Это ответ.

---

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} x(x^2+y^2-y-2)=|x|(y-2), \\ y=x+a \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

Раскроем модуль в первом уравнении. Рассмотрим отдельно случаи $x>0$, $x=0$ и $x<0$:

1) в случае $x>0$ получим:

$$\begin{cases} x>0, \\ x(x^2+y^2-y-2)=x(y-2); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x^2+y^2-2y=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x^2+y^2-2y+1=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x^2+(y-1)^2=1. \end{cases} \qquad (1)$$

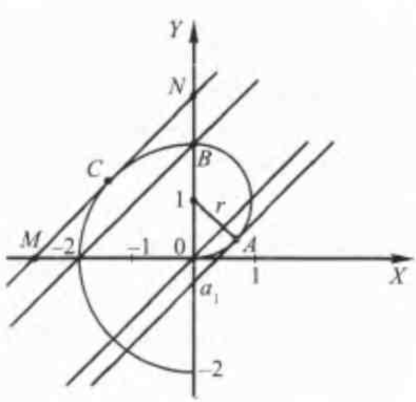
Эта система задает полуокружность, находящуюся справа от оси X, с центром (0; 1) и радиусом 1.

2) $x=0$ — решение первого уравнения. График — прямая $x=0$, т. е. ось Y.

3) Теперь случай $x<0$.

$$\begin{cases} x<0, \\ x(x^2+y^2-y-2)=x(2-y); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2=4. \end{cases} \qquad (2)$$

Эта система задает полуокружность, расположенную слева от оси X, с центром в начале координат и радиусом 2. Вот какой график — вместе с осью Y — мы в результате получили.



Второе уравнение задает прямую с угловым коэффициентом $k=1$, проходящую через точку $(0; a)$. Чтобы исходная система имела ровно три решения, нужно, чтобы прямая $y=x+a$ пересекала нашу «конструкцию» из двух полуокружностей и оси ординат ровно в трех точках.

Если $a \le -2$, система имеет единственное решение (прямая пересекает только ось ординат). При увеличении параметра a прямая $y = x + a$ сдвигается вверх и точек пересечения будет две — до момента касания прямой $y = x + a$ с правой полуокружностью в точке A. Если прямая $y = x + a$ проходит через точку A, исходная система имеет три решения.

Найдем значение параметра a для этого случая. Прямая $y = x + a$ — касательная к полуокружности, задаваемой системой (1).

Вспомним, что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, а угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых удовлетворяют соотношению $k_1k_2 = -1$. Поскольку в точке A пересекаются прямые $y = x + a$ и $y = 1 - x$, для координат точки A выполняется условие: $\begin{cases} y = x + a, \\ y = 1 - x. \end{cases}$

Из этой системы находим координаты точки A: $x = \dfrac{1-a}{2}$; $y = \dfrac{1+a}{2}$. Подставим их в уравнение полуокружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $x > 0$.

$\left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2 = 1$; $a = \sqrt{2}+1$ или $a = 1-\sqrt{2}$.

Поскольку в точке A абсцисса $x = \dfrac{1-a}{2}$ положительна, нам подойдет $a = 1-\sqrt{2}$.

Продолжим сдвигать вверх прямую $y = x + a$. Если $1-\sqrt{2} < a < 0$, исходная система имеет 4 решения.

Далее, при $0 \le a < 2$ система имеет 3 решения. При $a = 2$ система имеет 2 решения.

Если прямая $y = x + a$ касается левой полуокружности в точке $C\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, система имеет два решения. При этом значение параметра $a = 2\sqrt{2}$. Оно легко находится из равнобедренного прямоугольного треугольника OMN на чертеже.

Если $2 < a < 2\sqrt{2}$, система имеет 3 решения. Объединим полученные случаи.

Ответ: $a \in \{1-\sqrt{2}\} \cup [0;2) \cup \left(2;2\sqrt{2}\right)$.

---

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

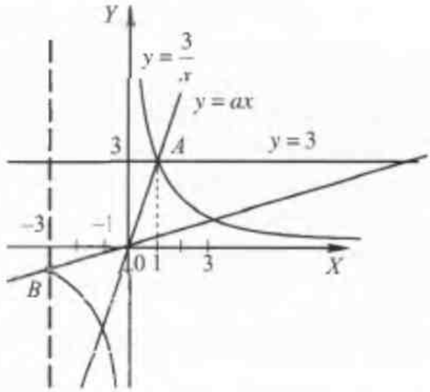
Разложим на множители числитель дроби в первом уравнении:

$xy^2 - 3xy - 3y + 9 = xy(y-3) - 3(y-3) = (xy-3)(y-3)$.

Система примет вид: $\begin{cases} \dfrac{(xy-3)(y-3)}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax. \end{cases}$

Область допустимых значений: $x > -3$.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}xy-3=0,\\ y=3,\end{array}\right.\\ x>-3,\\ y=ax;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{3}{x};\ x\neq 0,\\ y=3,\end{array}\right.\\ x>-3,\\ y=ax.\end{cases}$$



Решим систему графически.

Система имеет ровно 2 различных решения только в следующих случаях:

1) прямая $y = ax$ проходит через точку A (1; 3). Тогда $a = 3$;

2) прямая $y = ax$ пересекает только правую ветвь гиперболы $y=\dfrac{3}{x}$ и прямую $y = 3$. Это значит, что точка пересечения прямых $y = ax$ и $x = -3$ лежит выше точки B и ниже оси абсцисс.

В точке B (–3; –1) значение параметра a равно $\dfrac{1}{3}$. Значит, ровно два решения в этом случае будут, если $0 < a < \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup\{3\}$.

---

14. Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1,\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha\end{cases}$ имеет единственное решение.

В этой задаче мы увидим новый прием — использование симметрии уравнений. Заметим, что уравнения системы не изменятся, если x и y поменять местами. Это значит, что если система имеет решение $(x_0; y_0)$, то и пара чисел $(y_0; x_0)$ будет решением.

Но тогда единственное решение возможно, только если $x_0 = y_0 = z$. В этом случае:

$$\begin{cases}2z^2-8z\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1,\\ 2=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\left(z^2-4z\sin\alpha+4\sin^2\alpha\right)=2\sin\alpha-1,\\ \sin\alpha+2\sin^2\alpha=1.\end{cases}$$

Сделаем замену $\sin\alpha = b$.

Если $\alpha \in (0; \pi)$, то $b \in (0; 1]$.

$$\begin{cases}2(z-2b)^2=2b-1,\\ 2b^2+b-1=0.\end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$2b^2 + b - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$; $b_1=\dfrac{1}{2}$; $b_2 = -1$.

Значение $b = -1$ не подходит, так как $b \in (0; 1]$.

Если $b = \frac{1}{2}$, первое уравнение примет вид $2(z-1)^2 = 0$.

Оно имеет единственное решение $z = 1$, что соответствует решению системы $x = 1, y = 1$. Вернемся к параметру α.

$$\begin{cases} b = \sin\alpha = \frac{1}{2}, \\ 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

Получаем, что $\alpha = \frac{\pi}{6}$ или $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. Это ответ.

Еще задача с параметрами, где мы пользуемся геометрическими методами.

---

15. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a \end{cases}$ имеет более двух решений.

Раскроем модуль в первом уравнении.
Получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 8x - 4y, \\ 2x - y \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4y - 8x, \\ 2x - y < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0, \\ 2x - y \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 10x + y^2 = 0, \\ 2x - y < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Выделим полные квадраты в левых частях уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 25, \\ y \le 2x; \end{cases} \\ \begin{cases} (x^2 + 10x + 25) + y^2 = 25, \\ y > 2x; \end{cases} \end{array}\right.$$

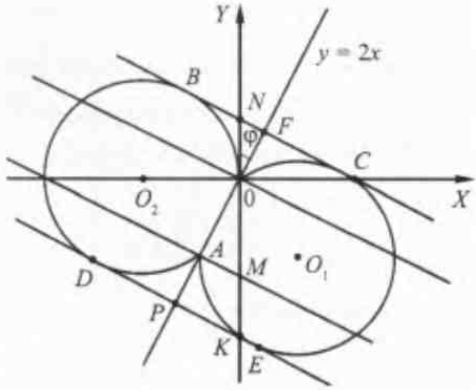
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25, \\ y \le 2x \end{cases} \text{— дуга окружности с центром } O_1(3; -4) \text{ и радиусом 5,} \\ \begin{cases} (x+5)^2 + y^2 = 25, \\ y > 2x \end{cases} \text{— дуга окружности с центром } O_2(-5; 0) \text{ и радиусом 5.} \end{array}\right.$$

Второе уравнение исходной системы $x + 2y = a$ задает семейство параллельных прямых $y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2}$, проходящих через точку $\left(0; \frac{a}{2}\right)$. Их угловой коэффициент $k = -\frac{1}{2}$.

Изобразим решение первого уравнения и семейство прямых $y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2}$:

1) система имеет ровно три решения, если прямая $y = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2}$ проходит через начало координат, и тогда $a = 0$, или через точку $A(-2; -4)$, и тогда $a = -10$.

Если $-10 < a < 0$, система имеет 2 решения;



2) система имеет 2 решения, если прямая $y=-\frac{x}{2}+\frac{a}{2}$ касается обеих окружностей в точках B и C или в точках D и E, пересекая при этом ось y в точке N или в точке K соответственно.

Если прямая $y=-\frac{x}{2}+\frac{a}{2}$ пересекает ось ординат между точками O и N или между точками K и M, система имеет 4 решения.

Найдем ON и OK геометрическим способом.

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к пересекающимся окружностям, равны. Это значит, что $BF = FC$.

По теореме о секущей и касательной, $BF^2 = OF \cdot FA$.

$BC = DE = O_1O_2$. Поскольку координаты точек O_1 и O_2 известны, найдем O_1O_2 по формуле расстояния между точками: $O_1O_2=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

Тогда $BF = FC = 2\sqrt{5}$.

Рассмотрим треугольники OFN и OAM, где точка M имеет координаты (0; –5).

$\Delta OFN \sim \Delta OAM$; $OF = ON \cdot \cos\varphi$; $OA = OM \cdot \cos\varphi$.

Поскольку $\angle\varphi = \angle NOF$, точка F лежит на прямой $y = 2x$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$.

Из формулы $1+\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}$ найдем $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $OA=5\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$. Найдем OF, пользуясь тем, что $BF^2 = OF \cdot FA$.

Пусть $OF = x$, тогда $AF=x+2\sqrt{5}$.

$\left(2\sqrt{5}\right)^2=x\left(x+2\sqrt{5}\right)$; $x^2+2\sqrt{5}-20=0$; $D=20+4\cdot20=100$; $x_{1,2}=-\sqrt{5}\pm5$.

Поскольку $x = OF > 0$, получим, что $x=5-\sqrt{5}$.

$$ON=\frac{OF}{\cos\varphi}=\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}-5}{2}.$$

Для прямой $y=-\frac{x}{2}+\frac{a}{2}$, проходящей через точку N, $ON=\frac{a_1}{2}$. Значит, если $a_1=5\sqrt{5}-5$, прямая $y=-\frac{x}{2}+\frac{a}{2}$ касается окружности в точках B и C и система имеет 2 решения.

Осталось найти OK.

В треугольнике OPK: $OK=\frac{OP}{\cos\varphi}$, $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

С другой стороны, $OP + OF = PF = BD = CE = 2R = 10$,

тогда $OK=\frac{10-OF}{\cos\varphi}=\frac{\left(10-5+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}+5}{2}$.

Поскольку для прямой $y=-\frac{x}{2}+\frac{a}{2}$, проходящей через точку K, значение параметра $a=a_2<0$, получим: $OK=-\frac{a_2}{2}\Rightarrow a_2=-\left(5+5\sqrt{5}\right)$. При этом значении параметра прямая $y=-\frac{x}{2}+\frac{a}{2}$ касается окружностей в точках D и E.

Подведем итог. Для значений параметра $a\in\left(a_2;-10\right]\cup\left[0;a_1\right)$ исходная система имеет более 2 решений.

Ответ: $a\in\left(-5-5\sqrt{5};-10\right]\cup\left[0;5\sqrt{5}-5\right)$.

Возможно, разбирая решения задач, вы думаете: «Зачем это все? Неужели пригодится во взрослой жизни?»

Я много путешествую. Однажды с компанией предпринимателей мы ехали в джипе из Самарканда в Бухару. Дорога длинная, а я тогда готовилась к очередному интенсиву по задачам с параметрами и разбирала подборку новых задач. Постепенно мои товарищи заинтересовались, стали подсказывать решения. «Здесь метод оценки. А это нарисовать надо. А здесь — теорема Виета». Оказалось, что успешные бизнесмены когда-то побеждали на олимпиадах по математике и старательно готовились к вступительным экзаменам в серьезные вузы. И даже если логарифмы и параметры не нужны им в повседневной жизни, зато нужны логика, интуиция, умение видеть всю задачу сразу и решать ее шаг за шагом.

Пока ленивые тешат себя сказками о том, что «в интернете все есть» и что «троечники успешнее отличников», умные тренируют мозги.

Конечно, в этой главе не уместились все возможные типы задач с параметрами и все способы их решения. В главе 9 я покажу еще один эффектный прием — метод оценки — и расскажу историю о том, как птичка и рыбка полюбили друг друга и какое отношение это имеет к задачам с параметрами на ЕГЭ по математике.

Глава 8
ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ НА ЕГЭ

Ни на что не похожие. В школьных учебниках о них ни слова.

Уравнения в целых числах с несколькими неизвестными. Действия в неопределенной ситуации. Метод «оценка плюс пример» (а вы вообще слышали о таком?). И конечно, культура математических рассуждений. Немногие репетиторы умеют решать эти задачи — самые сложные в профильном ЕГЭ по математике.

И все же мы научимся решать эти загадочные задачи. Ведь за них дают на ЕГЭ по математике 4 первичных балла, которые переводятся в 9–10 тестовых. А это поступление! Это «бюджет»! Мы освоим искусство математических рассуждений, после которого высшая математика будет даваться вам намного проще. Более того — вы удивитесь, обнаружив, что стали думать по-другому.

Подготовительный этап — задачи на сообразительность и задачи базового ЕГЭ.

Вот задача про бабушку и яйца — в двух сериях.

---

1. Понесла бабушка яйца на базар продавать. Первый покупатель купил половину всех яиц и еще пол-яйца. Второй — половину оставшихся яиц и еще пол-яйца. Третий купил одно яйцо, последнее. Сколько же яиц принесла бабушка на базар?

Начнем с последнего яйца. Его забрал третий покупатель.

Теперь предыдущий эпизод. На прилавке лежит это яйцо, еще пол-яйца и еще столько же (то есть еще полтора яйца) — значит, всего 3 яйца. Подходит второй покупатель, забирает половину (полтора яйца) и еще пол-яйца — значит, он уносит 2 яйца, а одно остается.

И наконец — с чего все началось. Лежат на прилавке три яйца, еще пол-яйца и еще столько же, то есть всего 7 яиц. Подходит первый покупатель, забирает половину всех яиц (это 3,5 яйца) и еще пол-яйца, то есть всего 4 яйца. Значит, всего принесла бабушка продавать 7 яиц.

Что делать, если не поняли?

Рисуйте яйца. Можете использовать наглядный материал. Чтобы упростить задачу, можно взять вареные яйца, которые легко делятся пополам. :-)

А теперь — вторая серия.

---

2. Прошло время, разбогатела бабушка. Везет на базар корзину с яйцами. Да беда случилась — налетел на ее тележку мотоциклист. Яйца, конечно, всмятку. Все до единого.

— Не горюй, бабуся, — сказал байкер, — заплачу тебе за яйца. А сколько яиц-то было?

— Не знаю, голубчик. Разложила я их на две кучки поровну, осталось одно яичко. То же повторилось, когда я их раскладывала поровну на четыре, на пять, на шесть кучек. И только когда на семь кучек поровну разложила, ни одного не осталось. А больше 400 яиц в корзину не поместится.

И задумался байкер: сколько же яиц везла бабушка на базар?

Пусть N — количество яиц.

Когда бабушка разложила их на 7 кучек, ни одного не осталось. Значит, N делится на 7. Это обозначается так: $N \,\vdots\, 7$.

Когда бабушка раскладывала яйца на 2, на 4, 5 и 6 кучек, одно яйцо оставалось лишним. Значит, $N - 1$ делится на 2, на 4, на 5 и на 6.

По условию, $N \le 400$. Тогда $K = N - 1 \le 399$, и при этом K делится на 2, на 4, на 5 и на 6.

Вспомним, что такое наименьшее общее кратное (НОК) двух или нескольких чисел.

Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких натуральных чисел — это наименьшее натуральное число, которое делится на все эти числа без остатка.

Какие же числа делятся на 2, на 4, на 5 и на 6 без остатка?

Разложим числа 4 и 6 на простые множители. $4 = 2 \cdot 2$; $6 = 3 \cdot 2$.

Наименьшее общее кратное чисел 2, 4, 5 и 6 должно делиться на 4, на 3, на 5. Тогда оно автоматически будет делиться на 2 и на 6.

Наименьшее из таких чисел — 60. Все числа, которые делятся на 60 (то есть кратные 60), также делятся на 2, на 4, на 5 и на 6.

Значит, величина K, равная $N - 1$, может принимать значения: 60, 120, 180, 240, 300, 360.

Но при этом $N = K + 1$ должно делиться на 7. Давайте выпишем возможные значения N: 61, 121, 181, 241, 301, 361.

Из этих чисел нам подходит только 301, потому что другие не делятся на 7.

Ответ: 301 яйцо уничтожил байкер.

Как решать нестандартные задачи? Здесь нет ни логарифмов, ни синусов, ни параметров. Нужны знания по математике на уровне 6–9-го класса: признаки делимости, деление с остатком, прогрессии, умение решать неравенства. И еще — логика, математическая культура и умение грамотно записывать решение. И даже когда все это есть, остается нечто неуловимое, нестандартное, что можно выразить только словами: «Я догадался!»

И поскольку это задача на числа и их свойства — кратко повторим теорию.

Натуральные числа — это числа 1, 2, 3, ... — то есть те, что мы используем для счета предметов. Ноль не является натуральным числом. Множество натуральных чисел обозначается N.

Целые числа — это 0, ±1, ±2, ±3 ... Множество целых чисел обозначается Z.

Рациональные — числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное. Например, 3; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{15}$; 0,12 — рациональные числа. Рациональные числа — это периодические десятичные дроби. Множество рациональных чисел обозначается Q.

Иррациональные числа — те, которые нельзя записать в виде $\frac{p}{q}$ или в виде периодической десятичной дроби. Числа π и e, $\sqrt{2}$, $\log_3 5$ — иррациональные.

Множества рациональных и иррациональных чисел вместе образуют множество **действительных чисел** R.

Дальше мы будем говорить о натуральных числах.

Число a делится на число b, не равное нулю, если найдется такое число c, что $a = bc$. Например, 15 делится на 3, а 49 делится на 7. Обозначается это так: $a \vdots b$.

Если a делится на b, то число b называется **делителем** числа a.

Если числа a и b делятся на c, то $a + b$ тоже делится на c.

Если числа a и b делятся на c, а m и n — целые, то $ma + nb$ тоже делится на c.

Признаки делимости:

- ✓ $a \vdots 2 \Leftrightarrow$ последняя цифра числа a четная;
- ✓ $a \vdots 3 \Leftrightarrow$ сумма цифр числа a делится на 3;
- ✓ $a \vdots 5 \Leftrightarrow$ число a оканчивается на 0 или на 5;
- ✓ $a \vdots 4 \Leftrightarrow$ число, составленное из двух последних цифр числа a, делится на 4.
- ✓ $a \vdots 8 \Leftrightarrow$ число, составленное из трех последних цифр числа a, делится на 8.
- ✓ $a \vdots 9 \Leftrightarrow$ сумма цифр числа a делится на 9.
- ✓ $a \vdots 10 \Leftrightarrow$ последняя цифра числа a равна 0;
- ✓ $a \vdots 11 \Leftrightarrow$ суммы цифр на четных и нечетных позициях числа a равны или их разность кратна 11.

Деление с остатком встретилось нам в задаче про бабушку и яйца. Если $a = bc + r$, то число a делится на b с остатком r. Немного непривычно, что формула деления с остатком не содержит знака деления.

Например, при делении 9 на 4 мы получаем частное 2 и остаток 1, то есть $9 = 4 \cdot 2 + 1$.

При делении 53 на 5 мы получим 10 и в остатке 3, т. е. $53 = 5 \cdot 10 + 3$.

Остаток от деления любого нечетного числа на 2 равен единице. Поэтому любое нечетное число может быть записано в виде $2n + 1$, а четное — в виде $2n$.

Простые числа — те, что делятся только на себя и на единицу. Единица не является ни простым, ни составным числом. Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 …

Любое натуральное число можно разложить на простые множители. Например, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, а $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$.

Основная теорема арифметики: любое натуральное число можно представить в виде произведения простых делителей, взятых в натуральных степенях, причем это разложение единственно.

$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_S^{n_S}$

Например, $72 = 2^3 \cdot 3^2$; $98 = 2 \cdot 7^2$.

При этом **количество делителей натурального числа** a равно $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_S + 1)$.

Наименьшее общее кратное двух чисел (НОК) — это наименьшее число, которое делится на оба данных числа.

Наибольший общий делитель двух чисел (НОД) — это наибольшее число, на которое делятся два данных числа.

Числа называются **взаимно простыми**, если они не имеют общих делителей, кроме единицы.

Решим в качестве тренировочных несколько задач из базового ЕГЭ по математике на числа и их свойства.

---

1. Вычеркните в числе 74 513 527 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

Чтобы число делилось на 15, оно должно делиться на 3 и на 5.

Натуральное число кратно пяти, если оно оканчивается на 5 или на 0. Поскольку нулей в исходном числе нет, вычеркнем две последних цифры — 2 и 7. Получим число, оканчивающееся на пятерку, т. е. 745 135.

Остается вычеркнуть еще одну цифру, чтобы получившееся число делилось на 3.

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

В числе 745 135 сумма цифр равна 25. Вычеркнем 4, чтобы сумма цифр была равна 21.

Получим число 75 135. Оно делится на 3 и на 5, а значит, и на 15.

Обратите внимание, что ответ в этой задаче — не единственный.

---

2. Приведите пример четырехзначного числа, кратного 12, произведение цифр которого равно 10. В ответе укажите ровно одно такое число.

Обозначим наше число $\overline{abcd}$. Такая черта над числом означает, что a, b, c и d — его цифры.

По условию, $a \cdot b \cdot c \cdot d = 10$.

С другой стороны, $10 = 2 \cdot 5$, и другим способом разложить число 10 на простые однозначные множители невозможно.

Значит, одна из цифр числа $\overline{abcd}$ — пятерка, другая — двойка, а оставшиеся — единицы.

Как же расположить эти цифры, чтобы число $\overline{abcd}$ делилось на 12?

$12 = 3 \cdot 4$. Значит, число $\overline{abcd}$ должно делиться на 3 и на 4.

Если цифры числа $\overline{abcd}$ — это 1, 1, 2 и 5, то их сумма равна 9, и эта сумма делится на 3.

Ясно, что двойка должна быть последней цифрой (иначе число $\overline{abcd}$ нечетное).

Если предпоследней цифрой будет 1, мы получим число $5112 = 5100 + 12$ или $1512 = 1500 + 12$. Отлично! Вспомним, что 100 делится на 4. Значит, и 5100, и 1500 делятся на 4, а наше число в итоге делится на 12.

Запишем один из ответов: 1512.

---

3. Приведите пример трехзначного натурального числа, большего 500, которое при делении на 8 и на 5 дает равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

Обозначим наше число $\overline{abc}$. Это число трехзначное и большее, чем 500.

Значит, $501 \le \overline{abc} \le 999$.

Средняя цифра является средним арифметическим крайних, следовательно, $b = \frac{1}{2}(a + c)$.

По условию, число $\overline{abc}$ при делении на 5 и на 8 дает равные ненулевые остатки. Обозначим этот остаток k. Тогда число $n = \overline{abc} - k$ делится на 5 и на 8, и значит, $n = \overline{abc} - k$ делится на 40.

Каким же должно быть число k, если это число — ненулевой остаток от деления на 5? Ясно, что $1 \le k \le 4$. Значит, k — последняя цифра в числе $\overline{abc}$, $k = c$.

Тогда $-4 \le -c \le -1$ (мы умножили предыдущее неравенство на -1); $501 \le \overline{abc} \le 999$.

Сложим два неравенства. Мы можем это сделать — ведь знаки в них одинаковые.

$497 \le \overline{abc} - c \le 998$, и при этом $n = \overline{abc} - c$ делится на 40.

Выпишем возможные n.

520, 560, 600, 640, 680, 720, 760, 800, 840, 880, 920, 960.

Подберем последнюю цифру так, чтобы средняя цифра была средним арифметическим крайних. При этом последняя цифра не больше 4.

Нам подойдут числа 642 и 963. В ответ пишем любое из них.

4. Цифры четырехзначного числа записали в обратном порядке и получили второе четырехзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 2457. Приведите пример такого числа.

Запишем наше число как $\overline{abcd}$.

Тогда второе число равно $\overline{dcba}$, причем $d \neq 0$.

Получим: $$-\begin{array}{r} abcd \\ dcba \\ \hline 2457 \end{array}$$

Разность двух четырехзначных чисел оказалась также четырехзначным числом. Значит, $a > d$.

Посмотрим на последние цифры этих чисел. Поскольку $d < a$, для вычитания нам придется «занять» единицу в предпоследнем разряде.

Тогда $10 + d - a = 7$, отсюда $a = d + 3$. (1)

Как получилась четверка во втором разряде числа 2457? Предположим, что $b + 10 - c = 4$, значит, $c = b + 6$. (2)

Подберем a, b, c и d согласно условиям (1) и (2). Пусть $d = 1$, $a = 4$, $b = 2$, $c = 8$.

$$-\begin{array}{r} 4281 \\ 1824 \\ \hline 2457 \end{array}$$

Конечно, ответ не единственный. Мы могли бы подобрать другие a, b, c и d, удовлетворяющие условиям (1) и (2).

Вот задача, когда-то предложенная на вступительных экзаменах в Финансовый университет и давно ставшая народной. В ней есть забавная ловушка, поэтому лучше решать ее большой компанией. Рекомендую учителям матклассов и ведущим курсов подготовки к ЕГЭ!

5. Два брата продали стадо овец, выручив за каждую овцу столько рублей, сколько было в стаде овец. Решив разделить выручку поровну, они поступили следующим образом: каждый брат, начиная со старшего, брал из общей суммы по 10 рублей. После того как в очередной раз старший брат взял 10 рублей, остаток от выручки оказался меньше 10 рублей. Желая его компенсировать, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей был оценен этот нож? (Все суммы денег выражаются натуральными числами.)

Пусть в стаде n овец, и за каждую выручили n рублей.

Теперь у братьев есть n^2 рублей.

Пусть из кучки в n^2 рублей братья k раз берут по 10 рублей. Старший, потом младший, опять старший и опять младший… И вот старший брат взял десятку, и осталось y рублей. Теперь младший брат слегка обиженно смотрит на старшего, и старший отдает ему свой нож. Представили?

Пусть нож оценен в x рублей.

…А теперь отложите книжку и запишите систему условий. И проверьте, что у вас получилось.

Вот что у меня: $\begin{cases} n^2 = 10k + y, \\ 1 \le y \le 9, \\ x + y = 10 - x. \end{cases}$

Первое уравнение вопросов не вызывает, правда? Со вторым — неравенством — тоже все понятно. Остаток от деления на 10 ненулевой и меньше 10, и мы записали эти условия в виде нестрогого неравенства. А вот третье уравнение...

Что же оно означает?

Каждый из братьев получил одинаковое количество десяток. И еще младший брат взял y рублей и нож, оцененный в x рублей (это левая часть уравнения). А старший брат взял на одну десятку больше, но зато лишился ножа, став на x рублей беднее.

Получаем: $2x = 10 - y$, т. е. $y = 10 - 2x$.

Правая часть уравнения делится на 2. Значит, и левая его часть делится на 2, и тогда y — четное число.

Тогда из первого уравнения следует, что n^2 — четная величина. Но если квадрат натурального числа является четной величиной, значит, и само число четно. И тогда n^2 делится на 4.

Поскольку y — четный остаток от деления на 10, то y может принимать значения: 2, 4, 6, 8.

Тогда запись $n^2 = 10k + y$ означает, что n^2 оканчивается на 2, 4, 6 или 8. Теперь 2 и 8 можно отбросить, поскольку ни один квадрат целого числа ни на 2, ни на 8 не оканчивается. Остаются варианты $y = 4$ и $y = 6$. Что же из них является правильным ответом?

Вспомним еще одно условие: последним взял 10 рублей старший брат. Это значит, что k, т. е. количество десяток, — нечетно. Пусть $k = 2m + 1$.

Если $y = 4$, то $n^2 = 10(2m + 1) + 4 = 20m + 14$. Получим: $n^2 - 20m = 14$.

Посмотрим внимательно на это уравнение в целых числах. Поскольку n^2 делится на 4, 20 делится на 4, левая часть уравнения делится на 4. Но правая его часть, равная 14, на 4 не делится! Значит, у него нет решений, и $y = 4$ не подходит.

Если $y = 6$, то $n^2 = 10(2m + 1) + 6 = 20m + 16$, противоречий нет. В этом случае $x = 2$. Это ответ.

Перейдем к задачам ЕГЭ профильного уровня последних лет. Все они — новые. В мою книгу «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ» эти задачи не вошли.

---

1. (ЕГЭ-2016) На доске написаны числа 1, 2, 3 , ... 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательности 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Заметим, что сумма чисел в каждой тройке $S_i \le 34$. Запомним: в задачах такого типа удобнее пользоваться нестрогими неравенствами, чем строгими.

а) Пример привести легко (и получить за этот пример 1 первичный балл на ЕГЭ!)

30, 1, 3 (сумма 34),

2, 4, 27 (сумма 33),

5, 6, 21 (сумма 32),

7, 8, 16 (сумма 31),

9, 10, 11 (сумма 30).

б) Выясним, можно ли сделать 10 ходов. Ведь у нас 30 чисел, и, сделав 10 ходов, мы сотрем с доски их все. А значит, вопрос можно переформулировать следующим образом:

«Можно ли разбить натуральные числа от 1 до 30 на тройки так, чтобы суммы чисел в каждой тройке были различны и каждая из них не превышала 34?»

Предположим, что такое разбиение возможно. Обозначим суммы чисел в каждой тройке S_i, где i принимает значения от 1 до 10. Расставим эти суммы в порядке убывания. Пусть S_1 — максимальная сумма, причем она не превосходит 34, и каждая следующая сумма меньше предыдущей.

Тогда $S_2 \le 33$, $S_3 \le 32$, … $S_{10} \le 25$.

Суммируя по всем десяти тройкам, получим, что сумма всех тридцати чисел не превосходит $34 + 33 + 32 + 31 + \ldots + 25$, т. е. 295.

Мы применили формулу суммы n членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n) \cdot n$.

С другой стороны, мы задействовали все 30 чисел. Их сумму легко найти — это сумма арифметической прогрессии, члены которой — натуральные числа от 1 до 30. Обозначим ее S_{30}.

$$S_{30} = \frac{1+30}{2} \cdot 30 = 465.$$

Получили, что $S_{30} > 295$ — противоречие.

Значит, 10 ходов сделать нельзя.

в) Какое же максимальное число ходов можно сделать? В пункте (а) мы выяснили, что 5 ходов сделать можно. В пункте (б) доказали, что 10 ходов сделать нельзя. Нам осталось проверить, можно ли сделать 9, 8, 7 или 6 ходов.

Повторим рассуждения, аналогичные пункту (б), для случаев $n = 9, 8, 7$ и 6.

Если n (число ходов) равно 9, то $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_9$ не превосходит $34 + 33 + \ldots + 26$, т. е. $S \le 270$. С другой стороны, из чисел от 1 до 30 мы выбираем 9 троек, то есть 27 чисел, и их сумма не меньше, чем $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 27$, то есть $S \ge 378$ — противоречие.

Аналогично для $n = 8$ получим, что $S \le 244$ и $S \ge 300$ — тоже противоречие.

Для $n = 7$ имеем: $S \le 217$ и $S \ge 231$, значит, и 7 ходов сделать нельзя.

Для $n = 6$ противоречия нет. Итак, число ходов $n \le 6$.

Закончено ли решение? Еще нет. Мы доказали, что $n \le 6$ (сделали оценку). Осталось привести пример $n = 6$. Приведем этот пример:

Тройки чисел:

12, 11, 10, сумма 33;

13, 14, 7, сумма 34;

15, 16, 1, сумма 32;

17, 2, 3, сумма 22;

4, 8, 9, сумма 21;

18, 5, 6, сумма 29.

Итак, наибольшее число ходов — 6.

Метод, которым мы в этой задаче пользуемся, называется «Оценка плюс пример».

«Оценка плюс пример» — это специальное математическое рассуждение, которое применяется в некоторых задачах при нахождении наибольших или наименьших значений.

Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины A. Действуем в два этапа.

1. **Оценка.** Показываем, что выполнено неравенство $A \ge \alpha$.
2. **Пример.** Предъявляем пример, когда достигается равенство $A = \alpha$.

2. (ЕГЭ-2017) На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?

б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

а) Предположим, что из 30 чисел на доске 15 чисел оканчиваются на двойку, а другие 15 — на шестерку. Сумма 15 чисел, в каждом из которых последняя цифра — двойка, оканчивается на 0. Аналогично и с теми, что оканчиваются на шестерку, — их сумма также оканчивается на ноль. Тогда сумма всех чисел на доске никак не может быть равна 2454. Получили противоречие! Ответ в пункте (а) — нет, не может.

б) Предположим, что на доске ровно одно число, которое оканчивается на 6.

Кроме него, на доске есть также 29 различных чисел, в которых последняя цифра — двойка. Какой может быть сумма этих 29 чисел?

Ясно, что она не меньше, чем сумма 29 чисел вида 2, 12, 22, 32… — т. е. не меньше, чем сумма 29 членов арифметической прогрессии с разностью 10 и $a_1 = 2$.

Сумма 29 членов такой прогрессии $S_{29} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 10 \cdot 28) \cdot 29 = 4118$. Значит, сумма 29 чисел, оканчивающихся на двойку, не меньше 4118, но это больше, чем сумма всех 30 чисел в условии задачи.

Мы снова пришли к противоречию. Получается, на доске не может быть ровно одного числа, оканчивающегося на 6.

в) Какое же наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

Пусть на доске n чисел, в которых последняя цифра — шестерка (их сумма равна S_1), и $30 - n$ чисел, в которых последняя — двойка (их сумма равна S_2). Ясно, что наименьшими S_1 и S_2 будут в случае, если это числа вида: 6, 16, 26, 36… и 2, 12, 22, 32…

Имеем: $S_1 \geq \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 2 + 10(n-1)) \cdot n$; $S_2 \geq \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 10(30 - n - 1)) \cdot (30 - n)$.

При этом $S_1 + S_2 = 2454$.

$\frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 2 + 10(n-1)) \cdot n + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 10(29 - n)) \cdot (30 - n) \leq 2454$;

$n + 5n^2 + 4410 - 297n + 5n^2 \leq 2454$;

$5n^2 - 148n + 978 \leq 0$.

Рассмотрим уравнение $5n^2 - 148n + 978 = 0$.

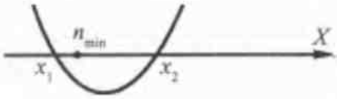
$D = 148^2 - 4 \cdot 5 \cdot 978 = 4 \cdot 586$

$2 \cdot \sqrt{576} < \sqrt{D} < 2 \cdot \sqrt{625}$

$48 < \sqrt{D} < 50$

Оценим наименьшее возможное n при условии, что n — целое.

Вспомним, как выглядят решения неравенства вида $ax^2 + bx + c \leq 0$. Здесь x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.



$n_{min} \geq x_1$; т. е. $n_{min} \geq \frac{148-2\sqrt{586}}{10}$; $n_{min} \geq \frac{74-\sqrt{586}}{5} > \frac{74-\sqrt{625}}{5}$, т. е. $n_{min} > \frac{74-25}{5}$.

$n_{min} > 9{,}8$. Тогда $n \geq 10$.

Но что будет, если $n = 10$? На доске будет 10 чисел, которые оканчиваются на 6, и 20 чисел, которые оканчиваются на 2. Сумма всех тридцати чисел в этом случае оканчивается на ноль, и это противоречит условию. Значит, $n \geq 11$.

Мы оценили n. Осталось привести пример, когда $n = 11$, то есть на доске 11 чисел, которые оканчиваются на 6, и 19 чисел, в которых последняя цифра — двойка.

Для того чтобы количество чисел, оканчивающихся на двойку, было максимальным, возьмем числа 2, 12, 22, 32… 182. Сумма этих 19 чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 1748.

Значит, сумма чисел, которые оканчиваются на 6, равна 2454 – 1748 = 706.

Возьмем числа 6, 16, 26, 36… 106.

Сумма этих одиннадцати чисел равна 616. Добавим к последнему из них 90. Получим: 2, 12, 22, 32… 182, 6, 16, 26, 36… 196. Это пример.

Заметим, что, когда мы в экзаменационной работе используем метод «Оценка плюс пример», мы не обязаны объяснять, как нашли пример. Надо просто его привести.

---

3. Четырехзначное натуральное число делится на 4, а сумма цифр этого числа равна произведению его цифр.

а) Может ли ровно одна из цифр этого числа не быть единицей?

б) Может ли ровно одна из цифр этого числа быть единицей?

в) Найдите все такие числа.

Пусть $A = \overline{abcd}$, $A \vdots 4$, $a + b + c + d = abcd$.

Заметим, что среди цифр числа A нет нулей. Иначе произведение цифр было бы равно нулю.

а) Предположим, что среди цифр числа A ровно 3 единицы.

Пусть все цифры числа A, кроме одной, — единицы. Например, $a \neq 1$, $b = c = d = 1$.

Тогда $a = a + 3$, и это невозможно.

б) Предположим, что только одна из цифр числа A равна единице, а другие не равны. Очевидно, $d \neq 1$ (поскольку $A \vdots 4$).

Пусть $a = 1$, $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d \geq 2$. Тогда $b + c + d + 1 = bcd$.

Выразив из этого равенства d, получим: $d = \frac{b+c+1}{bc-1}$.

Поскольку $2 \leq d \leq 9$, $\frac{b+c+1}{bc-1} \geq 2$.

Умножим обе части неравенства на $bc - 1 > 0$.

Получим: $b \leq \frac{c+3}{2c-1}$.

Мы знаем, что $b \geq 2$. Это значит, что $\frac{c+3}{2c-1} \geq 2$.

Решив это неравенство, найдем, что $c \leq \frac{5}{3}$.

Это противоречит условию $c \geq 2$ и означает, что в числе A не может быть ровно одной единицы.

в) Возможно ли, чтобы в числе A вообще не было единиц? Предположим, что $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d \geq 2$. Из условия $a + b + c + d = abcd$ получаем, что $d = \dfrac{a+b+c}{abc-1} \geq 2$.

Тогда $a + b + c \geq 2abc - 2$, отсюда $b \leq \dfrac{a+c+2}{2ac-1}$.

При этом $b \geq 2$. Тогда $\dfrac{a+c+2}{2ac-1} \geq 2$; $a+c+2 \geq 4ac-2$; $2 \leq a \leq \dfrac{c+4}{4c-1}$.

Из неравенства $\dfrac{c+4}{4c-1} \geq 2$ получаем, что $c + 4 \geq 8c - 2$; $7c \leq 6$; $c < 1$, противоречие с условием $c \geq 2$.

Значит, число A содержит ровно две единицы. Мы доказали, что другие случаи невозможны.

Пусть x и y — цифры числа A, отличные от единиц.

$x + y + 2 = xy$, тогда $y = \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{x-1+1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{3}{x-1}$.

Мы получили, что $x - 1$ должно быть делителем числа 3.

Это возможно, только если $x = 2$ или $x = 4$.

Если $x = 4$, то $y = 2$. Если $x = 2$, то $y = 4$. Значит, число A составлено из цифр 1, 1, 2 и 4.

Поскольку $A \,\vdots\, 4$, возможны три варианта: 1124, 4112 и 1412.

---

4. (ЕГЭ-2017) На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 240?

б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 16?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 16, может быть на доске?

а) Предположим, что на доске есть число 240. Тогда сумма остальных девяноста девяти чисел $S_{99} = 5130 - 240 = 4890$.

Вы уже догадались, что дальше? Эта сумма не меньше, чем сумма первых 99 членов натурального ряда: $S_{99} \geq 1 + 2 + 3\ldots + 99$, т. е. $S_{99} \geq 4950$. В то же время $S_{99} = 4890$ — противоречие! Значит, число 240 не может находиться на доске.

б) Попробуем обойтись без числа 16. Посчитаем сумму натуральных чисел от 1 до 100. $S_{100} = 1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$.

Теперь заменим число 16 на наименьшее из тех, на которые его можно заменить, т. е. на число 101. Пусть Z_{100} — сумма 100 чисел после замены. Оценим ее: $Z_{100} \geq 5050 - 16 + 101 = 5135$.

Опять противоречие с условием! Значит, число 16 обязательно должно быть на доске.

в) Посмотрим, какое наименьшее количество чисел, кратных 16, может быть на доске.

Мы уже поняли, что число 16 должно быть обязательно. Может ли оно быть единственным числом, кратным 16?

Оценим в этом случае сумму 100 чисел на доске:

$S_{100} \geq 1 + 2 + \ldots + 31 + 33 + \ldots + 47 + 49 + \ldots + 63 + 65 + \ldots + 79 + 81 + \ldots + 95 + 97 + 98 +$
$+ 99 + 100 + 101 + 102 + 103 + 104 + 105.$

Мы убрали числа 32, 48, 64, 80 и 96 и заменили их числами 101, 102, 103, 104 и 105.

Тогда $S_{100} \geq \frac{1+105}{2} \cdot 105 - 32 - 48 - 64 - 80 - 96$.

$S_{100} \geq 5245$, и равенство $S_{100} = 5130$ невозможно.

Аналогично, если на доске есть только два числа, кратные 16:

$S_{100} \geq 1 + 2 + ... + 47 + 49 + ... + 63 + 65 + ... + 79 + 81 + ... + 95 + 97 + 98 + 99 + 100 + 101 + 102 + 103 + 104$.

$$S_{100} \geq \frac{1+104}{2} \cdot 104 - 48 - 64 - 80 - 96.$$

$S_{100} \geq 5172$, и мы снова получим противоречие с условием.

Три числа, кратные 16, могут быть на доске. Пусть это числа 16, 32 и 48.

Тогда $S_{100} \geq 1 + 2 + ... + 63 + 65 + ... + 79 + 81 + ... + 95 + 97 + 98 + 99 + 100 + 101 + 102 + 103$.

$$S_{100} \geq \frac{1+103}{2} \cdot 103 - 64 - 80 - 96.$$

$S_{100} \geq 5116$, противоречий с условием нет.

Сумма 100 чисел 1, 2, …, 63, 65 … 79, 81, …95, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 117 равна 5130, и среди этих 100 чисел есть ровно 3 числа, кратные 16.

Заметим, что во всех трех задачах использована формула суммы n членов арифметической прогрессии.

---

5. (ЕГЭ-2017) На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?

б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?

в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

а) Да, может. Например, числа 7, 8, 9, 10, 13 удовлетворяют условию.

Напомню, что мы не обязаны рассказывать, как получили пример. Главное — привести его.

Подсказка: подбирая пример, можно начать с одинаковых чисел: 9, 9, 9, 9, 9.

Сумма равна 45. Теперь сделаем числа различными и наибольшее из них увеличим на два. Пример подобран за несколько секунд!

б) Предположим, что на доске 10 чисел, сумма которых равна 94. Пусть все они различны. Наименьшее из них обозначим a_1, наибольшее — a_{10}.

Тогда $a_{10} \leq 3a_1$ и $a_{10} \geq a_1 + 9$.

Получим, что $a_1 + 9 \leq 3a_1$ и $a_1 \geq 5$. Это значит, что сумма всех десяти чисел $S_{10} \geq 5 + 6 + \ldots + 14$, т. е. не меньше 95. Мы получили противоречие с условием.

Значит, ответ в этом пункте — нет, не может.

в) Пусть на доске написано k чисел и их произведение равно 8000.

Легко подобрать примеры, когда на доске два числа: 80 и 100. Легко подобрать пример и с тремя числами: 16, 20, 25. Возможны ли другие варианты?

Разложим число 8000 на простые множители: $8000 = 8 \cdot 10^3 = 2^6 \cdot 5^3$.

Если на доске 4 числа, то все четыре числа не могут делиться на 5. Если одно из чисел содержит $5^3 = 125$, то три других числа содержат только степени двойки и наибольшее из них отличается от наименьшего не менее чем в 4 раза. Тогда условие задачи не выполняется.

Если три из четырех чисел на доске содержат множитель 5, то отличаться они должны только степенями двойки. Снова получим, что наибольшее из них отличается от наименьшего не менее чем в 4 раза.

И наконец, случай, когда одно из чисел содержит множитель 5, а другое — множитель 25. Осталось распределить двойки.

Пусть одно из оставшихся чисел равно a, $a \geq 16$ (поскольку на доске есть число, содержащее множитель 25). Но тогда другое из оставшихся $b \leq 4$, и снова условие задачи не выполняется.

Значит, четыре или более чисел в условиях нашей задачи на доске быть не может.

---

6. (ЕГЭ-2017) На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

а) Пусть на доске 5 чисел: a, b, c, d и e, причем $a < b < c < d < e$.

По условию, $ab > 40$. Значит, $ab \geq 41$. Пусть $a = 6$; $b = 7$.

Поскольку $de \leq 99$, возьмем $d = 9$, $e = 10$, $c = 8$.

Наш пример: 6, 7, 8, 9, 10.

Напомню, что если вопрос задачи сформулирован как: «Может ли на доске быть 5 чисел?» — у нас есть варианты ответа: «Да, может, вот пример», или «Нет, не может, потому что…».

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

Предположим, что чисел, удовлетворяющих условию задачи, на доске 6: a, b, c, d, e и f.

Пусть $a < b < c < d < e < f$.

Тогда $b \geq 7$ (если $b < 7$, т. е. $b \leq 6$, то $a \leq 5$, и тогда $ab \leq 30$).

Кроме того, $e \leq 9$ (если $e \geq 10$, то $f \geq 11$ и $ef \geq 110$); $7 \leq b < c < d < e \leq 9$.

Но между числами 7 и 9 находится только одно натуральное число 8, а по условию c и d различны. Мы пришли к противоречию. Значит, в пункте (б) ответ — «не может».

в) Пусть на доске четыре числа: a, b, c, d, причем $a < b < c < d$; $ab \geq 41$; $cd \leq 99$.

Пусть $S = a + b + c + d$. Найдем S_{max}.

Заметим, что случай $ab = 41$ невозможен, так как если $a = 1$, $b = 41$, то $c > 41$ и $bc > 100$.

Значит, $ab \geq 42$, $cd \leq 99$.

Аналогично пункту (б), $b \geq 7$ и $c \leq 9$.

Тогда $b = 7$ или $b = 8$,

$c = 8$ или $c = 9$; тогда $b + c \leq 17$.

Поскольку $a \geq 6$, $a = 6$ или $a = 7$. Поскольку $d \leq 12$, возможные значения для d — это 9, 10, 11, 12. Тогда $a + d \leq 19$.

Сумма всех четырех чисел $S \leq 17 + 19$, т. е. $S \leq 36$.

Это оценка. А вот пример $S = 36$ в условиях нашей задачи привести не удастся. Если $b = 7$ и $c = 9$, то $S = 36 = 7 + 8 + 9 + 12$. Однако в этом случае $cd > 100$.

Подберем пример для $S = 35$.

Нам подходят числа 7, 8, 9, 11. Значит, наибольшее значение суммы $S = 35$.

7. (ЕГЭ-2015) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в три раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в пять раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Двузначные числа на доске — это числа вида $10a_i + b_i$, где a_i — первая цифра, b_i — вторая. Пусть на доске n чисел.

По условию, $10(a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + ... + b_n) = 2970$.

а) $10(b_1 + ... + b_n) + (a_1 + a_2 + ... + a_n) = 990$.

Обозначим $a_1 + a_2 + ... + a_n = A$, $b_1 + ... + b_n = B$.

$$\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = 990. \end{cases}$$

Отсюда $B = 70$, $A = 290$.

Подберем пример. Возьмем 30 раз число 92 и 10 раз — число 21.

$$A = \underbrace{9+9+...+9}_{30} + \underbrace{2+2+...+2}_{10}$$

$$B = \underbrace{2+2+...+2}_{30} + \underbrace{1+1+...+1}_{10}$$

Тогда $10A + B = 10 \cdot (30 \cdot 9 + 2 \cdot 10) + 30 \cdot 2 + 10 = 2970$,
$10B + A = 10 \cdot (30 \cdot 2 + 10) + (30 \cdot 9 + 2 \cdot 10) = 990$.

б) Предположим, $\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = 594. \end{cases}$

Решив систему, найдем $B = 30$, $A = 294$.

Если на доске n чисел, то $n \le 30$, поскольку все $b_i \ge 1$.

Если $n \le 30$, то $A = a_1 + a_2 + ... + a_n \le 270$, поскольку $1 \le a_i \le 9$.

Из условия мы получили, что $A = 294$. Мы пришли к противоречию — значит, в пункте (б) ответ «нет».

Задачи на числа и их свойства чем-то похожи на суп из топора. Помните эту сказку? Всё из ничего! Наша задача — извлечь из условия все, что можно, и применить, чтобы сделать оценки нужных величин.

в) $\begin{cases} 10A + B = 2970, \\ 10B + A = S. \end{cases}$

Найдем наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел. Выразим S из системы: $S = 10B + A = 29700 - 99A$.

Заметим, что $S = 29700 - 99A$ делится на 99. Пусть $S = 99k$; тогда $99k = 99 \cdot 300 - 99A$; $k = 300 - A$; значит, $A = 300 - k$ и $B = 10k - 30$.

Мы получили систему: $\begin{cases} A = 300 - k, \\ B = 10k - 30. \end{cases}$

Пусть на доске было n чисел. A — сумма первых цифр этих чисел, B — сумма вторых цифр этих чисел. Поскольку цифры взяты от 1 до 9, $n \le B \le 9n$, $n \le A \le 9n$.

$$\begin{cases} n \le 300 - k \le 9n, \\ n \le 10k - 30 \le 9n; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n \ge 300 - k, \\ 9n \le 90k - 270. \end{cases}$$

Из первого неравенства мы взяли оценку для $9n$. А в неравенстве $n \le 10k - 30$ (оно следует из второго) умножили обе части на 9, чтобы получить другую оценку для $9n$.

$300 - k \le 9n \le 90k - 270$; $300 - k \le 90k - 270$;

$91k \ge 570$; $k \ge \frac{570}{91}$; значит, $k \ge 7$ (так как k — целое).

Тогда $S = 99k \ge 693$.

Если $k = 7$, то $A = 293$, $B = 40$.

Приведем пример, когда $A = 293$, $B = 40$, $S = 693$.

Пусть $n = 40$, $b_i = 1$; $A = 293 = 13 \cdot 8 + 27 \cdot 7$.

Возьмем 13 раз число 81 и 27 раз — число 71.

Получим $\underbrace{81+81+...+81}_{13} + \underbrace{71+71+...+71}_{27} = 2970.$

$\underbrace{18+18+...+18}_{13} + \underbrace{17+17+...+17}_{27} = 693.$

---

8. Рассмотрим частное трехзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Обозначим наше число A; $A = \overline{abc} = 100a + 10b + c$.

а) Приведем пример числа, для которого $\frac{A}{abc} = \frac{113}{27}$.

Поскольку a, b и c — цифры, $1 \le a \le 9$; $1 \le b \le 9$ и $1 \le c \le 9$.

Число 113 — простое, $27 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 9$.

Если $A = 113$, то произведение его цифр равно 3, а не 27. Значит, число A кратно 113.

Нам подойдет $A = 113 \cdot 3 = 339$, тогда $\frac{339}{3 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{113}{27}$.

б) Предположим, что $\frac{A}{abc} = \frac{125}{27}$.

Получим уравнение: $3^3 \cdot (100a + 10b + c) = 5^3 \cdot abc$.

Поскольку правая часть уравнения делится на 5, то и $(100a + 10b + c) \,\vdots\, 5$. Тогда последняя цифра числа A равна нулю или пяти. Но случай $c = 0$ невозможен по условию. Значит, $c = 5$.

Кроме того, $A = (100a + 10b + c) \,\vdots\, 125$.

Выпишем трехзначные числа, которые оканчиваются на 5 и делятся на 125:

125, 375, 625, 875.

Условие $abc \vdots 27$ не выполнено ни для одного из них. Значит, предположение было неверно и ответ в пункте (б) — «нет».

в) Пусть $\frac{A}{abc} = \frac{x}{27} = m$, причем дробь $\frac{x}{27}$ несократима.

Покажем, что m максимально, если $abc = 27$.

Если $abc = 27k$, где $k \geq 2$, то $\frac{A}{abc} = \frac{A}{27k} \leq \frac{999}{27k} \leq \frac{999}{54} < 19$.

Пусть $k = 1$, тогда произведение цифр числа A равно $abc = 27$.

Значит, число A состоит из цифр 3; 3; 3 или 1; 3; 9.

Наибольшее из таких чисел: 931; $\frac{931}{27} > 34$. Мы получили результат больший, чем для случая $k \geq 2$.

Значит, $m_{max} = \frac{931}{27}$.

---

9. На доске написаны 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых больше 4, но не превосходит 44. Среднее арифметическое написанных чисел равно 11. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 3, с доски стерли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 16?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 14, но меньше 15?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Пусть на доске были написаны числа $x_1, x_2 \ldots x_{30}$ — всего 30 чисел, причем $5 \leq x_i \leq 44$. Вместо каждого из чисел $x_1, x_2 \ldots x_{30}$ написали число $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2} \ldots \frac{x_{30}}{2}$.

Заметим, что если $x_i = 5$, то $\frac{x_i}{2} < 3$.

Пусть на доске было k чисел, не равных 5, и $30 - k$ пятерок.

Поскольку среднее арифметическое 30 чисел равно их сумме, деленной на 30, сумма 30 чисел на доске равна $30 \cdot 11 = 330$.

Введем обозначения: S — сумма k чисел, не равных 5.

Тогда $S + 5(30 - k) = 330$, отсюда $S = 180 + 5k$.

Пусть m — среднее арифметическое k чисел, которые остались на доске после того как стерли числа, меньшие трех.

После того как k чисел были уменьшены в 2 раза, их сумма стала равна $\frac{S}{2}$, а их среднее арифметическое $m = \frac{S}{2k}$.

а) Может ли выполняться условие $\frac{S}{2k} > 16$?

Предположим, что $\frac{S}{2k} > 16$. Тогда $S > 32k$; $180 + 5k > 32k$, $k < 6\frac{2}{3}$.

Пусть $k = 6$, т. е. на доске 6 чисел, не равных 5, и 24 пятерки.

Тогда $24 \cdot 5 + S = 330$; $S = 210$.

Подойдут числа: $\underbrace{5, 5 \ldots 5}_{24}, 35, 35, 35, 35, 35, 35$.

б) Может ли быть $14 < m < 15$, где $m = \dfrac{S}{2k}$?

Предположим, что $14 < \dfrac{S}{2k} < 15$.

Тогда $\begin{cases} 14 < \dfrac{S}{2k} < 15, \\ S = 180 + 5k. \end{cases}$ Из первого неравенства $28k < S < 30k$. Получили систему:

$\begin{cases} 23k < 180, \\ 25k > 180; \end{cases}$ $\dfrac{180}{25} < k < \dfrac{180}{23}$; $7\dfrac{1}{5} < k < 7\dfrac{12}{23}$

Неравенство не имеет целых решений. Значит, предположение было неверно.

в) Найдем наибольшее m, где $m = \dfrac{S}{2k}$.

Сумма k чисел, не равных 5, равна S. Мы знаем, что $S = 180 + 5k$.

Отсюда $m = \dfrac{S}{2k} = \dfrac{90}{k} + \dfrac{5}{2}$.

Очевидно, m максимально при наименьшем возможном k.

Поскольку на доске k чисел, отличных от 5, каждое из этих чисел больше 5 и не превосходит 44 (по условию). Тогда их сумма $6k \le S \le 44k$.

$6k \le 180 + 5k \le 44k$; $180 + 5k \le 44k$; $39k \ge 180$; $k \ge 4\dfrac{8}{13}$.

Поскольку k — целое, $k \ge 5$.

Тогда $m = \dfrac{S}{2k} = \dfrac{90}{k} + \dfrac{5}{2} \le \dfrac{90}{5} + \dfrac{5}{2}$; $m \le 20{,}5$.

Это оценка. Приведем пример, когда $k = 5$ и $m = 20{,}5$. На доске 5 чисел, больших пяти, сумма которых равна $S = 180 + 5 \cdot 5 = 205$. Кроме них на доске находится 25 пятерок.

По условию, числа большие пяти могут быть равны между собой. Возьмем их равными 41, поскольку $205 : 5 = 41$.

Получим: $\underbrace{5, 5 \ldots 5}_{25}, 41, 41, 41, 41, 41$.

В этом случае $m = 20{,}5$.

---

10. (ЕГЭ-2015) Дано трехзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 83?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Обозначим наше число $A = \overline{abc}$. По условию, b и c не равны нулю одновременно, значит, $b + c \ge 1$.

а) Пусть $\frac{A}{a+b+c} = 82$, тогда $A = 82 \cdot (a + b + c)$; $A = 82 \cdot k$.

Другими словами, A — трехзначное число, которое делится на 82.

Выпишем все такие числа:

A	164	246	328	410	492	574	656	738	820	902	984
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Условию удовлетворяют числа 410, 820 и 902.

б) Предположим, что $\frac{A}{a+b+c} = 83$, тогда $A = 83 \cdot k$.

Рассуждаем аналогично. Выпишем возможные A и k.

A	166	249	332	415	498	581	664	747	830	913	996
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Условие $a + b + c = k$ не выполняется ни для одного из этих чисел. В пункте (б) ответ: «Нет».

Возможен и другой способ решения задачи.

Запишем число A в виде $A = 100a + 10b + c$.

Тогда в пункте (а) получим: $100a + 10b + c = 82a + 82b + 82c$; $18a = 72b + 81c$; $2a = 8b + 9c$.

Поскольку $a \le 9$ (a — цифра), $8b + 9c \le 18$, что возможно, только если $b + c \le 2$.

Например, число 902, где $b = 0$, $c = 2$, $a = 9$ подходит, $902 = 82 \cdot (9 + 2)$.

Поступим аналогично в пункте (б): $100a + 10b + c = 83a + 83b + 83c$; $17a = 73b + 82c$.

Так как $a \le 9$, $17a \le 153$, т. е. $73b + 82c \le 153$.

Это возможно только при $b = 2$, $c = 0$, или $b = 1$, $c = 0$, или $b = 0$, $c = 1$.

Однако при этих значениях b и c выражение $73b + 82c$ не делится на 17. Значит, в пункте (б) ответ: «Нет».

в) Пункт (в) — самый сложный в этой задаче.

Как и в предыдущих пунктах, запишем число A в виде: $A = 100a + 10b + c = m(a + b + c)$.

Найдем наибольшее возможное m.

Перепишем равенство в виде $(100 - m)a + 10b + c = m(b + c)$.

Поскольку $a \le 9$, $(100 - m)a + 10b + c \le (100 - m) \cdot 9 + 10b + c$.

Тогда $m(b + c + 9) \le 900 + 10b + c$, отсюда $m \le \frac{900 + 10b + c}{b + c + 9}$.

Преобразуем дробь в правой части неравенства, чтобы воспользоваться условиями $b + c \ge 1$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

$m \le \frac{810 + 10b + 10c + 90 - 9c}{b + c + 9}$ (выделяем целую часть),

$m \le \frac{810 - 9c}{b + c + 9} + \frac{10b + 10c + 90}{b + c + 9}$,

$m \le \frac{810 - 9c}{b + c + 9} + 10$.

Поскольку $b + c + 9 \ge 1 + 9$, $m \le \frac{810 - 9c}{10} + 10 \le \frac{810}{10} + 10$.

Так как $c \geq 0$, получим $m \leq 91$. Мы сделали оценку.

Приведем пример, когда $m = 91$.

При этом $c = 0$; $\dfrac{810}{b+9} = 81$, значит, $b = 1$; $\dfrac{100a+10}{a+1} = 91$, значит, $a = 9$.

Для числа $A = 910$ получим: $\dfrac{910}{9+1} = 91$.

Еще одна задача, где для решения пункта (в) необходимо умение работать с неравенствами.

---

11. Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные натуральные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

а) Предположим, что $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{7}{19}$, где a, b, c и d — не равные друг другу двузначные натуральные числа.

Да, равенство может выполняться. Например: $\dfrac{33+37}{91+99} = \dfrac{70}{190} = \dfrac{7}{19}$.

Здесь $a = 33$, $b = 37$, $c = 91$, $d = 99$.

б) Предположим, что $11 \cdot \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$;

$\dfrac{11a+11c}{b+d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$;

$11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + cb^2$;

$10abd - ad^2 = cb^2 - 10cbd$;

$ad(10b - d) = bc(b - 10d)$.

Поскольку a, b, c и d — различные двузначные числа, $10b$ и $10d$ — трехзначные. Тогда $10b - d > 0$, $b - 10d < 0$ и равенство невозможно.

в) Пусть $a > 3b$, $c > 6d$,

$\dfrac{a+c}{b+d} = m$. Найдем наименьшее возможное m.

Запишем условия $a > 3b$ и $c > 6d$ в виде нестрогих неравенств: $a \geq 3b + 1$, $c \geq 6d + 1$.

Тогда $m = \dfrac{a+c}{b+d} \geq \dfrac{3b+1+6d+1}{b+d}$; $\quad m \geq \dfrac{3b+6d+2}{b+d}$.

Выделим целую часть: $m \geq 3 + \dfrac{3d+2}{b+d}$.

Поскольку a и d — двузначные, $a \leq 99$ и $c \leq 99$. Значит, $3b + 1 \leq a \leq 99$; $6d + 1 \leq c \leq 99$, отсюда $b \leq \dfrac{98}{3}$; $d \leq \dfrac{98}{6}$.

Так как b и d — целые, получим: $b \le 32$, $d \le 16$.

Вернемся к оценке для m:

$m \ge 3 + \dfrac{3d+2}{b+d} \ge 3 + \dfrac{3d+2}{d+32}$, так как $b \le 32$.

Преобразуем правую часть неравенства, чтобы выделить целую часть:

$3 + \dfrac{3d+2}{d+32} = 3 + \dfrac{3d+96-94}{d+32} = 6 - \dfrac{94}{d+32}$.

Поскольку $d \ge 10$, $d+32 \ge 42$ и $m \ge 6 - \dfrac{94}{d+32} \ge 6 - \dfrac{94}{42}$,

$m \ge \dfrac{79}{21}$. Это оценка.

Равенство $m = \dfrac{79}{21}$ достигается, если $d = 10$, $b = 32$, $a = 97$, $c = 61$.

Наименьшее возможное m равно $\dfrac{79}{21}$.

---

12. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017) Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — натуральные числа, не превосходящие 100. Также известно, что числа a, b и c попарно отличаются друг от друга не менее чем на 2.

а) Может ли такое уравнение иметь корень -7?

б) Может ли такое уравнение иметь корень -53?

в) Какой наименьший целый корень может иметь такое уравнение?

а) Пусть $x = -7$ — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Подставим $x = -7$ в данное уравнение.

$49a - 7b + c = 0$, и это значит, что $c \,\vdots\, 7$, т. е. $c = 7k$. Получается, что $49a - 7b + 7k = 0$, $7a - b + k = 0$.

Возьмем $a = 1$, $b = 9$, $k = 2$, и тогда $c = 14$.

Получим уравнение $x^2 + 9x + 14 = 0$, удовлетворяющее условию задачи. Число $x = -7$ является его корнем.

б) Предположим, что наше уравнение имеет корень $x = -53$.

Подставим его в уравнение: $53^2 \cdot a - 53b + c = 0$. Получим, что число c делится на $x = -53$.

Пусть $c = -53 \cdot n$.

Заметим, что $1 \le c \le 100$, и равенство возможно только если $n = -1$. Тогда $c = 53$.

Получим: $53^2 \cdot a - 53b + 53 = 0$;

$53a - b + 1 = 0$;

$53\text{a} = b - 1$.

Поскольку $b \le 100$, $b - 1 \le 99$, $a \le \dfrac{99}{53}$.

Значит, $a = 1$. Тогда $b - 1 = 53$, $b = 54$, и уравнение имеет вид $x^2 + 54x + 53 = 0$.

Однако в нем b и c отличаются на 1, и условия задачи не выполняются.

Получается, что $x = -53$ не может быть корнем уравнения.

в) Пусть наименьший отрицательный корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен $-p$.

Подставив его в уравнение, получим: $ap^2 - bp + c = 0$, и это значит, что $c \,\vdots\, p$.

Пусть $c = np$. Тогда $ap^2 - bp + np = 0$;

$ap - b + n = 0$.

Поскольку $c \le 100$, $np \le 100$, и если $p \ge 51$, то $n = 1$.

Пусть $p \ge 51$ (при этом корень уравнения $x \le -51$), тогда $c = p$ и $ap = b - 1$.

Аналогично пункту (б), если $p \ge 51$, то $a = 1$, поскольку $b \le 100$ и $b - 1 \le 99$.

Если $p = b - 1$ и $p = c$, то $c = b - 1$, что не соответствует условию задачи.

Значит, уравнение не может иметь целого корня $x \le -51$, то есть возможны только целые корни $x \ge -50$.

Приведем пример, когда $x = -50$.

Подставив $x = -50$ в уравнение, получим: $2500a - 50b + c = 0$. Очевидно, c делится на 50.

Пусть $c = 50m$. Возьмем $m = 2$. Тогда $50a - b + 2 = 0$, $50a = b - 2$.

Выбрав $a = 1$, $b = 52$, получим уравнение $x^2 + 52x + 100 = 0$.

Его корни легко найти по теореме Виета. Они равны -2 и -50.

Глава 9
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТЕСТЫ: ПОЛНЫЕ ВАРИАНТЫ ЕГЭ

Заключительный этап подготовки к ЕГЭ — решение вариантов. Я составила для вас 4 полных варианта для тренировки. Большинство задач 2 части — мои авторские. Для того чтобы этот материал принес вам максимальную пользу, действуйте следующим образом:

— перед решением варианта повторите теорию. Шпаргалками и телефоном на экзамене пользоваться запрещено;

— выделите себе 3 часа 55 минут на решение варианта. Отключите телефон. Пусть вас никто и ничто не отвлекает. Ваша задача — уложиться в это время и решить весь вариант;

— все 4 варианта — по сложности такие же, как и вариант ЕГЭ. Начинайте с первого и не заглядывайте ни в другие варианты, ни в решения;

— задачи 1-й части, а также задачи 13, 15 и 17 решайте одну за другой. На них у вас должно уйти не более двух часов. Пока не закончили задачу — за следующую не беритесь. Это правило;

— если вы решили всю 1-ю часть и задачи 13, 15, и 17 — вы набрали 80 баллов. Теперь перед вами 4 задачи — стереометрия, планиметрия, параметры и нестандартная. Выберите ту, что больше вам нравится. Не нужно хвататься за несколько задач одновременно;

— важный момент: сразу оформляйте решения задач 2-й части. На заключительном этапе тренировки почти не должно быть черновика — сразу чистовик. Иначе на экзамене не успеете записать все;

— считайте без калькулятора. Пусть вычисления будут максимально простые!

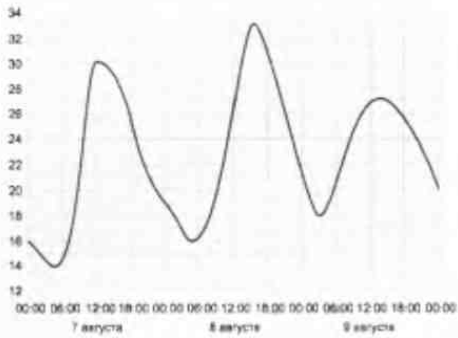
— когда все готово — оцените, удалось ли уложиться в отведенное время. Сверьте ответы и решения.

Удачи вам!

Вариант 1

1. (Авторская задача) Самолет вылетает из Магадана в 15.15 и прилетает в Москву в 15.00 того же дня. Найдите среднюю скорость авиаперелета (в км/ч), если разница во времени между Москвой и Магаданом 8 часов, а длина воздушной трассы — 6200 км.

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указываются дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разницу между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 7 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.



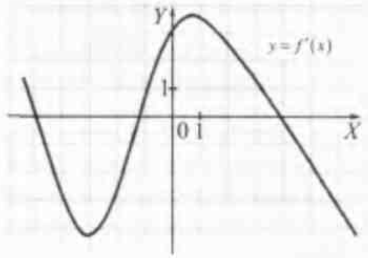
3. (Авторская задача) На координатной плоскости заданы точки $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(-2; 0)$ и $D(2; -2)$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

4. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

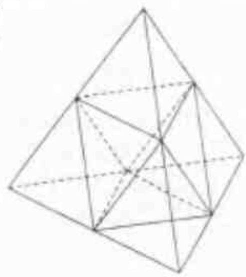
5. Решите уравнение $\sin\frac{\pi(4x-3)}{4}=1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

6. (Авторская задача) Точка M расположена на стороне AB треугольника ABC так, что $AM = 3$, $BM = 7$. Площадь треугольника ACM равна 15. Найдите площадь треугольника BCM.

7. На рисунке изображен график производной функции $y = f\,(x)$. При каком значении x функция $y = f\,(x)$ принимает свое наибольшее значение на отрезке $[-4; -2]$?



8. Площадь поверхности тетраэдра равна 12. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.



9. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\frac{7\sin\alpha+13\cos\alpha}{5\sin\alpha-17\cos\alpha}=3$.

10. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^{\alpha} = \text{const}$, где p (Па) — давление в газе, V — объем газа в кубических метрах, α — положительная константа. При каком наименьшем значении константы α увеличение в 16 раз объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к уменьшению давления не менее чем в 32 раза?

11. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{2-x}$ на отрезке $[1; 7]$.

13. (Авторская задача) $\sqrt{2}\,|\sin x| = \operatorname{tg} x$.

а) Решить уравнение.

б) Найти все его корни на отрезке $[-3\pi; 2\pi]$.

14. (Авторская задача) На продолжении ребра SA правильного тетраэдра $SABC$ отмечена точка P так, что $SA = 2AP$. Точки M и N — середины ребер BC и AC соответственно. Прямая PN пересекает ребро SC в точке Q.

а) Докажите, что плоскость QMN перпендикулярна ребру SC.

б) Найдите объем треугольной пирамиды $SQMN$, если все ребра тетраэдра равны 4.

15. (Авторская задача) Решите неравенство: $\ln\left(x^2 - x - 2\right) \le 1 + \ln\dfrac{x+1}{x-2}$.

16. (Авторская задача) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность; лучи BA и CD пересекаются в точке P, углы BPC и ACD равны 30°. $BC = \sqrt{\dfrac{3}{2}}AB$.

а) Докажите, что BC и AD параллельны.

б) Найдите длину отрезка, соединяющего середины AC и BD, если $R = 2$.

17. (Авторская задача) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 64 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на p% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите p, если известно, что кредит будет полностью погашен за три года, причем в первый и второй год будет выплачено по 16 000 рублей, а в третий год — 80 000 рублей.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$\left|\left|x^2 - 6x + 5\right| - x^2 + 6x - 13\right| < a - a^2 - (x-2)^2 + 2x - 4$ имеет единственное целое решение.

19[1]. На доске написано число $N = 2\ 345\ 623\ 456$.

а) Можно ли, приписав к числу N справа две цифры, получить в результате число, кратное 72?

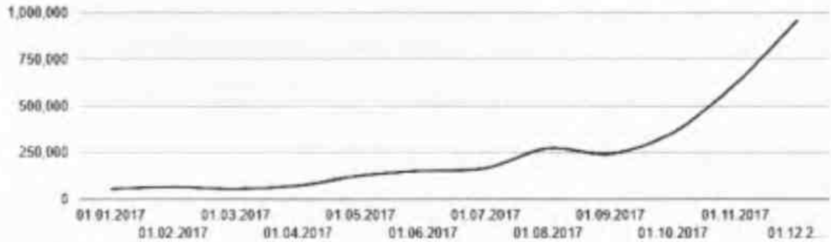
б) Можно ли, приписав к числу N справа три цифры, получить в результате число, кратное 792?

в) Сколькими способами можно вычеркнуть из числа N две цифры так, чтобы полученное число делилось на 12?

Вариант 2

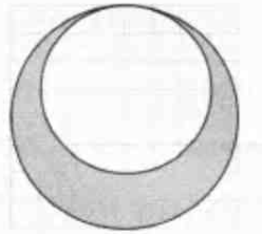
1. Система навигации самолета информирует пассажира о том, что полет проходит на высоте 35 000 футов. Выразите высоту полета в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

2. (Авторская задача) На графике показано изменение курса биткоина к рублю в 2017 году. Запишите порядковый номер месяца, в течение которого цена биткоина впервые превысила 600 тысяч рублей.



[1] Авторская задача Антона Акимова.

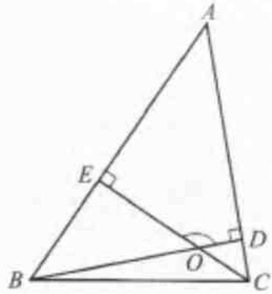
3. На бумаге в клетку изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 9. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



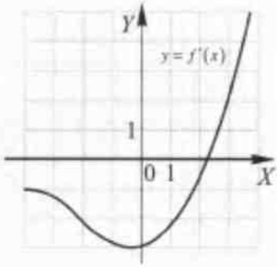
4. (Авторская задача) Два грузовика, работая совместно, вывозят снег с улицы Нижняя Подгорная, причем первый грузовик должен сделать три рейса с грузом снега, а второй — два. Вероятность застрять с грузом снега при подъеме в горку равна 0,2 для первого грузовика и 0,25 — для второго. С какой вероятностью грузовики вывезут снег с улицы Нижняя Подгорная, ни разу не застряв на горке?

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{-72+17x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

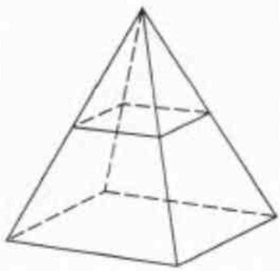
6. В треугольнике ABC угол A равен 46°, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображен график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=2x+5$ или совпадает с ней.



8. В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых ребер.



9. Найдите значение выражения $\dfrac{0,5^{\sqrt{10}-1}}{2^{-\sqrt{10}}}$.

10. Ускорение свободного падения (в м/с^2) на поверхности планеты рассчитывается по формуле $g = G \cdot \dfrac{M_{\text{планеты}}}{(R_{\text{планеты}})^2}$, где G – гравитационная постоянная, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^2/с^2 · кг. Определить ускорение свободного падения на поверхности планеты Плюк, если масса Плюка равна $3{,}68 \cdot 10^{24}$ кг, а его радиус равен $4{,}6 \cdot 10^6$ метров.

11. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 30 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 370 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right]$.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)\log_{13}\left(2\sin^2 x\right)}{\log_{31}\left(\sqrt{2}\cos x\right)} = 0.$

б) Найдите все корни уравнения на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

14. (Авторская задача) В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, боковое ребро равно 2. Плоскость сечения проходит через середины ребер AD и CC_1 параллельно диагонали B_1D.

а) Докажите, что плоскость сечения делит ребро B в отношении 1 : 5, считая от точки B_1.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания параллелепипеда.

15. (Авторская задача) Решите неравенство: $\dfrac{4^x - 3\cdot 10^x - 10\cdot 25^x}{x^3 - 3x^2} \geq 0.$

16. (Авторская задача) Окружности, построенные как на диаметрах на сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$, касаются в точке M.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Пусть P и Q — точки пересечения продолжений диагоналей параллелограмма AC и BD соответственно с общей внешней касательной к окружностям; прямые PQ и AD лежат по одну сторону от прямой O_1O_2.

Найдите площадь треугольника PQC, если радиусы окружностей равны 2, а синус угла BAD равен $\dfrac{4}{5}$.

17. (Авторская задача) В марте 2014 года Андрей открыл вклад в банке. Первого января каждого года банк начисляет некоторый постоянный процент p. Затем в марте Андрей пополняет счет таким образом, чтобы сумма денег на счете возрастала согласно следующей таблице:

Март 2014	Март 2015	Март 2016	Март 2017
S	$2S$	$3S$	$4S$

В марте 2017 года Андрей, как обычно, пополнил вклад, а через месяц снял все деньги со счета. Известно, что всего Андрей дополнительно внес сумму, на 140% превышающую исходный вклад. Найдите p.

18. (Авторская задача) При каких значениях параметра a уравнение $(\sin x - a)(\operatorname{tg} x - a) = 0$ имеет единственное решение на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$?

19. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, $n \geq 3$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

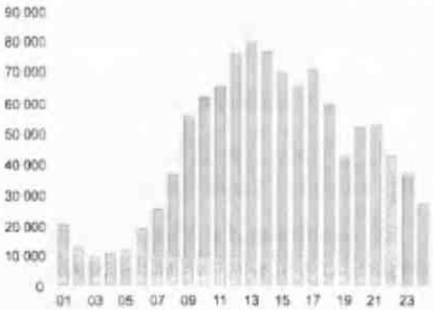
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

Вариант 3

1. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 3%. Книга стоит 300 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, за какой час в данный день на сайте РИА Новости количество посетителей впервые превысило 30 тысяч.

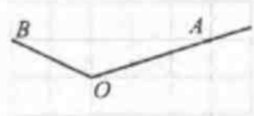


3. На бумаге с размером клетки 1 × 1 изображен вписанный в окружность угол ABC. Найдите его градусную величину.

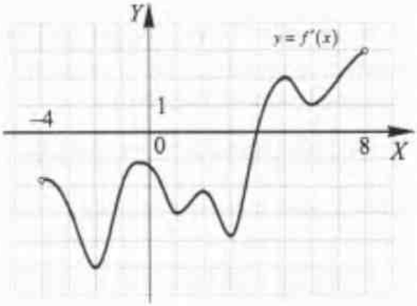
4. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «А = сумма очков равна 4»?

5. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512.$

6. Найдите синус угла AOB. В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



7. На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4;\ 8)$. В какой точке отрезка $[-3;\ 1]$ функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает половины высоты. Объем жидкости равен 54 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt[12]{m}}$ при $m = 4096$.

10. Груз массой 0,4 кг колеблется на пружине. Его скорость υ меняется по закону $\upsilon = \upsilon_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $\upsilon_0 = 1{,}8$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, υ — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 26 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

11. Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 280 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2}.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. (Авторская задача) Все ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равны $\sqrt{3}$. Точка P — середина ребра BC; точки M и K делят ребра AD и BD в отношении $1 : 4$, считая от вершины D.

а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью PMK.

б) В каком отношении плоскость сечения делит высоту тетраэдра?

15. (Авторская задача) Решите неравенство: $\log_{(2-x)}(x+1)^3 - \log_{2-x}^2(x+1) \geq 2$.

16. (Авторская задача) В треугольнике ABC угол B равен $30°$, высоты CM и AK пересекаются в точке H. Из точек M и K в треугольниках AMH и KCH проведены медианы, продолжения которых пересекаются в точке F.

а) Докажите, что угол MFK — прямой.

б) Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника MKF, если $AC = 6$.

17. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

18. (Авторская задача) Найдите все значения параметра c, при которых существуют такие a и b, что система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = 9 \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$

имеет единственное решение $(x; y)$.

19. Три числа назовем *хорошей тройкой*, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовем *отличной тройкой*, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдется ни одной хорошей тройки?

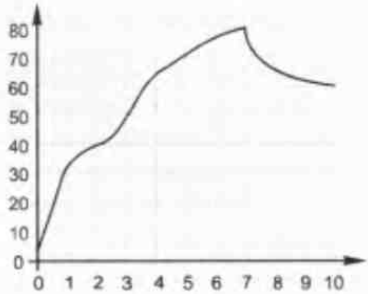
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (не обязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек может оказаться среди них?

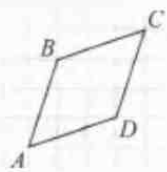
Вариант 4

1. В магазине «Сделай сам» мебель продается в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдется кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продается за 3000 руб.?

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель остывал.



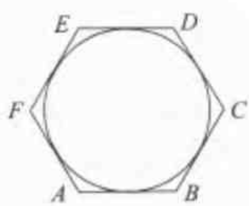
3. На бумаге с размером клетки $\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ изображен четырехугольник $ABCD$. Найдите его периметр.



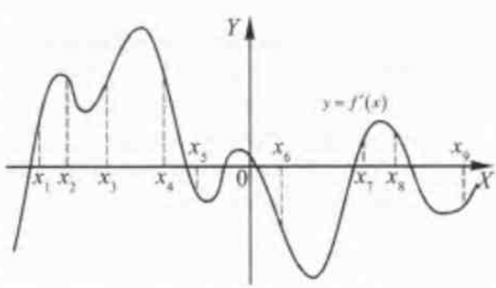
4. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5. Решите уравнение $\frac{2}{15}x^2 = 2\frac{7}{10}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

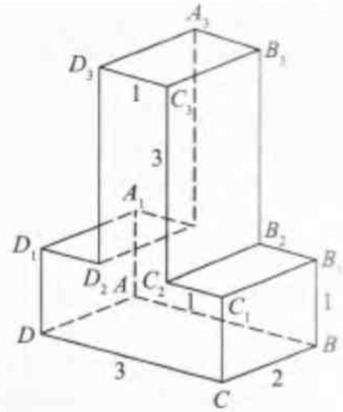
6. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



7. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



8. Найдите тангенс угла $D_1A_1D_2$ многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



9. Найдите $3p(x-4)-p(3x)$, если $p(x)=4x+2$.

10. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t)=-5t^2+18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров?

11. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 1% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

12. Найдите точку минимума функции $y=x^3-4x^2-3x-13$.

13. а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На ребрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM=DN=4$ и $AK=3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

15. (Авторская задача) Решите неравенство: $\dfrac{4^{|x^2-2x-1|}-16}{|x|-5}\le 0$.

16. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM=6MB$ и $2DN=3CN$.

а) Докажите, что $AD=3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

17. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

18. Найдите все значения a, при которых уравнение

$\left(x^2-6|x|-a\right)^2+12\left(x^2-6|x|-a\right)+37=\cos\left(\dfrac{18\pi}{a}\right)$ имеет ровно два решения.

19. Последовательность a_1, a_2, ..., a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k-го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1{,}6$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?

в) Найдите наибольшее возможное значение M_3.

Ответы, комментарии, решения

Вариант 1

1. *Ответ*: 800.

2. *Ответ*: 16.

3. *Ответ*: 90.

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находим по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 0$.

Скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не равны нулю. Значит, угол между ними равен 90°.

Теме «Векторы» посвящена глава моей книги «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ». Эту тему точно стоит повторить перед экзаменом.

4. *Ответ*: 0,06.

Проработав год, чайник может либо сломаться на второй год, либо благополучно служить и после 2 лет работы.

Пусть p — вероятность того, что чайник прослужил больше года, p_1 — вероятность того, что он сломается на второй год, p_2 — вероятность того, что он прослужит больше двух лет. Очевидно, $p = p_1 + p_2$.

Тогда $p_1 = p - p_2 = 0{,}93 - 0{,}87 = 0{,}06$.

Теории вероятностей также посвящена глава моей книги «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ».

5. *Ответ*: –0,75.

Сделайте замену $t = \dfrac{\pi(4x-3)}{4}$, решите простейшее уравнение $\sin t = 1$ и вернитесь к переменной x.

6. *Ответ*: 35.

7. *Ответ*: –4.

8. *Ответ*: 6.

Грань тетраэдра состоит из четырех треугольников площадью S каждый. У тетраэдра 4 грани, значит, площадь его поверхности равна $16S$. Многогранник внутри тетраэдра (октаэдр) имеет 8 граней площадью S каждая, и площадь его поверхности равна $8S$.

9. *Ответ*: 8.

10. *Ответ*: 1,25.

11. *Ответ*: 30.

Я заметила, что новички пугаются этой задачи. «Здесь же улитка! — говорят они. — Здесь прогрессия!»

Да, прогрессия. Пусть улитка проползла в первый день a_1 метров, в последний — a_n метров, причем $a_1 + a_n = 10$. Тогда за n дней она преодолела $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = 150$ метров. Отсюда $n = 30$.

12. *Ответ:* –4.

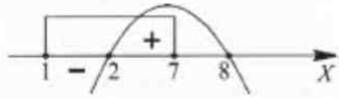
Хотите решить эту задачу за 10 секунд? Вспомните, что число e — иррациональное. Когда функция e^t принимает целое значение? Очевидно, при $t = 0$. Если $t = 2 - x = 0$, то $x = 2$. Именно это значение и надо подставить в формулу функции, чтобы найти ее наименьшее значение. Подставив, получим: $y(2) = -4$.

Это быстрое решение для хитрых. Мы воспользовались тем, что ответы в первой части ЕГЭ по математике — это целые числа или конечные десятичные дроби. А теперь — честное решение!

$$y' = (2x-8)e^{2-x} - e^{2-x}\left(x^2 - 8x + 8\right) = e^{2-x}\left(-x^2 + 10x - 16\right) = -e^{2-x}(x-2)(x-8).$$

Найдем знаки производной на отрезке [1; 7].

$x = 2$ — точка минимума, $y_{\min} = -4$.



13. $\sqrt{2}|\sin x| = \operatorname{tg} x$.

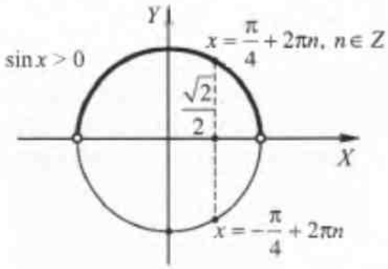
Начнем с области допустимых значений уравнения: $\cos x \neq 0$.

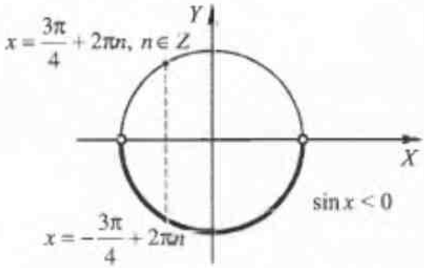
Раскроем модуль по определению. Мы помним, что $|z| = \begin{cases} z, z \geq 0 \\ -z, z < 0 \end{cases}$.

Наше уравнение равносильно совокупности двух систем и уравнения $\sin x = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sqrt{2}\sin x = \operatorname{tg} x \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ -\sqrt{2}\sin x = \operatorname{tg} x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z \\ \begin{cases} \sin x > 0 \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n \end{array}\right.$$

При отборе решений пользуемся тригонометрическим кругом.





Объединив решения, получим ответ в пункте (а): $x = \pi n$, $n \in Z$, или $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

В пункте (б) сделаем отбор решений с помощью двойного неравенства — чтобы не забывать об этом способе.

Для серии $x = \pi n$, $n \in Z$: $-3\pi \leq \pi n \leq 2\pi$;

$-3 \leq n \leq 2$;

$-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ — решения.

Для серии $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z:\ -3\pi \le \frac{\pi}{4} + \pi n \le 2\pi;$

$-3 \le \frac{1}{4} + n \le 2;$

$-3\frac{1}{4} \le n \le 1\frac{3}{4}.$

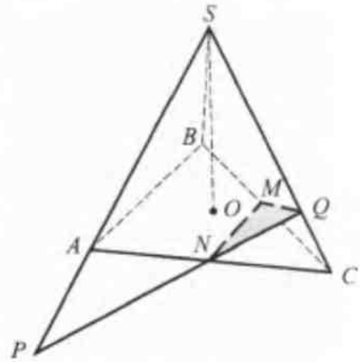
Поскольку n — целое, $n = -3, -2, -1, 0$ или 1.

Решения на указанном отрезке: $-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4};-\frac{3\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}.$

Ответ: а) $\pi n,\ n \in Z$, или $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$

б) $-3\pi;\ -\frac{11\pi}{4};\ -2\pi;\ -\frac{7\pi}{4};\ -\pi;\ -\frac{3\pi}{4};\ 0;\ \frac{\pi}{4};\ \pi;\ \frac{5\pi}{4};\ 2\pi.$

14. а) Покажем, что $(MNQ) \perp SC$.



Правильный тетраэдр — треугольная пирамида, все грани которой представляют собой правильные треугольники. Скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра взаимно перпендикулярны, поэтому $AB \perp SC$. Это легко доказать.

Отрезок CO — проекция ребра SC на плоскость основания.

$CO \perp AB$, так как O — центр правильного треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах, $SC \perp AB$.

Заметим, что $MN \parallel AB$ как средняя линия в треугольнике ABC и, значит, $SC \perp MN$.

Пусть ребро тетраэдра равно a.

Отрезок PQ лежит в плоскости боковой грани SAC.

Треугольник APN — равнобедренный, $AP = AN = \frac{a}{2};$

тогда $\angle APN = \angle ANP = \frac{180° - \angle PAN}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°;$

$\angle NCQ = 60°$, тогда из ΔNCQ получим, что $\angle NQC = 90°$, $PQ \perp SC$.

Таким образом, прямая SC перпендикулярна двум пересекающимся прямым MN и NQ, лежащим в плоскости MNQ. Значит, она перпендикулярна и всей плоскости MNQ.

б) Найдем объем пирамиды $SMNQ$.

Треугольник MNQ — основание пирамиды, SQ — ее высота, поскольку $SQ \perp (MNQ)$.

В прямоугольном треугольнике CNQ угол QNC равен 30°, следовательно,

$QC = \frac{1}{2}NC = \frac{1}{4}AC = 1,\ NQ = \sqrt{3},\ SQ = \frac{3}{4}AC = 3.$

Поскольку треугольники NCQ и MCQ равны, $MQ = NQ = \sqrt{3}$.

В треугольнике NMQ:

$MQ = NQ = \sqrt{3};\ MN = \frac{1}{2}AB = 2;\ S_{\Delta NMQ} = \sqrt{2};\ V_{SMNQ} = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}.$

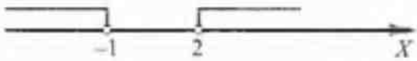
15. $\ln\left(x^2-x-2\right)\le 1+\ln\dfrac{x+1}{x-2}$.

Разложим x^2-x-2 на множители: $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

$\ln(x+1)(x-2)-\ln\dfrac{x+1}{x-2}\le 1$.

Найдем область допустимых значений неравенства.

$$\begin{cases}(x+1)(x-2)>0\\ \dfrac{x+1}{x-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right..$$



Преобразуем левую часть неравенства по формуле разности логарифмов. И не забываем об ОДЗ. Неравенство равносильно системе: $\begin{cases}\ln(x-2)^2-1\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}$

Первое неравенство упростим по методу замены множителя. Множитель $\log_h f-1$ заменяем на $(h-1)(f-h)$. Логарифм здесь натуральный, его основание равно e, $e>1$.

Получим: $\begin{cases}(x-2)^2-e\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2-\left(\sqrt{e}\right)^2\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-2-\sqrt{e}\right)\left(x-2+\sqrt{e}\right)\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$

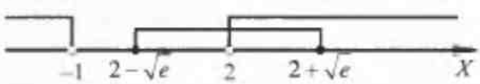
$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\left(2+\sqrt{e}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{e}\right)\right)\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}$

Отметим на числовой прямой точки $2+\sqrt{e}$ и $2-\sqrt{e}$. Очевидно, что $2+\sqrt{e}>2$. Но что больше, $2-\sqrt{e}$ или -1?

Поскольку $e<4$ и $2=\sqrt{4}$, получаем, что $2-\sqrt{e}>0$.

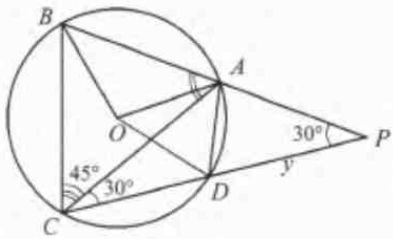
Значит, $2-\sqrt{e}>-1$.

Ответ: $\left(2;2+\sqrt{e}\right]$.



16. а) Пусть O — центр окружности, R — ее радиус. Треугольник ACP — равнобедренный, $\angle ACP=\angle APC=30^\circ$, значит, $\angle CAP=120^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$.

$\angle AOD=60^\circ$, так как центральный угол в два раза больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Тогда треугольник AOD — правильный и $AD=R$.



По теореме синусов, $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$. Следовательно,

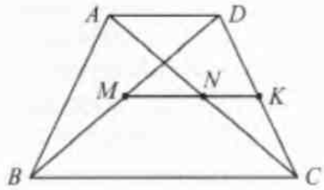
$\dfrac{2BC}{\sqrt{3}}=2R$; $BC=R\sqrt{3}$, тогда $\sqrt{\dfrac{3}{2}}AB=R\sqrt{3}$ и $AB=R\sqrt{2}$. Мы получили, что для треугольника

AOB выполняется теорема Пифагора: $AB^2 = AO^2 + OB^2$. Значит, $\angle AOB = 90°$, $\angle ACB = 45°$ (как вписанный, опирающийся на ту же дугу).

Из треугольника *BPC*, где $\angle P = 30°$, $\angle C = 75°$, получим, что $\angle ABC = 180° - 30° - 75° = 75°$. Значит, *ABCD* — равнобокая трапеция и $AD \parallel BC$.

Пункт (б) — стандартная задача из первой части ЕГЭ по математике. Длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна полуразности оснований. Правда, в первой части ЕГЭ вам не нужно было доказывать этот факт. А сейчас мы его докажем.

Пусть точка *M* — середина диагонали *BD* трапеции *ABCD*. Пусть точка *K* — середина стороны *DC*. Тогда *MK* — средняя линия треугольника *BDC*. Пусть *MK* пересекает диагональ *AC* в точке *N*. Тогда *NK* — средняя линия треугольника *ADC*, поскольку проходит через середину стороны *DC* параллельно *AD*, т. е. *N* — середина *AC*. Таким образом, отрезок *MN* — это разность средних линий треугольников *BDC* и *ADC*, и его длина равна полуразности оснований.



$$MN = \frac{BC - AD}{2} = \frac{R\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}.$$

Если $R = 2$, то $MN = \sqrt{3} - 1$.

17. Пусть *S* — сумма кредита; $S = 64$ тыс. рублей, $X = 16$ тыс. рублей, $Y = 80$ тыс. рублей. $k = 1 + \frac{p}{100}$, где *p* — процент по кредиту. Как всегда, составим уравнение для погашения кредита. Расчеты ведем в тысячах рублей.

$\left(\left(S \cdot k - X\right) \cdot k - X\right) \cdot k - Y = 0;\quad \left(\left(64k - 16\right) \cdot k - 16\right) \cdot k - 80 = 0;$

$64k^3 - 16k^2 - 16k - 80 = 0;\quad 4k^3 - k^2 - k - 5 = 0.$

Мы получили уравнение третьей степени. Сгруппируем слагаемые и применим формулу разности кубов:

$(4k^3 - 4) - (k^2 + k + 1) = 0;$

$4(k - 1)(k^2 + k + 1) - (k^2 + k + 1) = 0;$

$(k^2 + k + 1)(4k - 5) = 0.$

Поскольку $k^2 + k + 1 > 0$ при всех *k*, получим, что $4k - 5 = 0$. Тогда $k = \frac{5}{4}$; $p = 25\%$.

Ответ: 25%.

18. $\left|\left|x^2 - 6x + 5\right| - x^2 + 6x - 13\right| < a - a^2 - (x - 2)^2 + 2x - 4.$

Преобразуем зависящее от *x* выражение $-(x - 2)^2 + 2x - 4$ в правой части неравенства, раскрыв скобки:

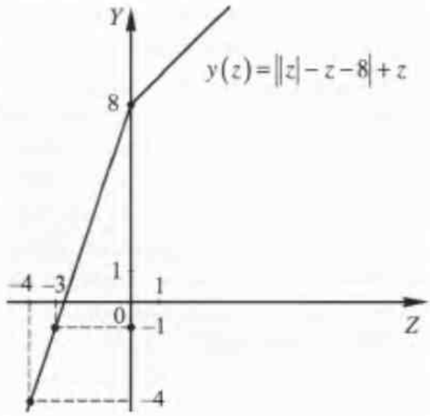
$-(x - 2)^2 + 2x - 4 = -x^2 + 4x - 4 + 2x - 4 = -x^2 + 6x - 8 = -(x^2 - 6x + 8).$

Сделаем замену $z = x^2 - 6x + 5$. Тогда $-x^2 + 6x - 13 = -(x^2 - 6x + 13) = -(z + 8)$.

Неравенство примет вид $\left|\left|z\right| - z - 8\right| + z < a - a^2 - 3$.

Обозначим $a - a^2 - 3 = b$. Стало проще: $\left|\left|z\right| - z - 8\right| + z < b$.

Оценим, какие значения может принимать $z = x^2 - 6x + 5$. Выделим полный квадрат: $z = x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x - 3)^2 - 4 \geq -4$.



Заметим, что если x — целое, то $z(x)$ — тоже целое.

Построим график функции $y=||z|-z-8|+z$ при $z \geq -4$.

$y(z)=z+8$, если $z \geq 0$; $y(z)=3z+8$, если $z<0$.

Функция $y(z)$ монотонно возрастает, то есть каждое свое значение принимает ровно один раз.

Если $b \in (-4; -1]$, неравенство $y(z)<b$ имеет единственное целое решение $z=-4$.

Если $b \leq -4$ — решений нет. Если $b>-1$ — неравенство имеет более одного целого решения z.

Если $z=z_0$ — решение неравенства, то все $z<z_0$ также будут решениями неравенства.

Мы получили, что если $b \in (-4; -1]$, то неравенство $||z|-z-8|+z<b$ имеет единственное целое решение $z=-4$.

Если $z=(x-3)^2-4=-4$, то $x=3$ и, значит, исходное неравенство также имеет единственное целое решение.

Найдем, при каких a это произойдет.

$$\begin{cases} a-a^2-3 \leq -1, \\ a-a^2-3>-4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a+2 \geq 0, \text{ — верно всегда} \\ a^2-a-1<0; \end{cases} \Leftrightarrow a^2-a-1<0;$$

$$a \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

19. а) Число делится на 72 в том и только в том случае, когда оно делится на 9 и на 8 одновременно. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда на 9 делится сумма его цифр, а на 8 тогда и только тогда, когда на 8 делится число, составленное из трех его последних цифр.

Сумма цифр числа N равна 40.

Припишем к числу N справа цифры 3 и 2, получим число 234 562 345 632. Сумма цифр полученного числа равна 45, а число, составленное из трех его последних цифр, — это 632. Таким образом, условия делимости на 72 выполнены.

б) Число делится на 792 тогда и только тогда, когда оно делится на 8, на 9 и на 11.

Вспомним признак делимости на 11: суммы цифр на четных и нечетных позициях числа равны или их разность кратна 11.

Легко проверить, что в числе N суммы цифр на четных и на нечетных позициях равны: $2+4+6+3+5=3+5+2+4+6$.

Значит, само число N делится на 11. Припишем к нему справа три цифры a, b и c.

Необходимо выполнение условий:

1) число, составленное из цифр a, b и c, должно делиться на 8;

2) сумма $a+b+c$ равна 5, 14 или 23 — словом, при делении на 9 должна давать остаток 5;

3) $b=a+c$ (или же разность $a+c-b$ делится на 11).

Подходит число 176.

в) Чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы его сумма цифр была кратна 3, а число, составленное из двух последних цифр, было кратно 4.

Заметим, что вычеркивать последнюю цифру, 6, нельзя: чтобы число осталось четным, нужно будет вычеркнуть и предпоследнюю 5, после чего оставшееся число не будет делиться на 3.

Вычеркивать предпоследнюю цифру, 5, тоже нельзя: чтобы число было кратно 4, нужно будет вычеркивать и третью с конца 4, но тогда результат не будет делиться на 3.

Таким образом, последними цифрами остаются 5 и 6. При этом условие делимости на 4 выполняется.

Осталось условие делимости на 3. Поскольку сумма цифр числа N равна 40, сумма двух вычеркнутых цифр должна быть равна 4, 7 или 10 — то есть при делении на 3 давать остаток 1. Значения, меньшие 4 или большие 10, в условиях задачи невозможны.

Получить 4 можно, вычеркнув две двойки (единственным способом).

Получить 7 — вычеркнув комбинацию «2; 5» или «3; 4». Комбинацию «2; 5» можно вычеркнуть двумя способами, поскольку предпоследнюю пятерку мы не трогаем и вместе с остающейся пятеркой можем взять одну из двух двоек.

Для комбинации «3; 4» возможны 4 способа.

Наконец, пару «4; 6» можно вычеркнуть двумя способами, поскольку мы не трогаем последнюю шестерку.

Всего получается 9 способов.

Вариант 2

1. *Ответ*: 10675.

2. *Ответ*: 11.

3. *Ответ*: 7.

4. *Ответ*: 0,288.

Вероятность для первого грузовика благополучно одолеть горку $1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Для второго $1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Поскольку первый грузовик должен сделать 3 рейса, а второй — два, грузовики ни разу не застрянут на горке с вероятностью $0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}36 \cdot 0{,}8 = 0{,}288$.

5. *Ответ*: 8.

6. *Ответ*: 134.

7. *Ответ*: 3.

8. *Ответ*: 0,25. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

9. *Ответ*: 2.

10. *Ответ*: 11,6.

11. *Ответ*: 55,5. Вспомним, что средняя скорость находится по формуле

$\upsilon_{ср} = \dfrac{S_{общ}}{t_{общ}} = \dfrac{S_1 + S_2}{\dfrac{S_1}{\upsilon_1} + \dfrac{S_2}{\upsilon_2}}$ Примем $S_1 = S_2$ за единицу и найдем $\upsilon_{ср}$.

12. *Ответ*: 5.

13. $\dfrac{\left(\operatorname{tg} x+\sqrt{3}\right)\log_{13}\left(2\sin^2 x\right)}{\log_{31}\left(\sqrt{2}\cos x\right)}=0.$

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ \sqrt{2}\cos x\neq 1.\end{cases}$

Заметим, что решать эту систему не нужно. Мы решим уравнение и проверим найденные корни на соответствие данным условиям.

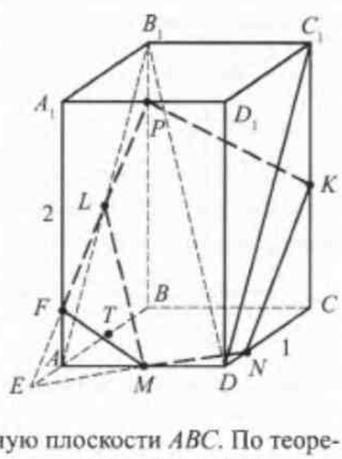
С учетом ОДЗ исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0,\\ \log_{13}\left(2\sin^2 x\right)=0,\end{array}\right.\\ \cos x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-\sqrt{3},\\ 2\sin^2 x=1,\end{array}\right.\\ \cos x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z,\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\end{array}\right.\\ \cos x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

б) С помощью тригонометрического круга (или с помощью двойного неравенства) найдем, что промежутку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ принадлежит корень $x=-\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; б) $-\dfrac{\pi}{3}$.

14. Построим сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и K параллельно диагонали B_1D.



Выберем плоскость, в которой лежат и точка M, и прямая B_1D.

Это плоскость, проходящая через параллельные прямые AD и B_1C_1.

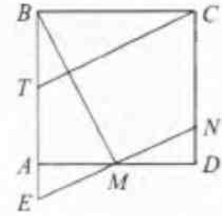
В плоскости ADC_1 проведем $ML \parallel B_1D$.

ML — средняя линия ΔADB_1, тогда L — середина AB_1.

Нам осталось построить сечение, проходящее через точки M, L и K. Плоскость этого сечения параллельна B_1D, поскольку содержит прямую ML, $ML \parallel B_1D$.

Пусть точка T — проекция точки L на плоскость основания ABC. Заметим, что $LT = KC$ и $LK \parallel (ABC)$. Значит, плоскость сечения α проходит через прямую LK, параллельную плоскости ABC. По теореме о прямой и параллельной ей плоскости, линия пересечения плоскостей α и ABC параллельна LK, и тогда эта линия параллельна TC, поскольку $LTCK$ — прямоугольник и $LK \parallel TC$.

Проведем $MN \parallel TC$ в плоскости ABC.



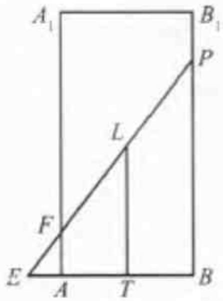
Из подобия треугольников BTC и DNM получим, что $DN = \frac{1}{4}DC$.

Пусть $MN \cap AB = E$; $E \in \alpha$, $E \in (AA_1B_1)$.

Соединив E и L, получим FP — линию пересечения плоскости сечения с гранью (AA_1B_1). Пятиугольник $MFPKN$ — искомое сечение.

Найдем, в каком отношении плоскость сечения делит ребро BB_1.

Поскольку треугольники EAM и NDM равны, $AE = \frac{1}{4}AB$.



$\Delta AEF \sim \Delta BEP \sim \Delta TEL$, $\frac{LT}{ET} = \frac{PB}{BE}$.

$$\frac{BB_1}{2\cdot\left(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB\right)} = \frac{PB}{\left(AB + \frac{1}{4}AB\right)}.$$

Отсюда $PB = \frac{5}{6}BB_1$; $\frac{B_1P}{PB} = \frac{1}{5}$.

б) Найдем угол между плоскостью основания и плоскостью сечения.

Треугольники ABM и DMN подобны, $\angle BMA + \angle NMD = 90°$, тогда $\angle BMN = 90°$, $BM \perp MN$.

Поскольку BM — проекция PM на плоскость основания, по теореме о трех перпендикулярах $PM \perp MN$. Тогда, согласно определению угла между плоскостями α и ABC, этим углом будет угол PMB. Найдем тангенс этого угла.

Из пункта (а): $PB = \frac{5}{6}BB_1 = \frac{5\cdot 2}{6} = \frac{5}{3}$.

Из ΔABM: $BM = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Из ΔPMB, где $\angle B = 90°$: $\operatorname{tg}\angle PMB = \frac{PB}{BM} = \frac{5\cdot 2}{3\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

15. $\frac{4^x - 3\cdot 10^x - 10\cdot 25^x}{x^3 - 3x^2} \geq 0$.

Разложим числитель дроби в левой части на множители.

Выражение $2^{2x} - 3\cdot 2^x\cdot 5^x - 10\cdot 5^{2x}$ — однородное степени $2x$. Вынеся 5^{2x} за скобки,

получим: $2^{2x} - 3\cdot 2^x\cdot 5^x - 10\cdot 5^{2x} = 5^{2x}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x - 10\right) = 5^{2x}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x - 5\right)\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x + 2\right)$.

Как мы разложили $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x - 10$ на множители? Очень просто — сделали замену $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, разложили на множители выражение $t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2)$ и вернулись к переменной x.

Неравенство примет вид: $\frac{5^{2x}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x - 5\right)\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x + 2\right)}{x^2(x-3)} \geq 0$.

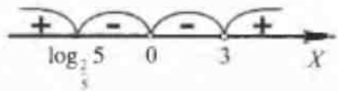
Поделим обе части на $5^{2x}>0$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^x+2>0$.

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x-5}{x^2(x-3)}\geq 0.$$

Представим 5 как $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}}5}$ и применим метод замены множителя. Множитель h^f-h^g заменяется на $(h-1)(f-g)$.

$$\frac{\left(\frac{2}{5}-1\right)\left(x-\log_{\frac{2}{5}}5\right)}{x^2(x-3)}\geq 0;\qquad \frac{x-\log_{\frac{2}{5}}5}{x^2(x-3)}\leq 0.$$

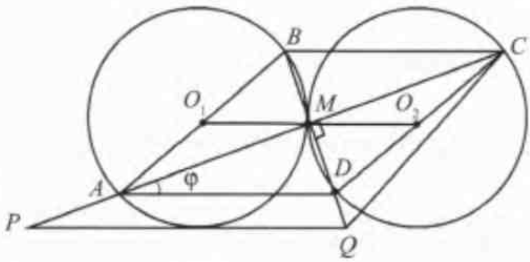
Очевидно, $\log_{\frac{2}{5}}5<0$, так как $5>1$ и функция $y=\log_{\frac{2}{5}}x$ — монотонно убывающая. Решим неравенство методом интервалов.



Ответ: $x\in\left[\log_{\frac{2}{5}}5;0\right)\cup(0;3)$.

16. а) Пусть R — радиус окружности. Точка внешнего касания окружностей лежит на отрезке, соединяющем их центры; $O_1O_2=O_1M+O_2M=2R$.

Поскольку AB и CD — диаметры окружностей, $AB=CD=2R$; O_1 и O_2 — середины сторон параллелограмма $ABCD$; AO_1O_2D — параллелограмм, $AD=O_1O_2=2R$, $ABCD$ — ромб.



б) Найдем $S_{\Delta PQC}$, если $R=2$, $\sin\angle BAD=\frac{4}{5}$.

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов. Пусть $\angle BAD=2\varphi$.
Тогда $\angle CAD=\angle BAC=\varphi$.

$\sin 2\varphi=\frac{4}{5}$; $\cos 2\varphi=\frac{3}{5}$.

По формулам косинуса двойного угла: $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=1-2\sin^2\varphi$ найдем $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Из ΔAMD, в котором $\angle M=90°$, найдем $DM=AD\cdot\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{5}}$; $AM=AD\cdot\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{5}}$; $\Delta ADM\sim\Delta PQM$.

Высота треугольника PQM, проведенная из точки M, равна R, а высоту треугольника ADM легко найти из формулы его площади:

$$S_{\Delta ADM} = \frac{1}{2}h_{\Delta ADM} \cdot AD = \frac{1}{2}AM \cdot DM;\ h_{\Delta ADM} = \frac{AD \cdot DM}{AD} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 4} = \frac{8}{5};$$

$$\frac{h_{\Delta ADM}}{h_{\Delta PQM}} = \frac{AD}{PQ};\ \frac{8}{5 \cdot 2} = \frac{4}{PQ};\ PQ = 5.$$

Высота треугольника PQC равна сумме высот треугольников PQM и BMC, т. е. $2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5}$.

$$S_{\Delta PQS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5} \cdot 5 = 9.$$

17. Пусть S — первоначальная сумма вклада; p — процент банка по вкладу; $k = 1 + \frac{p}{100}$.

Покажем, как меняется сумма на счете Андрея.

Год	2014		2015		2016		2017
Март	S		$2S$		$3S$		$4S \to 0$
Январь		kS		$2kS$		$3kS$	

По условию, Андрей трижды вносил на счет дополнительные суммы денег.

1-е пополнение: $S_1 = 2S - kS$.

2-е пополнение: $S_2 = 3S - 2kS$.

3-е пополнение: $S_3 = 4S - 3kS$.

Всего Андрей внес дополнительно: $S_1 + S_2 + S_3 = 2{,}4S$;

$9S - 6kS = 2{,}4S$; $3 - 2k = 0{,}8$; $k = 1{,}1$; $1 + \frac{p}{100} = 1{,}1$.

Отсюда $p = 10\%$.

18. $(\sin x - a)(\operatorname{tg} x - a) = 0$.

Область допустимых значений уравнения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in z$. Для нашего интервала $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Получаем: $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = a \\ \operatorname{tg} x = a \end{array}\right. \end{cases}$

Эта система должна иметь единственное решение $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

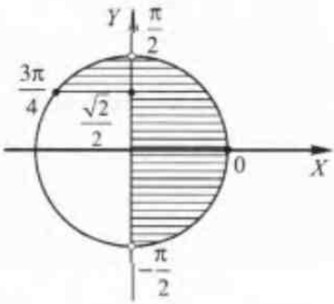
1. Если $a = 1$, то уравнение $\sin x = 1$ имеет на заданном интервале решение $x = \frac{\pi}{2}$, которое не входит в область допустимых значений. При $a = 1$ второе уравнение $\operatorname{tg} x = 1$ имеет на нашем интервале единственное решение $x = \frac{\pi}{4}$. Значит, $a = 1$ подходит по условию задачи.

2. Если $a = -1$, получим: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

На нашем интервале находится единственное значение $x = -\dfrac{\pi}{4}$, принадлежащее этой серии решений.

Значит, и $a = -1$ тоже подходит.

3. Найдем количество решений уравнения $\sin x = a$ для различных a, не равных 1 и –1, при условии $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$.



Если $a \in \left(-1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, уравнение $\sin x = a$ имеет единственный корень $x_1 = \arcsin a$ на данном интервале.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ также имеет на данном интервале единственный корень $x_2 = \operatorname{arctg} a$, и при $a \in \left(-1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ получаем, что $x_2 \in \left(-\dfrac{\pi}{4};\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Единственное решение исходного уравнения будет в случае совпадения x_1 и x_2, т. е. при $a = 0$.

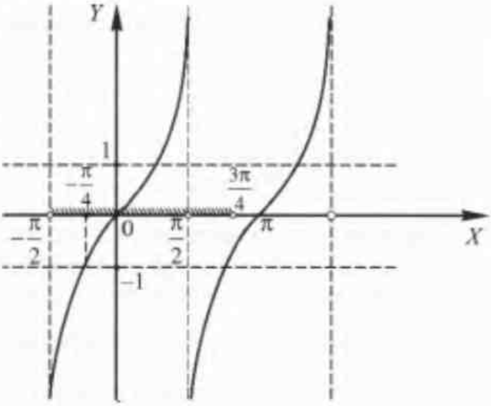
4. Если $a \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, уравнение $\sin x = a$ имеет на нашем интервале два корня. Этот случай нам не подходит.

5. Если $a > 1$, уравнение $\sin x = a$ не имеет корней, а уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет на данном интервале единственный корень $x = \operatorname{arctg} a$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. Если $a < -1$, уравнение $\sin x = a$ также не имеет решений, но уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет на данном интервале два корня: $x_1 = \operatorname{arctg} a$, $x_2 = \operatorname{arctg} a + \pi$. Значит, $a < -1$ не подходит.

Объединив случаи, получим ответ.

Ответ: $a \in \{-1; 0\} \cup [1; +\infty)$.



19. а) Да, может. Пример подобрать легко: числа 1, 2, 3 и 4 образуют арифметическую прогрессию, их сумма равна 10.

б) Найдем наибольшее значение n, если сумма этих чисел меньше 1000.

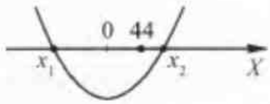
Пусть сумма чисел равна S, $S \le 999$.

С другой стороны, $S \ge S_n$, где S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 1$ и $d = 1$.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2+n-1}{2} \cdot n;$$

$$\frac{2+n-1}{2} \cdot n \le S \le 999; \quad n^2 + n - 1998 \le 0; \quad D = 1 + 4 \cdot 1998 = 7993.$$

Оценим дискриминант: $7991 < D < 8100; \quad 89 < \sqrt{D} < 90$



Рассмотрим неравенство $x^2 + x - 1998 \le 0$. Нам нужно его наибольшее натуральное решение. Корни уравнения $x^2 + x - 1998 = 0$:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{7993}}{2} < 0; \; x_2 = \frac{-1+\sqrt{7993}}{2} > \frac{-1+89}{2}; \; x_2 > 44.$$

Наибольшее натуральное n, удовлетворяющее неравенств $x^2 + x - 1998 \le 0$, — это 44. Значит, $n \le 44$. Это оценка.

Приведем пример для $n = 44$.

Взяв числа 1, 2, 3… 44, получим, что их сумма равна $\frac{1+44}{2} \cdot 44 = 990 < 1000$.

Значит, $n_{max} = 44$.

в) Найдем все значения n, для которых $S_n = 129$.

Пусть первое из этих чисел равно a_1, разность арифметической прогрессии равна d.

Тогда сумма n чисел $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 129$; $\left(2a_1 + d(n-1)\right) \cdot n = 258 = 2 \cdot 3 \cdot 43$.

Это значит, что $258 \vdots n$, и тогда $n = 2$, $n = 3$, $n = 6$ или $n = 43$. Случай $S > 44$ невозможен — смотри пункт (б).

Случай $n = 2$ также невозможен — по условию задачи.

Если $n = 3$, условию удовлетворяют числа 42, 43 и 44.

Если $n = 6$, нам подойдут числа 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Если $n = 43$, то $S \ge S_{43}$, где S_{43} — сумма первых 43 членов натурального ряда;

$$S_{43} = \frac{1+43}{2} \cdot 43 = 946 > 129.$$

Поэтому случай $n = 43$ невозможен.

Ответ: 3 или 6.

Вариант 3

1. *Ответ*: 291.

2. *Ответ*: 8.

3. *Ответ*: 45. Достройте на чертеже прямоугольный равнобедренный треугольник.

4. *Ответ*: 3.

5. *Ответ*: 0.

6. *Ответ*: 2. Достройте на чертеже прямоугольный равнобедренный треугольник.

7. *Ответ*: 1.

8. *Ответ*: 378.
Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

9. *Ответ*: 4

10. *Ответ*: 0,648

11. *Ответ*: 10

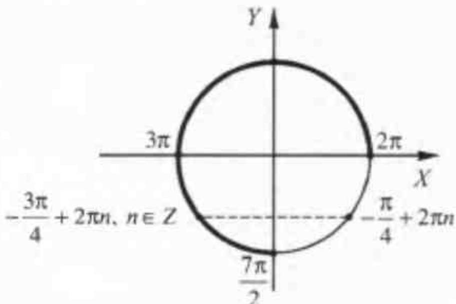
12. *Ответ*: 4.
Вычисляя производную, представьте $\ln(9x)$ как $\ln 9 + \ln x$.

13. $\dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2}.$

а) $$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sin x \cos x}{-\cos x} = \sqrt{2} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на отрезке $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрического круга.

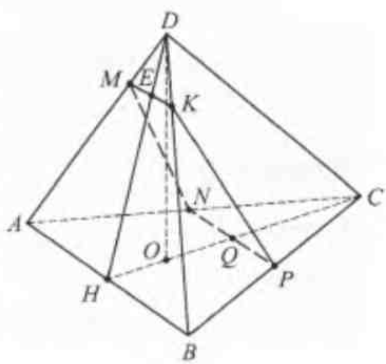
Видим, что указанному отрезку принадлежит только $x = 2\pi + \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{13\pi}{4}$.

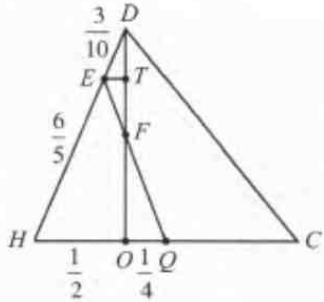


14. а) Построим сечение тетраэдра плоскостью PMK. В плоскости ABC проведем $PN \parallel AB$, N — середина AC. Покажем, что трапеция $MKPN$ — искомое сечение.

$\Delta MDK \sim \Delta ADB$ (по углу и двум сторонам), значит, $MK \parallel AB$, $MK \parallel (ABC)$.

Плоскость сечения проходит через прямую MK, параллельную плоскости ABC. Следовательно, линия пересечения плоскости ABC и плоскости сечения параллельна прямой MK. Мы применили теорему о прямой и параллельной ей плоскости.





б) Найдем, в каком отношении плоскость сечения делит высоту DO пирамиды.

Пусть H — середина AB, E — середина MK, Q — середина NP. Высота пирамиды DO и отрезок EQ лежат в плоскости DHC. Значит, точка пересечения DO и плоскости сечения также лежит в плоскости DHC.

CH — высота правильного треугольника ABC; $CH = \dfrac{AB\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$; $CH = DH$, поскольку $\Delta ABC = \Delta ABD$; Q — середина HC; $DE : EH = DM : MA = 1 : 4$. Тогда $DE = \dfrac{3}{10}$; $EH = \dfrac{12}{10}$. $EQ \cap DO = F$.

$$QC = \frac{HC}{2} = \frac{3}{4};\ HO = \frac{1}{3}HC = \frac{1}{2};\ OC = 1;\ OQ = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Проведем $ET \parallel HC$. $\Delta QOF \sim \Delta ETF$; $\dfrac{ET}{OQ} = \dfrac{TF}{OF}$.

С другой стороны, $\Delta ETD \sim \Delta HOD$; $\dfrac{ET}{OH} = \dfrac{DT}{OD} = \dfrac{DE}{DH} = \dfrac{1}{5}$. Тогда $DT = \dfrac{1}{5}OT$; $OT = \dfrac{4}{5}OD$;

$DE = \dfrac{1}{5}DN$; $ET = \dfrac{1}{5}HO = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}$.

$\dfrac{TF}{OF} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$. Значит, точка F делит отрезок TO в отношении $2 : 5$,

т. е. $OF = \dfrac{5}{7}OT = \dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{4}{5}OD = \dfrac{4}{7}OD$ и $DF = \dfrac{3}{7}OD$.

Точка F делит отрезок OD в отношении $3 : 4$, считая от вершины D.

15. $\log_{(2-x)}(x+1)^3 - \log^2_{(2-x)}(x+1) \geq 2$.

ОДЗ неравенства: $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2-x\neq 1 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\neq 1 \\ x>-1 \end{cases}$; $x\in(-1;1)\cup(1;2)$.

Сделаем замену переменной: $\log_{(2-x)}(x+1) = t$, тогда $\log_{(2-x)}(x+1)^3 = 3\log_{(2-x)}(x+1) = 3t$;
$3t - t^2 - 2 \geq 0$; $t^2 - 3t + 2 \leq 0$;
$(t-1)(t-2) \leq 0$; $1 \leq t \leq 2$.

Мы получили: $\begin{cases} \log_{(2-x)}(x+1) \leq 2 \\ \log_{(2-x)}(x+1) \geq 1 \end{cases}$. (1)

Можно, как мы уже привыкли, применить метод замены множителя. А можно обойтись и без него. Ведь область определения неравенства состоит из двух интервалов. Причем если $x \in (-1; 1)$, то $2 - x > 1$, а если $x \in (1; 2)$, то $2 - x < 1$.

Рассмотрим систему (1) на первом интервале.

1) $x \in (-1; 1)$, тогда $2 - x > 1$. Получим: $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ \log_{(2-x)}(x+1) \le \log_{(2-x)}(2-x)^2 \\ \log_{(2-x)}(x+1) \ge \log_{(2-x)}(2-x) \end{cases}$.

Поскольку при $-1 < x < 1$ основания логарифмов больше единицы — просто убираем логарифмы!

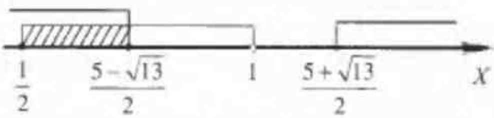
$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x+1 \le (2-x)^2 \\ x+1 \ge 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 - 5x + 3 \ge 0 \\ x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x < 1 \\ \left(x - \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right) \ge 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Очевидно, $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} > 1$. Сравним $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ и 1, а также $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$, чтобы правильно расставить нужны точки на координатной прямой.

$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \vee 1$	$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \vee \dfrac{1}{2}$
$5-\sqrt{13} \vee 2$	$5-\sqrt{13} \vee 1$
$3 \vee \sqrt{13}$	$4 \vee \sqrt{13}$
$3 < \sqrt{13}$, значит, $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} < 1$	$4 > \sqrt{13}$, значит, $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} > \dfrac{1}{2}$

Решим систему (2) методом интервалов.

Получим: $x \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]$.



2) Пусть теперь $1 < x < 2$. При этом основание логарифмов $0 < 2 - x < 1$, и когда мы «отбрасываем» логарифмы — знаки неравенств, входящих в систему (1), меняются.

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x+1 \ge (2-x)^2 \\ x+1 \le 2-x \end{cases}. \qquad (3)$$

Из третьего неравенства следует, что $x \le \dfrac{1}{2}$.

Первое неравенство при этом выполняться не может, и система (3) не имеет решений.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]$.

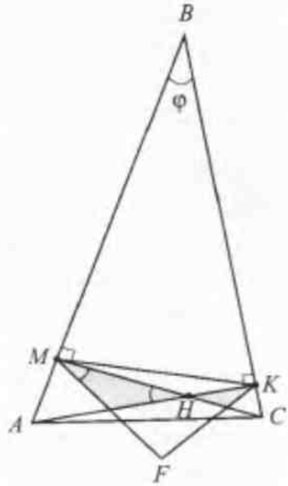
16. а) Пусть $\angle B = \varphi = 30°$.

Рассмотрим ΔABK.

В нем $\angle K = 90°$, $\angle BAK = 90° - \varphi = 60°$.

Тогда в ΔAMH: $\angle M = 90°$, $\angle MHA = \varphi = 30°$.

В четырехугольнике $BMHK$ углы K и M — прямые;
$\angle MHK = 180° - \varphi = 150°$,



Углы FMC и FKA также равны φ, поскольку медиана прямоугольного треугольника делит его на два равнобедренных треугольника, а треугольники AMH и KCH — прямоугольные.

Рассмотрим треугольник MFK.

$\angle FMK + \angle FKM = 2\varphi + \angle HMK + \angle HKM = 2\varphi + (180° - \angle MHK) =$
$= 2\varphi + (180° - (180° - \varphi) = 3\varphi = 90°$.

Мы доказали, что $\angle MFK = 90°$.

б) Найдем радиус окружности, описанной вокруг треугольника MFK. Поскольку $\angle MFK = 90°$, $R = \dfrac{MK}{2}$.

Треугольники KBM и ABC подобны, причем коэффициент подобия $k = \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (Смотри «Полезные схемы для решения задач по геометрии».)

Тогда $MK = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = 3\sqrt{3}, R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

17. Нарисуем схему погашения кредита.

Год	2017		2018		2019		2020
Июль	S		$0{,}7S$		$0{,}4S$		0
Январь		$1{,}15S$		$1{,}15 \cdot 0{,}7S$		$1{,}15 \cdot 0{,}4S$	

По условию, каждая из выплат — целое число тысяч рублей.

Первая выплата: $1{,}15S - 0{,}7S = 0{,}45S = \dfrac{9}{20}S$.

Вторая выплата: $1{,}15 \cdot 0{,}7S - 0{,}4S = 0{,}405S = \dfrac{81}{200}S$.

Третья выплата: $1{,}15 \cdot 0{,}4S = 0{,}46S = \dfrac{23}{50}S$.

По условию, $\dfrac{9}{20}S$, $\dfrac{81}{200}S$ и $\dfrac{23}{50}S$ — целые числа. Это значит, что $S \,\vdots\, 20$; $S \,\vdots\, 200$ и $S \,\vdots\, 50$, т. е. $S \,\vdots\, 200$.

Наименьшее возможное S равно 200 (тысяч рублей).

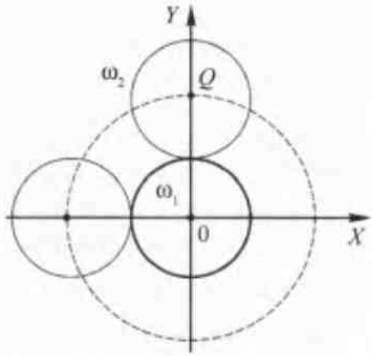
18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = 9, \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$

Кажется, что систему решить невозможно — в ней три параметра и еще две переменных. Но мы и не будем решать ее аналитически. Мы нарисуем графики первого и второго уравнений.

Первое уравнение задает окружность ω_1 с центром в начале координат и радиусом 3.

Второе уравнение — окружность ω_2 с центром в точке $Q(a; b)$ и радиусом 3.

В третьем уравнении нет переменных x и y. В нем просто дана зависимость c от a и b.



Чтобы исходная система имела единственное решение, окружность ω_2 должна касаться окружности ω_1. Тогда у них только одна общая точка.

На рисунке показаны два случая расположения окружности ω_2, которая касается окружности ω_1.

Поскольку в случае внешнего касания расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, расстояние от начала координат до точки Q — центра окружности ω_2 — равно 6. Значит, центр окружности ω_2 лежит на окружности радиуса 6 с центром в начале координат.

Поскольку точка Q имеет координаты $(a; b)$, выполняется условие: $a^2 + b^2 = 36$.

Мы получили, что $c = 6$ или $c = -6$.

Ответ: 6; –6.

19. а) Вспомним неравенство треугольника: в любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны.

Возьмем числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (это числа Фибоначчи; каждое, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих). Никакие три из них не могут являться сторонами треугольника.

Возможны и другие примеры.

б) Рассмотрим числа $a < b < c < d$. Ясно, что ни a, ни b не могут быть длиной гипотенузы прямоугольного треугольника. Какие же прямоугольные треугольники с длинами сторон a, b, c и d можно составить? Запишем возможные тройки чисел:

$(a; b; c)$ (1),
$(a; b; d)$ (2),
$(a; c; d)$ (3),
$(b; c; d)$ (4).

Треугольник (2) равен треугольнику (1) по двум катетам. Тогда $c = d$, и это противоречит условию, поскольку все 4 числа — различны.

Треугольники (3) и (4) равны по катету и гипотенузе. То же можно сказать и о треугольниках (2) и (3), и о треугольниках (2) и (4). Снова противоречие с условием. Получается, что среди 4 различных чисел $a < b < c < d$ найдется не более двух *отличных* троек, соответствующих треугольникам с гипотенузами c и d.

в) Согласно пункту (б), из 4 различных отрезков с длинами $a < b < c < d$ можно составить не более одного прямоугольного треугольника с гипотенузой c и не более одного — с гипотенузой d. Из 5 отрезков, длины которых $a < b < c < d < e$, можно составить не более одного прямоугольного треугольника с гипотенузой c, не более одного — с гипотенузой d и не более двух — с гипотенузой e.

Две пары чисел (a, b) и (c, d) назовем *непересекающимися*, если все числа a, b, c, d различны. Заметим, что если у двух неравных прямоугольных треугольников равны гипотенузы, то пары их катетов — непересекающиеся.

Сколько треугольников с гипотенузой x_n можно составить, имея n различных отрезков? Не больше, чем количество непересекающихся пар, на которые можно разбить числа $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$.

Для $n = 3$ — не более одного треугольника с гипотенузой x_3.

Для $n = 4$ — не более одного с гипотенузой x_4.

Для $n = 5$ — не более двух с гипотенузой x_5… Запишем и для других $n \le 12$ максимальное количество треугольников с гипотенузой x_n, которые можно составить из отрезков с длинами $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$.

$n = 6$	2,
$n = 7$	3,
$n = 8$	3,
$n = 9$	4,
$n = 10$	4,
$n = 11$	5,
$n = 12$	5.

Следовательно, количество различных прямоугольных треугольников с длинами сторон, равными $x_1, x_2, ... x_{12}$, не больше чем $2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 30$. Это оценка.

Приведем пример. Возьмем числа $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{12}$. Из них можно составить 30 *отличных* троек:

$$\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right); \left(1, \sqrt{3}, \sqrt{4}\right); \left(1, \sqrt{4}, \sqrt{5}\right); \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\right); \left(1, \sqrt{5}, \sqrt{6}\right); ... \left(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{12}\right).$$

Вариант 4

1. *Ответ*: 3300.

2. *Ответ*: 3.

3. *Ответ*: 40.

4. *Ответ*: 0,6.

5. *Ответ*: 4,5.

6. *Ответ*: 2.

7. *Ответ*: 3 (это x_5, x_6 и x_9).

8. *Ответ*: 0,5.

9. *Ответ*: –44.

По условию, $p(x)$ — такая функция, что $p(x) = 4x + 2$. Например, $p(1) = 4 \cdot 1 + 2$; $p(9) = 4 \cdot 9 + 2$.

Тогда $p(3x) = 4 \cdot 3x + 2$ и $p(x - 4) = 4 \cdot (x - 4) + 2$. Осталось получить ответ.

10. *Ответ*: 2,4.

11. *Ответ*: 10.

12. *Ответ*: 3.

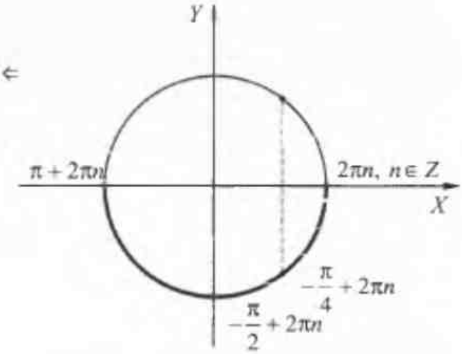
13. $\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0$

а) ОДЗ уравнения: $\sin x \le 0$.

Уравнение равносильно системе:

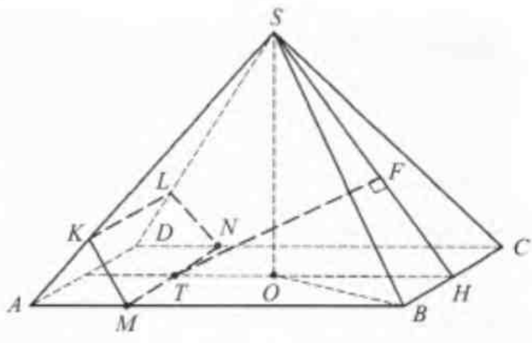
$$\begin{cases}\sin x \le 0,\\ \left[\begin{aligned}&\sin x = 0,\\ &\sqrt{2}\left(\sin^2 x-1\right)+\cos x=0;\end{aligned}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \le 0,\\ \left[\begin{aligned}&\sin x = 0,\\ &\cos x = 0,\\ &\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2};\end{aligned}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \le 0,\\ \left[\begin{aligned}&x=\pi n,\ n\in Z,\\ &x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ &x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;\end{aligned}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\pi n,\ n\in Z,\\ &x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ &x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n.\end{aligned}\right.$$



б) С помощью тригонометрического круга найдем, что отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\pi; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; 0$.

14. Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.



а) Покажем, что $(KMN) \parallel (SBC)$.

$AM \parallel DN$; $AM = DN$, $\angle DAM = 90°$, значит, $AMND$ — прямоугольник и $MN \parallel BC$.

Найдем длину ребра SB.

BD — диагональ квадрата $ABCD$; $BD = 16\sqrt{2}$; тогда $OB = 8\sqrt{2}$.

В треугольнике OSB: $\angle O = 90°$; $OB = 8\sqrt{2}$; $SO = 4$; $SB = \sqrt{128+16} = 12 = SA$.

$\frac{AK}{AS}=\frac{AM}{AB}=4$, значит, $\Delta AKM \sim \Delta ASB$ (угол A в них — общий) и $KM \parallel SB$. Тогда, по признаку параллельности плоскостей, $(KMN) \parallel (SBC)$.

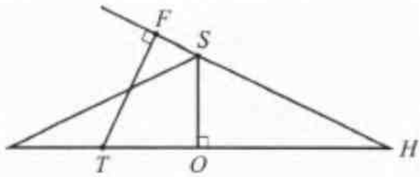
б) Расстояние от точки M до плоскости SBC — это расстояние между двумя параллельными плоскостями. Оно равно расстоянию от любой точки плоскости KMN до плоскости SBC.

Пусть H — середина BC, T — середина MN. Плоскость STH содержит высоту пирамиды SO и отрезок TH, перпендикулярные прямой BC. Значит, $(STH) \perp BC$.

Проведем в плоскости (STH) отрезок TF; $TF \perp SH$. Кроме того, $TF \perp BC$, так как $TF \in (STH)$, $(STH) \perp BC$.

Значит, TF — искомое расстояние от плоскости KMN до плоскости SBC.

Найдем это расстояние из плоского чертежа.



$\Delta TFH \sim \Delta SOH$; $\dfrac{TF}{SO}=\dfrac{TH}{SH}$; $TF=\dfrac{SO\cdot TH}{SH}$;

$SH=\sqrt{12^2-8^2}=4\sqrt{5}$; $TF=\dfrac{4\cdot 12}{4\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

15. $\dfrac{4^{|x^2-2x-1|}-16}{|x|-5}\le 0.$

В числителе левой части неравенства — разность двух степеней с основанием 4.

$\dfrac{4^{|x^2-2x-1|}-4^2}{|x|-5}\le 0.$

Согласно методу замены множителя, h^f-h^g заменяем на $(h-1)(f-g)$.

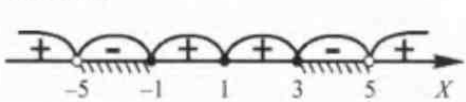
Неравенство примет вид $\dfrac{|x^2-2x-1|-2}{|x|-5}\le 0.$

Еще раз применим метод замены множителя.

Множитель $|f|-|g|$ заменим на f^2-g^2, т. е. на $(f-g)(f+g)$. Очевидно, что $|2|=2$, $|5|=5$.

$\dfrac{(x^2-2x-1-2)(x^2-2x-1+2)}{(x-5)(x+5)}\le 0$; $\dfrac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{(x-5)(x+5)}\le 0$;

$\dfrac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{(x-5)(x+5)}\le 0.$

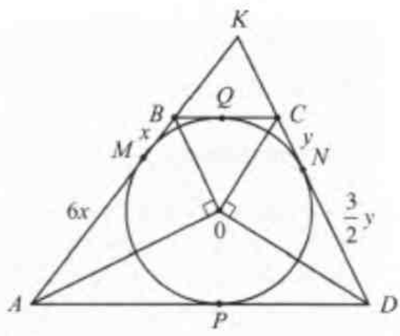


Ответ: $x\in(-5;-1]\cup\{1\}\cup[3;5)$.

16. а) Докажем, что $AD=3BC$.

Пусть O — центр окружности, $BM=x$, $CN=y$.

Тогда $AM=6x$, $DN=\dfrac{3}{2}y$.



P и Q — точки касания окружности со сторонами AD и BC.

Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, $AP=AM=6x$; $DP=DN=\dfrac{3}{2}y$;

$AD=AP+DP=6x+\dfrac{3}{2}y=3\left(2x+\dfrac{1}{2}y\right)$, $BC=BQ+QC=x+y$;

AO — биссектриса угла BAD, BO — биссектриса угла ABC,

$\angle BAD+\angle ABC=180^\circ \Rightarrow \angle BAD+\angle ABO=90^\circ$,

Треугольники ABO и CDO — прямоугольные; $\angle AOB=\angle COD=90^\circ$.

$OM^2=r^2=AM\cdot BM=ON^2=CN\cdot DN$, по свойству высоты, проведенной к гипотенузе;

$6x^2=\dfrac{3}{2}y^2 \Rightarrow 4x^2=y^2$; $x=\dfrac{y}{2}$.

Тогда $AD = 3\left(2x + \dfrac{y}{2}\right) = 9x$, $BC = 3x$, $AD = 3BC$.

б) Найдем MN, если $r = \sqrt{105}$.

Поскольку $r^2 = AM \cdot BM = 6x^2$, $x = BM = \sqrt{\dfrac{35}{2}} = \dfrac{\sqrt{70}}{2}$; $y = CN = \sqrt{70}$.

Пусть $(AB) \cap (CD) = K$.

$\Delta BKC \sim \Delta AKD$; $\dfrac{BK}{AK} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{3}$; отсюда $BK = \dfrac{1}{3}AK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{7}{2}x$, $CK = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{5}{2}x$.

В треугольнике MKN: $MK = x + \dfrac{7}{2}x = \dfrac{9}{2}x$, $NK = \dfrac{5}{2}x + 2x = \dfrac{9}{2}x$.

Следовательно, ΔMKN — равнобедренный.

Треугольники MKN и BKC имеют общий угол K. Запишем для них теорему косинусов:

ΔBKC: $BC^2 = BK^2 + KC^2 - 2BK \cdot KC \cdot \cos\angle K \Rightarrow \cos\angle K = \dfrac{19}{35}$.

ΔMKN: $MN^2 = 2MK^2 - 2MK^2 \cdot \cos\angle K \Rightarrow MN = 18$.

17. Чтобы прибыль за три года была не меньше 78 млн рублей, необходимо, чтобы каждый год прибыль была не меньше 26 млн рублей — то есть наибольшая возможная. Это значит, что должно выполняться неравенство $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) \geq 26$.

Нужно найти наименьшее значение p, при котором это неравенство выполняется.

Выразим p через x: $p \geq \dfrac{\frac{x^2}{2} + 2x + 32}{x}$.

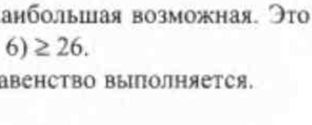
Рассмотрим p как функцию от x: $p(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2} + 2x + 32}{x} = \dfrac{x}{2} + 2 + \dfrac{32}{x}$.

Найдем наименьшее значение этой функции при положительных значениях x.

Для этого возьмем производную: $p'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{32}{x^2}$.

Приравняем производную к нулю: $p'(x) = 0$; $x^2 - 64 = 0$.

Найдем знаки производной для положительных x.



При $x = 8$ производная функции $p(x)$ равна нулю и меняет знак с «–» на «+». Значит, $x = 8$ — точка минимума (причем единственная) функции $p(x)$, и наименьшее значение $p(x)$ достигается именно в этой точке.

Подставив $x = 8$ в выражение $p(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2} + 2x + 32}{x}$, получим, что $p(8) = 10$.

Ответ: $p_{\min} = 10$.

18. $\left(x^2-6|x|-a\right)^2+12\left(x^2-6|x|-a\right)+37=\cos\left(\dfrac{18\pi}{a}\right)$.

Обозначим $t=x^2-6|x|-a$. Уравнение примет вид

$$t^2+12t+37=\cos\left(\frac{18\pi}{a}\right);$$

$$(t+6)^2+1=\cos\left(\frac{18\pi}{a}\right).$$

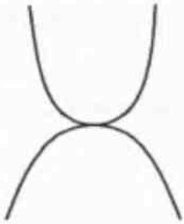
Мы видим, что левая часть этого уравнения не меньше единицы, а правая часть — не больше единицы. Равенство может быть, только если обе они равны единице.

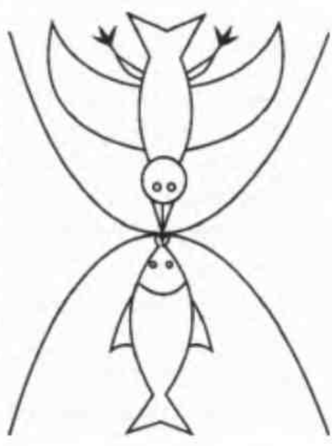
$$\begin{cases}(t+6)^2+1\ge 1,\\ \cos\left(\dfrac{18\pi}{a}\right)\le 1,\\ (t+6)^2+1=\cos\left(\dfrac{18\pi}{a}\right);\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(t+6)^2+1=1,\\ \cos\left(\dfrac{18\pi}{a}\right)=1.\end{cases}$$

Это классическая задача на метод оценки.

Метод оценки применяется, когда в левой и правой частях уравнения или неравенства стоят функции разных типов. Например, алгебраическая и тригонометрическая, или же показательная и логарифмическая. При этом уравнение составлено так, что эти функции могут быть равны друг другу только в определенной точке, в которой одна из них принимает наименьшее значение, а другая — наибольшее.

Вот как это выглядит.





Чтобы лучше запомнить суть метода, я рассказываю историю.

Глубоко-глубоко в море жила маленькая рыбка. А высоко-высоко в небе жила маленькая птичка. И однажды они полюбили друг друга! А встретиться они могли только в одной точке, на границе моря и неба, до которой рыбке надо подняться, а птичке — спуститься!

В нашем случае функция f в левой части уравнения и функция g в правой части «встречаются», когда одна из них принимает свое наименьшее значение, равное единице, а другая — свое наибольшее значение, также равное единице.

Получим: $\begin{cases} t = -6, \\ \dfrac{18\pi}{a} = 2\pi n,\ n \in Z; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 6|x| - a = -6, \\ \dfrac{9}{a} = n,\ n \in Z. \end{cases}$

Второе уравнение означает, что частное $\dfrac{9}{a}$ — целое число.

В первом уравнении сделаем замену $|x| = z$, $z \geq 0$.

Получим: $z^2 - 6z = a - 6$.

Обозначим $a - 6 = b$ и найдем, сколько корней имеет уравнение $z^2 - 6z = b$ при неотрицательных z и различных b.

Нам нужно, чтобы исходное уравнение относительно x имело два корня.

Это происходит, когда уравнение $z^2 - 6z = b$ имеет единственный положительный корень z_0, которому соответствуют $x_1 = z_0$ и $x_2 = -z_0$.

Заметим, что $z_0 \neq 0$, так как если $|x| = 0$, то $x = 0$ и двух корней не получится.

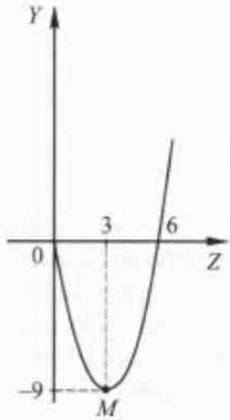


График функции $y(z) = z^2 - 6z$ — парабола с вершиной $M(3; -9)$.

1) Если $b = -9$, то уравнение $z^2 - 6z = b$ имеет единственный корень $z = 3$, которому соответствуют два корня исходного уравнения: $x = 3$ и $x = -3$.

Поскольку $a = b + 6$, в этом случае $a = -3$. Это значение удовлетворяет и второму уравнению системы: $-\dfrac{9}{3} = -3$ — целое.

2) Уравнение $z^2 - 6z = b$ имеет единственное положительное решение также при $b > 0$, при этом $z > 6$ и $a > 6$.

Но если $a > 6$, условию $\dfrac{9}{a} = n$ удовлетворяет только $a = 9$.

Ответ: $a = -3$ или $a = 9$.

19. Пусть a, b, c, d, e, f — члены последовательности.

$M_1 = \dfrac{b + c + d + e + f}{5} = 1.$

Значит, $b + c + d + e + f = 5$.

$M_2 = 2$, значит, $a + c + d + e + f = 10$.

а) Пусть $M_3 = 1{,}6$. Тогда $a + b + d + e + f = 1{,}6 \cdot 5 = 8$.

Обозначим $d + e + f = p$.

Получим систему уравнений:

$\begin{cases} b + c + p = 5, \\ a + c + p = 10, \\ a + b + p = 8; \end{cases}$ отсюда $\begin{cases} a = b + 5, \\ c = b + 2, \\ a = c + 3. \end{cases}$

Возьмем $b = 1$. Тогда $c = 3$, $a = 6$, $p = 1$.

Подойдет, например, набор чисел: 6; 1; 3; 0; 0; 1.

б) Как и в пункте (а), обозначим $d + e + f = p$ и запишем систему уравнений. Если $M_3 = 3$, то $a + b + p = 3 \cdot 5 = 15$.

$$\begin{cases} b+c+p=5, \\ a+c+p=10, \\ a+b+p=15; \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases} a=b+5, \\ c=b+2, \\ a=c+10. \end{cases}$$

Если $a = c + 10$, то $a \geq 10$.

Мы получили противоречие с условием, поскольку a, как и все члены последовательности, — число однозначное.

в) Найдем наибольшее возможное M_3. Система будет иметь вид $\begin{cases} b+c+p=5, \\ a+c+p=10, \\ a+b+p=5M_3. \end{cases}$

Обозначим $5M_3 = z$. Тогда: $\begin{cases} a-b=5, \\ b-c=z-10, \\ a-c=z-5. \end{cases}$

Поскольку числа a, b, c — однозначные, разница между любыми двумя из них не превышает 9. Это значит, что $z - 5 \leq 9$; $z \leq 14$.

$5M_3 \leq 14$; $M_3 \leq 2{,}8$.

Это оценка.

Приведем пример, пользуясь условиями: $\begin{cases} a=b+5, \\ b=c+4, \\ a=c+9. \end{cases}$

Подходят $c = 0$, $a = 9$, $b = 4$.

Тогда $p = d + e + f = 1$.

Пусть $d = 1$, $e = 0$, $f = 0$. Получим последовательность: 9, 4, 0, 1, 0, 0.

Для нее $M_3 = 2{,}8$.

Короткое послесловие

Дорогие читатели — старшеклассники, учителя и репетиторы!

Не прощаюсь. Мы обязательно встретимся с вами на моих мастер-классах, на наших курсах в Москве, онлайн и на страницах новых книг.

Я благодарна своим коллегам — математикам-энтузиастам, авторам сайтов для подготовки к ЕГЭ: Дмитрию Гущину, Игорю Яковлеву, Александру Ларину, Инне Фельдман. Все вместе мы не просто помогаем абитуриентам отлично сдавать ЕГЭ и поступать в лучшие вузы России и всего мира. Мы создаем интеллектуальную и творческую атмосферу для талантливых старшеклассников и учителей. Большое вам спасибо, коллеги!

Большое спасибо Асе Акимовой, Алексею Джигилю, Любови Голубевой, Борису Первушкину и всей команде моей компании «ЕГЭ-Студия».

Всегда, возвращаясь из путешествия, я думаю о том, куда отправлюсь в следующий раз. И чаще всего я точно это знаю.

Каждый раз, заканчивая книгу, я думаю о следующей.

Я буду рада вашим отзывам об этой книге.

Пишите мне: Anna@EGE-Study.ru

Анна Малкова

Дополнительный справочный материал

1. Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 30 (учите наизусть, как таблицу умножения)

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x^2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

2. Греческий алфавит

Αα альфа	Ββ бета	Γγ гамма	Δδ дельта	Εε эпсилон	Ζζ дзета
Ηη эта	Θθ тета	Ιι йота	Κκ каппа	Λλ лямбда	Μμ мю
Νν ню	Ξξ кси	Οο омикрон	Ππ пи	Ρρ ро	Σσ сигма
Ττ тау	Υυ ипсилон	Φφ фи	Χχ хи	Ψψ пси	Ωω омега

3. Таблица перевода первичных баллов ЕГЭ в тестовые
Математика. Профильный уровень

Первичный балл	Тестовый балл
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	56
12	62
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	99
30	100
31	100
32	100

Материалы для подготовки к ЕГЭ по математике

1. *Анна Малкова.* «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ». Издательство «Феникс», 2018 год.

2. www.ege-study.ru

Образовательный портал компании «ЕГЭ-Студия». Множество бесплатных материалов по математике и другим предметам, видеоуроки. Мой годовой авторский онлайн-курс подготовки к ЕГЭ, статьи о выборе профессии и многое другое.

3. http://dvd.ege-study.ru/

Мой полный видеокурс для успешной сдачи ЕГЭ по математике. 12 дисков. Более 30 часов видео.

Видеокурс состоит из двух частей.

Курс «Получи пятерку!» — часть 1 + задача 13, тригонометрия, 5 дисков.

Курс «Премиум» — вся часть 2 ЕГЭ по математике,7 дисков.

Видеокурс заменяет год занятий с репетитором! Доступны диски и электронные версии.

4. www.sdamgia.ru

Содержит тысячи заданий ЕГЭ с решениями и ответами. Вы можете решать как отдельные задания по темам, так и варианты ЕГЭ. Очень полезно для тренировки.

5. www.mathus.ru

Полный авторский курс подготовки к ЕГЭ по физике, а также статьи для углубленной подготовки к ЕГЭ по математике и олимпиадам по математике и физике.

6. www.alexlarin.net

Тренировочные варианты ЕГЭ, часто повышенной сложности. Форум, где решения задач можно обсудить с коллегами. Все тренировочные, диагностические и экзаменационные работы ФИПИ и МИОО.

Оглавление