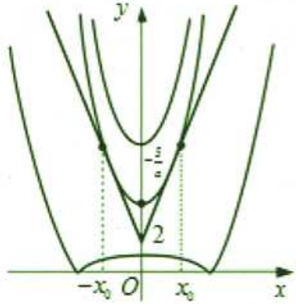
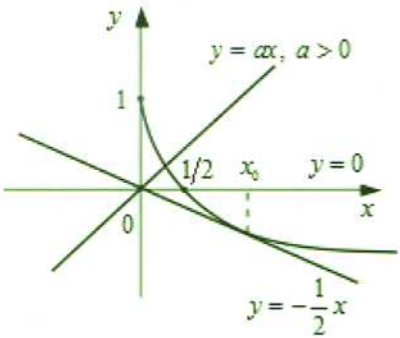
А. А. Черняк, Ж. А. Черняк

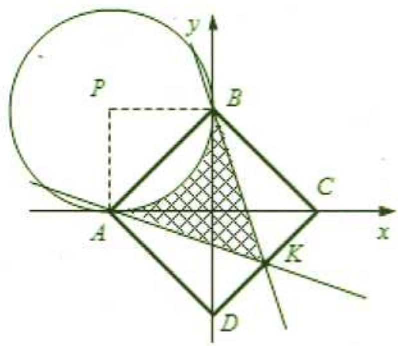


ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

практическая подготовка





ПРОФИЛЬНЫЙ

БАЗОВЫЙ

- Необходимая справочная теория
- Разбор сложных задач по каждой теме
- Приемы, рекомендации и комментарии при решении задач
- Большое количество задач для самостоятельного решения

bhv®

А. А. Черняк
Ж. А. Черняк

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

практическая подготовка

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2017

УДК 373:512
ББК 22.14я72
Ч-49

Черняк, А. А.

Ч-49 ЕГЭ по математике. Алгебра. Профильный уровень. Практическая подготовка / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. — СПб.: БХВ-Петербург, 2017. — 432 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3812-1

В книге рассмотрены традиционные разделы школьного курса алгебры на более высоком по сравнению с базовым уровне и разделы, не входящие в круг задач базового уровня, необходимые для сдачи ЕГЭ по математике профильного уровня: арифметические и алгебраические преобразования, преобразования графиков, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, комбинаторика и элементы теории вероятностей. Разбор текстовых задач по этим темам приведен в соответствующих главах. В каждой главе кратко представлены необходимые теоретические сведения, большое количество задач с комментариями и решениями, приведены подходы и методы решения классов задач, задачи для самостоятельного решения. Ответы даются в конце пособия.

Книга предназначена учащимся с базовым уровнем математической подготовки. Ее можно использовать для самостоятельной подготовки к профильному уровню ЕГЭ, на уроках, факультативных занятиях, подготовительных курсах, индивидуально с репетитором.

Для образовательных учреждений

УДК 373:512
ББК 22.14я72

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Екатерина Капалыгина*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Марины Дамбиевой*

Подписано в печать 31.01.17.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 27.
Тираж 1100 экз. Заказ № 446
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Отпечатано в АО "Первая Образцовая типография"
Филиал "Чеховский Печатный Двор"
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru, тел. 8(499)270-73-59

ISBN 978-5-9775-3812-1

Оглавление

Предисловие

Данная книга призвана научить решать все задания повышенного и высокого уровней сложности профильного ЕГЭ. (Задания базового уровня и часть задач профильного уровня ЕГЭ были рассмотрены в книге «ЕГЭ по математике. Алгебра. Базовый уровень. Практическая подготовка»[1], пользоваться которой можно начинать с «нулевого» уровня.) Помимо этого, она учитывает запросы и тех абитуриентов, которые поступают в престижные вузы России (подобные МФТИ) через олимпиады и внутривузовские экзамены.

Главная идея книги — систематизировать подходы и методы, нацеленные на применение к решению блоков задач. Все это призвано помочь абитуриенту и школьнику сориентироваться в многообразии крупных классов родственных алгебраических задач.

Каждая глава содержит опорные обучающие задачи, которые сопровождаются методическими советами, комментариями и общими алгоритмами, подсказывающими единые эффективные приемы решения. Разделы *«Задачи для самостоятельного решения»* в конце глав способствуют усвоению полученных навыков.

Книга предназначена школьникам с базовым уровнем подготовки и может служить основой для самостоятельной подготовки к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вузы, а также использоваться на уроках математики, факультативах, подготовительных курсах, репетиторских занятиях.

---

[1] Черняк А., Черняк Ж. ЕГЭ по математике. Алгебра. Базовый уровень. Практическая подготовка. — СПб.: БХВ-Петербург, 2016.

Обозначения и сокращения

I — множество иррациональных чисел

Q — множество рациональных чисел

R — множество действительных чисел

Z — множество целых чисел

$\varnothing$ — пустое множество

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности

$\Rightarrow$ — знак логического следования

$\{a, b, c, ...\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c, ...

$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок, сегмент, числовой отрезок) с началом a и концом b, $a < b$

$(a; b]$ — полуоткрытый промежуток с началом a и концом b, $a < b$ (полуинтервал; числовой отрезок, открытый слева)

$[a; b)$ — полуоткрытый промежуток с началом a и концом b, $a < b$ (полуинтервал; числовой отрезок, открытый справа)

$(a; b)$ — открытый промежуток (интервал, открытый числовой отрезок) с началом a и концом b

$\log_a$ — логарифм с основанием a

lg — десятичный логарифм

$n!$ — n-факториал: произведение натуральных чисел от 1 до n

МПФ — метод пошаговой формализации

НОД — наибольший общий делитель

НОК — наименьшее общее кратное

ОДЗ — область допустимых значений

ГЛАВА 1. Числа, выражения, графики

§ 1.1. Арифметические и алгебраические преобразования

Для успешного решения алгебраических уравнений и неравенств необходимо свободное владение техникой арифметических и алгебраических преобразований с нетривиальным использованием **формул сокращенного умножения**. Напомним применение этих формул к действиям с арифметическими корнями ($a \geq b$, $b \geq 0$) и затем решим несколько задач на их применение.

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right);$$

$$a-b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right);$$

$$a+b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right);$$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right);$$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right).$$

Например:

$$5-9b=\left(\sqrt{5}-3\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{5}+3\sqrt{b}\right);$$

$$5-9b=\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{9b}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{45b}+\sqrt[3]{81b^2}\right).$$

Для избавления от иррациональности в выражениях вида $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ домножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$, равное неполному квадрату суммы знаменателя данной дроби. В силу формулы $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$ получаем

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}.$$

Аналогичное преобразование:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}.$$

Преобразование выражений вида $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Например:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-5}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-5}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3+2}{2}}+\sqrt{\frac{3-2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}.$$

Дополнительные формулы сокращенного умножения:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc.$$

Для преобразования суммы $a^{2n}+b^{2n}$ (разности $a^{2n}-b^{2n}$) степеней чисел a и b с четными показателями (n — любое целое число) удобно использовать формулы:

$$a^{2n}+b^{2n}=\left(a^n+b^n\right)^2-2a^nb^n,\quad a^{2n}-b^{2n}=\left(a^n-b^n\right)^2+2a^nb^n.$$

Задача 1. Упростить выражение:

$$A=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}.$$

Решение. Воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right);$$

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=$$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right).$$

$$A=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(a+\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b-a-\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Задача 2. Упростить выражение:

$$A=\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)^2-4\cdot\sqrt[4]{xy}}.$$

Решение. В знаменателе первого дробного выражения вынесем за скобки общий множитель $x^{\frac{1}{2}}$, а числитель разложим дважды по формуле разности квадратов; в числителе второго дробного выражения вынесем за скобки общий множитель $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$; в знаменателе третьего — представим арифметический корень в виде степени с рациональным показателем и после раскрытия скобок и приведения подобных запишем знаменатель как квадрат разности:

$$A=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{y^{\frac{1}{4}}}{1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{1}\cdot\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)^2}=\frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}.$$

В арифметических выражениях периодическую дробь, не мешкая, переводите в обыкновенную по следующему правилу.

Пусть положительное число, меньшее единицы, записано в виде бесконечной десятичной периодической дроби x, в которой число цифр в периоде равно k, число цифр, стоящих после запятой до первого периода, равно m. Тогда искомое представление в виде обыкновенной дроби имеет следующий вид: $\dfrac{a-b}{\underbrace{99...9}_{k}\underbrace{00...0}_{m}}$, где a — натуральное число, цифры которого совпадают (в том же порядке) с цифрами периодической дроби x, стоящими после запятой до второго периода, b — натуральное число, цифры которого совпадают (в том же порядке) с цифрами периодической дроби x, стоящими после запятой до первого периода.

Например, в периодической дроби $x=0{,}0031(256)$: $k=3$ — число цифр в периоде, $m=4$ — число цифр, стоящих после запятой до первого периода, $a=00031256=31256$, $b=0031=31$. Поэтому $x=\dfrac{31256-31}{9990000}=\dfrac{31225}{9990000}$.

Задача 3. Найти x из равенства $\dfrac{0{,}1(6)+0{,}(3)}{0{,}1(51)+1{,}(03)}\cdot x=10$.

Решение. Вначале преобразуем периодические дроби в обыкновенные:

$$0{,}1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6},\qquad 0{,}(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};$$

$$0{,}1(51)=\frac{151-1}{990}=\frac{150}{990}=\frac{5}{33},\quad 1{,}(03)=1\frac{3}{99}=1\frac{1}{33}.$$

Далее в числителе получаем $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$, в знаменателе получаем $\dfrac{5}{33}+1\dfrac{1}{33}=1\dfrac{6}{33}=1\dfrac{2}{11}$.

В итоге имеем:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1\frac{2}{11}}\cdot x=10 \quad\Rightarrow\quad x=2\cdot 10\cdot 1\frac{2}{11}=20\frac{40}{11}=23\frac{7}{11}.$$

Если имеется сумма или разность двух радикалов 2-й (3-й) степени, а под знаками радикалов — сопряженные выражения, обозначьте всю сумму или разность через A и возведите обе части полученного равенства в квадрат (в куб); при этом обратите сразу внимание на знак первоначального числа, чтобы в конце решения правильно выбрать одно из двух значений выражения.

Задача 4. Вычислить:

$$A=\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,.$$

Решение. Возведем левую и правую части в квадрат:

$$A^2=\left(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2=\left(\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2-$$

$$-2\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2=16-2\sqrt{\left(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2=16-2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)}\ \Rightarrow\ A^2=16-2\sqrt{24-8\sqrt{5}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^2=16-4\sqrt{6-2\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ A^2=16-4\sqrt{5+1-2\sqrt{5}\cdot 1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^2=16-4\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}\ \Rightarrow\ A^2=16-4\left(\sqrt{5}-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^2=20-4\sqrt{5}\ \Rightarrow\ |A|=\sqrt{20-4\sqrt{5}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A|=2\sqrt{5-\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ A=-2\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Здесь выбрано отрицательное значение A, поскольку первоначальное выражение меньше нуля (число $\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ меньше числа $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$).

Важным свойством множества **Q** рациональных чисел является его замкнутость относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления, т. е. сумма, разность, произведение и частное (исключая деление на нуль) двух рациональных чисел также будет рациональным числом. Множество **Z** целых чисел также замкнуто относительно трех операций — сложения, вычитания и умножения. Отметим, что множество **I** иррациональных чисел не замкнуто относительно всех арифметических операций. Например, $\sqrt{2}\sqrt{8}=4$.

Замкнутость множеств **Q** и **Z** — важнейший фактор в решении задач, подобных приведенным далее.

Задача 5. Найти рациональные числа p и q, если известно, что число $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ является корнем уравнения $x^2+px+q=0$.

Решение. Вначале преобразуем число a, избавившись от иррациональности в знаменателе:

$$a=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=\frac{8-2\sqrt{15}}{3-5}=\sqrt{15}-4.$$

Так как a — корень уравнения $x^2+px+q=0$, то

$$a^2+pa+q=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{15}-4\right)^2+p\left(\sqrt{15}-4\right)+q=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим: $(p-8)\sqrt{15}=4p-q-31$. Если $p\neq 8$, то $\sqrt{15}=\dfrac{4p-q-31}{p-8}$, что невозможно ввиду иррациональности $\sqrt{15}$ и рациональности $\dfrac{4p-q-31}{p-8}$. Итак, $p=8$, откуда $4\cdot 8-q-31=0 \;\Rightarrow\; q=1$.

Если требуется найти **наибольший общий делитель (НОД)** двух достаточно больших натуральных чисел, то лучше воспользоваться алгоритмом Евклида, поскольку нахождение канонических разложений больших чисел может оказаться обременительной задачей. Алгоритм нахождения НОД(n, k), не требующий представления чисел в виде произведения простых делителей.

Алгоритм Евклида. Пусть $n\geq k$. Найти остаток r_1 при делении n на k. Если $r_1=0$, то НОД$(n, k)=k$. Если $r_1\neq 0$, то найти остаток r_2 при делении k на r_1. Если $r_2=0$, то НОД$(n,k)=r_1$. Если $r_2\neq 0$, то найти остаток r_3 при делении r_1 на r_2. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока не получится остаток r_m, равный нулю. В этом случае НОД(n, k) будет равен предыдущему остатку r_{m-1}.

Задача 6. Найти НОД$(3599,\ 4819)$.

Решение. Разделим 4819 на 3599 с остатком:
$4819 = 3599 \cdot 1 + 1220$.

Разделим 3599 на 1220 с остатком: $3599 = 1220 \cdot 2 + 1159$. Разделим 1220 на 1159 с остатком: $1220 = 1159 \cdot 1 + 61$. Разделим 1159 на 61 с остатком: $1159 = 61 \cdot 19 + 0$.

Итак, НОД$(3599,\ 4819) = 61$.

Основным инструментом при определении остатков больших степеней служит теорема Эйлера и ее следствие — малая теорема Ферма. Но вначале несколько определений.

Любое натуральное число $n > 1$ единственным (с точностью до перестановки сомножителей) способом можно представить в виде произведения $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$, где $p_1, \ldots, p_m$ — попарно различные простые делители числа m; $a_1, \ldots, a_m$ — натуральные числа, называемые **кратностями соответствующих делителей**. Такое представление называется **каноническим разложением числа** ***m***. Например, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ — каноническое разложение числа 360.

Функция Эйлера $\varphi(n)$, заданная на множестве натуральных чисел, определяется так: $\varphi(n)$ равно числу всех натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Очевидно, если n — простое число, то $\varphi(n) = n - 1$. Формула для вычисления функции Эйлера для чисел, заданных в каноническом виде:

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}\right) =$$

$$= \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1}\right) \cdot \left(p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1}\right) \cdots \left(p_m^{a_m} - p_m^{a_m - 1}\right).$$

Например,

$$\varphi(10) = \varphi\left(2^1 \cdot 5^1\right) = \left(2^1 - 2^0\right)\left(5^1 - 5^0\right) = 4,$$

$$\varphi(360) = \varphi\left(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\right) = \left(2^3 - 2^2\right)\left(3^2 - 3^1\right)\left(5^1 - 5^0\right) = 96.$$

Теорема Эйлера. Пусть натуральное число a взаимно просто с натуральным числом n. Тогда остатком от деления числа $a^{\varphi(n)}$ на n является 1.

Теорема Ферма. Пусть натуральное число a не делится на простое число p. Тогда остатком от деления числа a^{p-1} на p является 1.

Задача 7. На какую цифру оканчивается число 3657^{7563}?

Решение. Другими словами, надо найти остаток от деления 3657^{7563} на 10. Применим теорему Эйлера: так как $\varphi(10)=4$, то остаток от деления 3657^4 на 10 равен 1. Отсюда получаем:

$$3657^{7563}=3657^{4\cdot1890+3}=3657^{4\cdot1890}\cdot3657^3=\left(3657^4\right)^{1890}\cdot3657^3.$$

По доказанному выше, остаток от деления числа $\left(3657^4\right)^{1890}$ на 10 равен 1. Поэтому остается только найти остаток от деления числа 3657^3 на 10, который равен 3.

Задача 8. Дано число $3^{2002}+7^{2002}$. Найти его остаток от деления на 11.

Решение. Применим теорему Ферма: остаток от деления 3^{10} на 11 равен 1. Отсюда следует, что остаток от деления 3^{2000} на 11 также равен 1. Поэтому остаток от деления 3^{2002} на 11 совпадает с остатком от делении 3^2 на 11, т. е. равен 9. Аналогично, остаток от деления 7^{2002} на 11 равен остатку от деления 7^2 на 11, т. е. равен 5. Суммарный результат: 3.

Если для двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ можно найти такой многочлен $S(x)$, что $P(x)=Q(x)\cdot S(x)$, то говорят, что $P(x)$ делится на $Q(x)$, при этом $Q(x)$ называют **делителем многочлена** $P(x)$.

Если $P(x)$ не делится на $Q(x)$, то можно однозначно найти такие многочлены $S(x)$ и $R(x)$, для которых выполняется равенство $P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x)$ и степень многочлена $R(x)$

меньше степени многочлена $Q(x)$. При этом $R(x)$ называется **остатком**, а $S(x)$ — **частным** при делении $P(x)$ на $Q(x)$.

Так же, как целые числа, многочлен $P_n(x)$ степени n можно разделить на многочлен $Q_m(x)$ степени m $(n \geq m)$ «уголком». Например:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+0x^4+6x^3+0x^2-2x-5 & \underline{x^2-2x+2} \\
\underline{x^5-2x^4+2x^3}+0x^2-2x-5 & x^3+2x^2+8x+12 \text{ — частное} \\
\qquad 2x^4+4x^3+0x^2 & \\
\qquad \underline{2x^4-4x^3+4x^2} & \\
\qquad\qquad 8x^3-4x^2-2x & \\
\qquad\qquad \underline{8x^3-16x^2+16x} & \\
\qquad\qquad\qquad 12x^2-18x-5 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{12x^2-24x+24} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6x-29 \text{ — остаток} &
\end{array}
$$

Итак,

$$x^5+6x^3-2x-5=(x^2-2x+2)(x^3+2x^2+8x+12)+6x-29.$$

Для деления многочлена $P_n(x)$ на линейный многочлен $x-c$ удобно применять **схему Горнера**: всякий многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ единственным образом представим в виде $P_n(x)=(x-c)\cdot Q_{n-1}(x)+R$, где $Q_{n-1}(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$ — частное, а число R — остаток. Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и остаток R вычисляются по формулам:

$$
\begin{cases}
b_0=a_0; \\
b_1=a_1+cb_0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{n-1}=a_{n-1}+cb_{n-2}; \\
R=a_n+cb_{n-1}.
\end{cases}
$$

Для вычислений по схеме Горнера используют таблицу, верхняя строка которой содержит коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ многочлена $P_n(x)$, а нижняя строка — коэффициенты $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$ многочлена $Q_{n-1}(x)$ и остаток R.

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	...	b_{n-1}	R

Алгоритм заполнения нижней строки таблицы. Старший коэффициент b_0 многочлена $Q_{n-1}(x)$ совпадает с числом a_0, т. е. «списывается» из верхней строки в нижнюю. Все остальные коэффициенты $b_1, ..., b_{n-1}$ и остаток R последовательно вычисляются так: b_k получается умножением числа c на коэффициент b_{k-1}, полученный на предыдущем шаге, и прибавлением к этому произведению числа a_k; R получается умножением числа c на коэффициент b_{n-1} и прибавлением к этому произведению числа a_n

	a_0	a_1	...	a_{k-1}	a_k	...
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = cb_0 + a_1$	...	$b_{k-1} = cb_{k-2} + a_{k-1}$	$b_k = cb_{k-1} + a_k$	...

Задача 9. Разделить $P_5(x) = -2x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 1$ на $x - 1$, используя схему Горнера.

Решение.

	-2	0	0	0	1	1
1	-2	$1 \cdot (-2) + 0 =$ $= -2$	$1 \cdot (-2) + 0 =$ $= -2$	$1 \cdot (-2) + 0 =$ $= -2$	$1 \cdot (-2) + 1 =$ $= -1$	$1 \cdot (-1) + 1 =$ $= 0$

$$Q_4 = -2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1,$$

$$P_5(x) = (x-1) \cdot Q_4(x) = (x-1)\left(-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1\right).$$

Теперь вспомним два основных типа последовательностей чисел — арифметическую и геометрическую прогрессии.

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждый член, начиная со второго, отличается от предыдущего члена на одно и то же число d, называемое **разностью прогрессии**. Если $d > 0$, то прогрессия называется **возрастающей**; если $d < 0$, то прогрессия называется **убывающей**. Три числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, если и только если $b = \frac{a+c}{2}$.

Пусть a_n — n-й член арифметической прогрессии, d — ее разность, S_n — сумма ее первых n членов. Тогда $d = a_n - a_{n-1}$,

$a_n = a_1 + d(n-1)$, $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$, $a_n = S_n - S_{n-1}$. Если $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждый член, начиная со второго, отличается от предыдущего члена в одно и то же число раз. Это число $q \neq 0$ называется **знаменателем прогрессии**. Если первый член прогрессии больше нуля, то при $0 < q < 1$ геометрическая прогрессия называется **убывающей**, а при $q > 1$ — **возрастающей**. Три числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, если и только если $b^2 = a \cdot c$.

Пусть b_n — n-й член геометрической прогрессии, $q \neq 0$ — ее знаменатель, S_n — сумма ее первых n членов. Тогда $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ при $q \neq 1$. Если $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

Большинство задач на прогрессии решается общим способом, который основывается на следующем простом, но важном наблюдении: если для арифметической прогрессии известны ее параметры a_1, d и n (а для геометрической прогрессии — соответственно b_1, q и n), то с помощью приведенных выше формул все остальные параметры этой прогрессии определяются однозначно. Поэтому если всю исходную информацию, приведенную в условии конкретной задачи, в случае арифметической прогрессии выразить через a_1, d и n (или через b_1, q и n — в случае геометрической прогрессии), а затем решить полученную систему уравнений и неравенств, то таким образом можно найти любой требуемый параметр прогрессии.

Задача 10. Между числами 2 и 65 находится 20 чисел, образующих вместе с данными числами арифметическую прогрессию. Найти наибольшее из неизвестных чисел.

Решение. В соответствии с условием задачи $a_1 = 2,\ a_{22} = 65$. Последнее равенство запишем в виде уравнения $a_1 + 21d = 65$. Подставив $a_1 = 2$, получим $21d = 63 \Leftrightarrow d = 3$, откуда $a_{21} = a_{22} - d = 65 - 3 = 62$.

Задача 11. Найти четвертый член геометрической прогрессии, если сумма ее первых n членов выражается формулой $S_n = \dfrac{7(4^n - 1)}{48}$.

Решение. Поскольку

$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \frac{7(4^4 - 1)}{48}, \quad S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = \frac{7(4^3 - 1)}{48},$$

то

$$b_4 = S_4 - S_3 = \frac{7(4^4 - 1)}{48} - \frac{7(4^3 - 1)}{48} = \frac{7}{48}(4^4 - 1 - 4^3 + 1) =$$

$$= \frac{7}{48}(4^4 - 4^3) = \frac{7}{48} \cdot 4^3(4 - 1) = \frac{7 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 3}{48} = 28.$$

Иногда ключом к решению задачи является правильно понятая и логически верно истолкованная «нестандартная» информация, содержащаяся в условии задачи.

Задача 12. Первый член арифметической прогрессии равен 130, пятнадцатый член этой прогрессии является ее первым отрицательным членом. Какие значения может принимать разность этой прогрессии?

Решение. Запишем условия этой задачи вначале в виде системы уравнений и неравенств, а затем, как всегда, выразим все неизвестные полученной системы через a_1 и d.

Итак,

$$\begin{cases} a_1 = 130; \\ a_{15} < 0; \\ a_{14} \geq 0. \end{cases}$$

Обычно, записывая условие этой задачи, формально пропускают информацию о том, что a_{15} — не только отрицательный, но и *первый* из отрицательных членов прогрессии!

Вернемся к составленной системе:

$$\begin{cases} a_1 = 130; \\ a_1 + 14d < 0; \\ a_1 + 13d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 130; \\ 130 + 14d < 0; \\ 130 + 13d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 130; \\ d < -\dfrac{130}{14}; \\ d \geq -\dfrac{130}{13} \end{cases} \Leftrightarrow d \in \left[-10; -\frac{65}{7}\right).$$

Задача 13. В ящик вложили 5 ящиков. В каждый из этих ящиков либо опять вложили 5 ящиков, либо не вложили ни одного. Данная процедура повторялась несколько раз. В результате заполненных ящиков оказалось 25. Какой процент составляет количество пустых ящиков от количества заполненных?

Решение. Посмотрим, как меняется число заполненных и число пустых ящиков после каждой процедуры, описанной в условии задачи. При вложении пяти ящиков в пустой ящик общее число пустых ящиков увеличивается на 4 (один пустой ящик заполняется, в то время как добавляется 5 новых), а число заполненных ящиков увеличивается на 1. Таким образом, количества пустых ящиков образуют арифметическую прогрессию с разностью 4, а количества заполненных ящиков — арифметическую прогрессию с разностью 1. Поэтому если процедура будет повторяться n раз, то к завершению процесса число заполненных ящиков будет равно $1+(n-1)\cdot 1=n$, а число пустых ящиков будет равно $5+(n-1)\cdot 4=4n+1$. По условию итоговое число заполненных ящиков равно 25, откуда $n=25$. Число пустых ящиков равно $4n+1=4\cdot 25+1=101$. Искомый процент числа пустых ящиков от числа заполненных равен $\frac{101}{25}\cdot 100=404\%$.

Задача 14. Определить, какой должна быть разность арифметической прогрессии с первым членом $a_1=-27$, чтобы сумма ее первых n членов принимала наименьшее значение при $n=5$.

Решение. Вдумавшись в причину того факта, что суммы S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 членов арифметической прогрессии уменьшались, а затем для $n\geq 6$ стали возрастать, нетрудно догадаться, что члены прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 меньше нуля, а остальные члены уже больше нуля, т. е. a_5 — последний отрицательный член этой прогрессии. Таким образом, S_5 минимальна, если и только если

$$\begin{cases} a_5<0; \\ a_6>0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом условия $a_1=-27$ получаем:

$$\begin{cases} -27+4d<0; \\ -27+5d>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d<\dfrac{27}{4}; \\ d>\dfrac{27}{5} \end{cases} \Leftrightarrow d\in\left(\frac{27}{5};\frac{27}{4}\right).$$

Иногда исходной информации объективно недостаточно, чтобы определить все параметры прогрессии, но вполне достаточно, чтобы дать ответ на поставленный в задаче вопрос. Для этого нужно выразить искомую величину через параметры a_1, d и n (или b_1, q и n), а затем воспользоваться условиями задачи.

Задача 15. Чему равно произведение шестого и десятого членов геометрической прогрессии, если произведение пятого, восьмого и одиннадцатого ее членов равно 64?

Решение. По условию

$$b_5 \cdot b_8 \cdot b_{11} = 64 \Leftrightarrow b_1^3 q^{4+7+10} = 64 \Leftrightarrow b_1^3 q^{21} = 64.$$

Выразим теперь искомое произведение $b_6 \cdot b_{10}$ через параметры b_1, q: $b_6 \cdot b_{10} = b_1 q^5 \cdot b_1 q^9 = b_1^2 q^{14} = \left(b_1 q^7\right)^2$. Поскольку $b_1^3 q^{21} = 64 \Leftrightarrow \left(b_1 q^7\right)^3 = 4^3 \Leftrightarrow b_1 q^7 = 4$, то искомое произведение равно $b_6 \cdot b_{10} = 4^2 = 16$.

Задача 16. В арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n$ известно, что $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{29} + a_{31} = 784$. Чему равна сумма $a_1 + a_6 + a_{11} + ... + a_{26} + a_{31}$?

Решение. Заметим, что если числа $a_1, a_2, ..., a_n$ составляют арифметическую прогрессию с разностью d, то числа $a_1, a_3, a_5, ..., a_{29}, a_{31}$ составляют арифметическую прогрессию с разностью $2d$, равно как и числа $a_1, a_6, a_{11}, ..., a_{26}, a_{31}$ составляют арифметическую прогрессию с разностью $5d$. Так как $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{29} + a_{31} = 784$, то

$$\frac{a_1 + a_{31}}{2} \cdot k = 784 \Rightarrow \frac{2a_1 + 30d}{2} \cdot k = 784 \Rightarrow (a_1 + 15d) \cdot k = 784.$$

Но прогрессия $a_1, a_3, ..., a_{31}$ содержит k членов, где $k = \dfrac{a_{31} - a_1}{2d} + 1 = \dfrac{30d}{2d} + 1 = 16$. Итак, $a_1 + 15d = 49$.

А теперь выразим через параметры a_1 и d величину, которую требуется вычислить в условии задачи:

$$a_1 + a_6 + a_{11} + ... + a_{26} + a_{31} = \frac{a_1 + a_{31}}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + 30d}{2} \cdot m = (a_1 + 15d)m.$$

Число членов m в арифметической прогрессии a_1, a_6, a_{11}, ..., a_{26}, a_{31} равно $m = \frac{a_{31} - a_1}{5d} + 1 = \frac{30d}{5d} + 1 = 7$. Вспомним также, что $a_1 + 15d = 49$. Поэтому искомая сумма равна $49 \cdot 7 = 343$.

Особую группу задач составляют задачи на суммирование прогрессий с указанными свойствами. Здесь важно не ошибиться в нахождении последнего члена указанной прогрессии (первый член, как правило, подбирается без всякого труда) и вычислении числа членов этой прогрессии.

Задача 17. Найти сумму всех целых положительных трехзначных чисел, которые при делении на 59 дают остаток 5.

Решение. Очевидно, что возрастающая последовательность указанных чисел образует арифметическую прогрессию с разностью 59. Поскольку любое такое число имеет вид $a = 59k + 5$ (k — натуральные числа), то первым трехзначным числом такого вида будет число $a_1 = 59 \cdot 2 + 5 = 123$. Найдем наибольшее натуральное решение неравенства $59k + 5 < 1000$:

$$59k + 5 < 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 59k < 995 \quad \Leftrightarrow \quad k < \frac{995}{59} = 16\frac{51}{59}.$$

Итак, $k = 16$, а значит, $a_n = 59 \cdot 16 + 5$ — последний член исходной прогрессии, число членов которой равно

$$n = \frac{(59 \cdot 16 + 5) - (59 \cdot 2 + 5)}{59} + 1 = \frac{(16 - 2) \cdot 59}{59} + 1 = 15.$$

Найдем теперь искомую сумму всех ее 15 членов:

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{(59 \cdot 2 + 5) + (59 \cdot 16 + 5)}{2} \cdot 15 = \frac{59 \cdot 18 + 5 \cdot 2}{2} \cdot 15 =$$

$$= (59 \cdot 9 + 5) \cdot 15 = 536 \cdot 15 = 8040.$$

Задача 18. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, не делящихся на 11 и имеющих 8 своей последней цифрой.

Решение. Найдем сначала сумму всех трехзначных чисел, оканчивающихся цифрой 8, а затем вычтем из полученного числа сумму всех таких чисел, кратных 11. Понятно, что последовательные трехзначные числа, оканчивающиеся цифрой 8, образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 108$, разностью $d = 10$ и последним членом $a_n = 998$. Найдем количество, а затем сумму этих чисел:

$$n = \frac{998-108}{10} + 1 = 90; \quad S_{90} = \frac{108+998}{2} \cdot 90 = 49770.$$

Остается лишь удалить из полученной суммы «лишние» слагаемые — те числа, которые делятся на 11. Для этого заметим, что числа вида $11 \cdot k$ (k — натуральное число) оканчиваются той же цифрой, что и число k. Так как в нашем случае числа оканчиваются цифрой 8, то и k должно оканчиваться этой же цифрой. Найдем трехзначные числа указанного вида: $11 \cdot 8 < 100$, $100 < 11 \cdot 18 < 1000$, ..., $11 \cdot 88 < 1000$, но $11 \cdot 98 > 1000$. Поэтому «лишние» слагаемые будут составлять следующую сумму:

$$11 \cdot 18 + 11 \cdot 28 + 11 \cdot 38 + \ldots + 11 \cdot 88 = 11 \cdot (18 + 28 + \ldots + 88) =$$
$$= 11 \cdot \frac{18+88}{2} \cdot 8 = 4664.$$

Итак, искомая сумма равна

$$S_{90} - 4664 = 49770 - 4664 = 45106.$$

В заключение приведем задачи, которые посредством искусных преобразований сводятся к вычислению сумм арифметических или геометрических прогрессий.

Задача 19. Найти сумму $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{100}{2^{100}}$.

Решение. Нетрудно проверить, что слагаемые, составляющие заданную сумму, не образуют ни арифметическую, ни геометрическую прогрессию. При этом числители последовательно идущих слагаемых образуют арифметическую прогрессию с разностью 1, а знаменатели — геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Попробуем «сыграть» на указанных особенностях слагаемых искомой суммы и преобразовать ее в прогрессию.

Обозначим $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{100}{2^{100}}$.

Найдем $\frac{S}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\ldots+\frac{99}{2^{100}}+\frac{100}{2^{101}}$.

Вычислим $S-\frac{S}{2}$ с помощью следующей группировки слагаемых:

$$\frac{S}{2}=S-\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{3}{2^3}-\frac{2}{2^3}\right)+\ldots+\left(\frac{100}{2^{100}}-\frac{99}{2^{100}}\right)-\frac{100}{2^{101}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}\right)-\frac{100}{2^{101}}.$$

Первые 100 слагаемых полученной суммы образуют геометрическую прогрессию, для которой первый член $b_1=\frac{1}{2}$, знаменатель $q=\frac{1}{2}$, число членов $n=100$. Находим эту сумму по формуле

$$S_{100}=\frac{b_1\left(1-q^{100}\right)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{100}}.$$

Тогда

$$\frac{S}{2}=S_{100}-\frac{100}{2^{101}} \Leftrightarrow S=2\left(S_{100}-\frac{100}{2^{101}}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^{100}}-\frac{100}{2^{101}}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{102}{2^{101}}\right)=2-\frac{102}{2^{100}}.$$

Заметим, что тем же способом можно просуммировать слагаемые в выражении $\frac{m}{n^m}+\frac{m+1}{n^{m+1}}+\frac{m+2}{n^{m+2}}+\ldots+\frac{m+k}{n^{m+k}}$, где m, n, k — натуральные числа, причем n и k больше 1.

Задача 20. Найти число

$$A = 5^2 + 9^2 + 13^2 + \ldots + 89^2 - 7^2 - 11^2 - 15^2 - \ldots - 91^2.$$

Решение. Все слагаемые, составляющие сумму и разность в данном выражении, не образуют ни арифметическую, ни геометрическую прогрессии. Перегруппируем слагаемые в исходном выражении следующим образом:

$$A = \left(5^2 - 7^2\right) + \left(9^2 - 11^2\right) + \left(13^2 - 15^2\right) + \ldots + \left(89^2 - 91^2\right) =$$

$$= (5-7)(5+7) + (9-11)(9+11) + (13-15)(13+15) + \ldots +$$

$$+ (89-91)(89+91) = -2(5+7+9+11+13+15+\ldots+89+91).$$

В результате этого в скобках появится сумма членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 5$, последним членом $a_n = 91$ и разностью $d = 2$. Число ее членов n равно: $n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1 = \dfrac{91-5}{2} + 1 = 44$. Поэтому искомое число равно

$$A = -2 \cdot \frac{5+91}{2} \cdot 44 = -96 \cdot 44 = -4224.$$

Задача 21. Последовательность чисел 1, 8, 22, 43, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию: 7, 14, 21, ... Найти номер члена последовательности, равного 35 351.

Решение. Числа данной последовательности 1, 8, 22, 43, ... обозначим a_1, a_2, a_3, a_4, ... По условию

$$a_2 - a_1 = 7 \cdot 1,\ \ a_3 - a_2 = 7 \cdot 2,\ \ a_4 - a_3 = 7 \cdot 3,\ \ \ldots,\ \ a_n - a_{n-1} = 7(n-1).$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \ldots + 7 \cdot (n-2) + 7 \cdot (n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n - a_1 = 7\big(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\big).$$

Так как $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, то $a_n = a_1 + 7 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2}$.

По условию $a_n = 35351$, $a_1 = 1$. Поэтому

$$7 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 35350 \ \Rightarrow\ n(n-1) = 10100 \ \Rightarrow\ n = 101.$$

Не всегда можно свести суммирование к свойствам прогрессии, как, например, в следующей задаче.

Задача 22. Пусть $f(n)$ — целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найти сумму $\frac{1}{f(43)}+\frac{1}{f(44)}+\ldots+\frac{1}{f(1600)}$.

Решение. Обозначим $k=f(n)$. Так как k — ближайшее к $\sqrt{n}$ натуральное число, то

$$\left|\sqrt{n}-k\right|\le\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad k-\frac{1}{2}\le\sqrt{n}\le k+\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad k(k-1)+\frac{1}{4}\le n\le k(k+1)+\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad k(k-1)+1\le n\le k(k+1).$$

Итак, если n удовлетворяет последнему двойному неравенству, то $f(n)=k$. Всего таких n ровно $k(k+1)-k(k-1)=2k$. Поэтому сумма всех чисел $\frac{1}{f(n)}$, где n пробегает все значения от $k(k-1)+1$ до $k(k+1)$, равна $\frac{1}{k}\cdot 2k=2$. Эту сумму обозначим S_k.

Так как $43=7\cdot 6+1$, $1560=39\cdot 40$, то все натуральные числа от 43 до 1560 разбиваются на 33 подмножества вида $\{k(k-1)+1, \ldots, k(k+1)\}$, где $k=7,\ 8,\ 9,\ \ldots,\ 39$, причем

$$\frac{1}{f(k(k-1)+1)}+\frac{1}{f(k(k-1)+2)}+\ldots+\frac{1}{f(k(k+1))}=S_k=2.$$

Поэтому $\frac{1}{f(43)}+\frac{1}{f(44)}+\ldots+\frac{1}{f(1560)}=33\cdot 2=66.$

Рассмотрим остаток суммы:

$$\frac{1}{f(1561)}+\frac{1}{f(1562)}+\ldots+\frac{1}{f(1600)}=\frac{1}{40}+\ldots+\frac{1}{40}=40\cdot\frac{1}{40}=1.$$

В итоге получаем ответ: 67.

Если в задаче требуется найти число элементов каких-либо множеств, которые имеют всевозможные непустые пересечения друг с другом, то применяйте формулу включения-исключения (число элементов в конечном множестве X обозначается $|X|$): для произвольных конечных множеств A и B: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; для произвольных конечных множеств A, B и C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

При этом следует помнить, что объединение $A \cup B$ множеств A и B состоит из всех тех элементов, которые принадлежат или A, или B, т. е. содержатся хотя бы в одном из множеств A, B; пересечение $A \cap B$ множеств A и B состоит из всех тех элементов, которые принадлежат и A, и B, т. е. содержатся в обоих множествах A, B. Аналогичный смысл имеют объединение и пересечение более чем двух множеств.

Задача 23. Дано конечное подмножество X множества натуральных чисел, каждый элемент множества X есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти число элементов в множестве X, если среди них имеются: 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30.

Решение. Пусть A — множество всех тех чисел из X, которые кратны 2, B — множество всех тех чисел из X, которые кратны 3, C — множество всех тех чисел из X, которые кратны 5. Тогда $X = A \cup B \cup C$, причем согласно условию, $|A| = 70$, $|B| = 60$, $|C| = 80$, $|A \cap B| = 32$, $|A \cap C| = 35$, $|B \cap C| = 38$, $|A \cap B \cap C| = 20$.

По формуле включения-исключения получаем:

$$|X| = |A \cup B \cup C| =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 70 + 60 + 80 - 32 - 35 - 38 + 20 = 125.$$

§ 1.2. Преобразования графиков

При решении ряда задач, в которых требуется определить множество значений, промежутки монотонности, точки экстремума некоторой функции, использование производной может оказаться весьма затруднительным или даже невозможным. В подобных случаях прибегают к построению эскиза графика, иллюстрирующего поведение заданной функции, с помощью которого и определяют ее необходимые характеристики. Как мы увидим в последующих главах, эффективно применяются графики и в решениях уравнений и неравенств.

Для успешного построения эскиза графика необходимо знать:

- графики основных элементарных функций;
- простейшие преобразования графиков — преобразования симметрии, параллельного переноса, деформации, а также преобразования графиков функций, содержащих модули.

Преобразование симметрии

1. Симметрия относительно оси Oy: $f(x) \to f(-x)$.

График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (рис. 1.1).

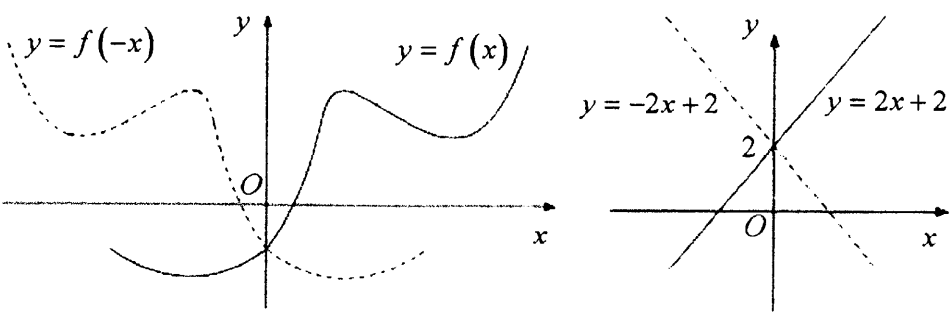


Рис. 1.1

2. Симметрия относительно оси Ox: $f(x) \to -f(x)$.

График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox (рис. 1.2).

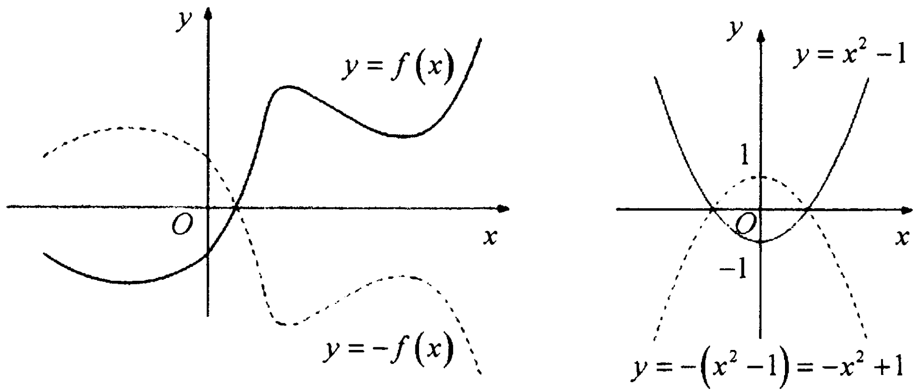


Рис. 1.2

Параллельный перенос

1. Параллельный перенос вдоль оси Oy: $f(x) \to f(x) + a$.

График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на a единиц вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$ (рис. 1.3).

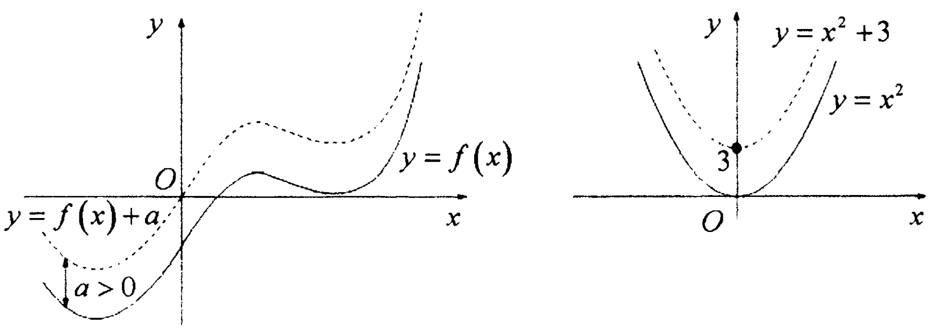


Рис. 1.3

2. Параллельный перенос вдоль оси Ox: $f(x) \to f(x-a)$.

   График функции $y = f(x-a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Ox на a единиц вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$ (рис. 1.4).

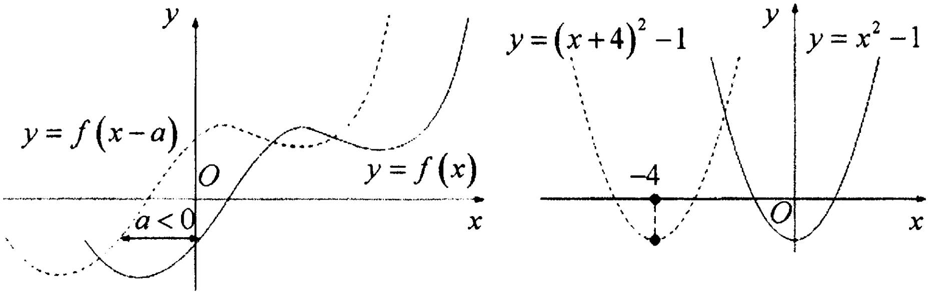


Рис. 1.4

Преобразования растяжения (сжатия)

1. Растяжение (сжатие) вдоль оси Oy: $f(x) \to a \cdot f(x)$, $a > 0$.

   Пусть $a > 1$. График функции $y = a \cdot f(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ в a раз вдоль оси Oy (рис. 1.5).

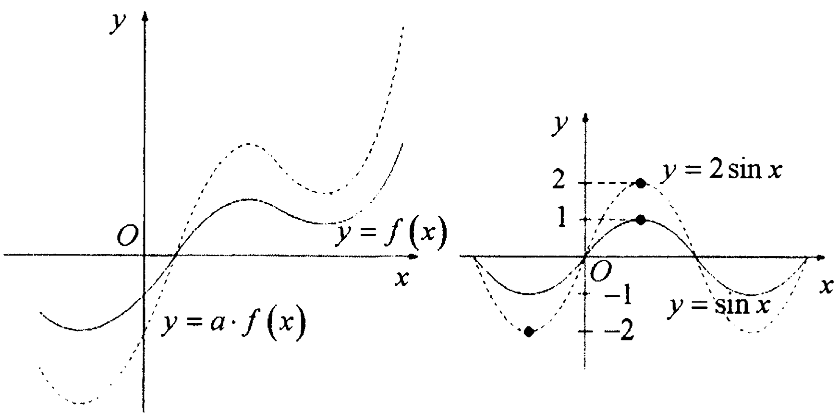


Рис. 1.5

Пусть $0 < a < 1$. График функции $y = a \cdot f(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{a}$ раз вдоль оси Oy (рис. 1.6).

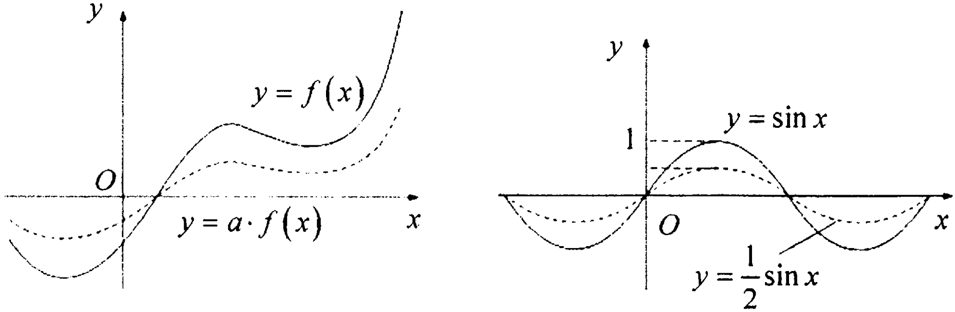


Рис. 1.6

2. Растяжение (сжатие) вдоль оси Ox: $f(x) \to f(ax)$, $a > 0$.
Пусть $a > 1$. График функции $y = f(ax)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ в a раз вдоль оси Ox (рис. 1.7).

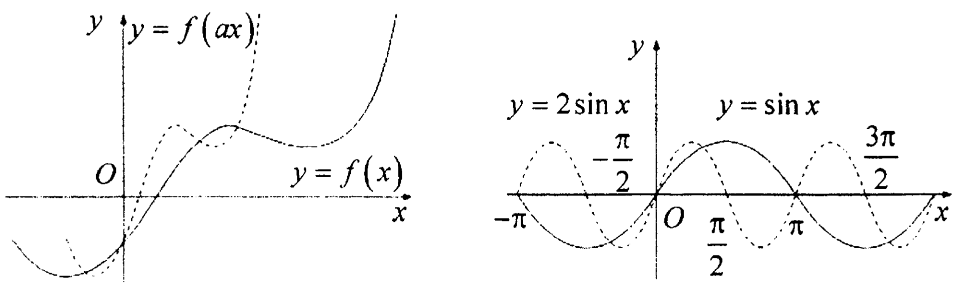


Рис. 1.7

Пусть $0 < a < 1$. График функции $y = f(ax)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{a}$ раз вдоль оси Ox (рис. 1.8).

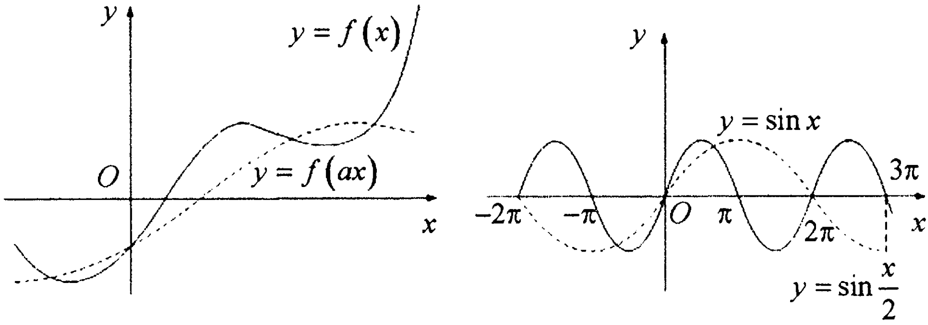


Рис. 1.8

Два основных приема преобразования графиков, содержащих модули

1. $f(x) \to |f(x)|$.

График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом (см. рис. 1.9 — пунктиром обозначен график функции $y = f(x)$): та часть графика $y = f(x)$, которая расположена не ниже оси Ox (в верхней полу-

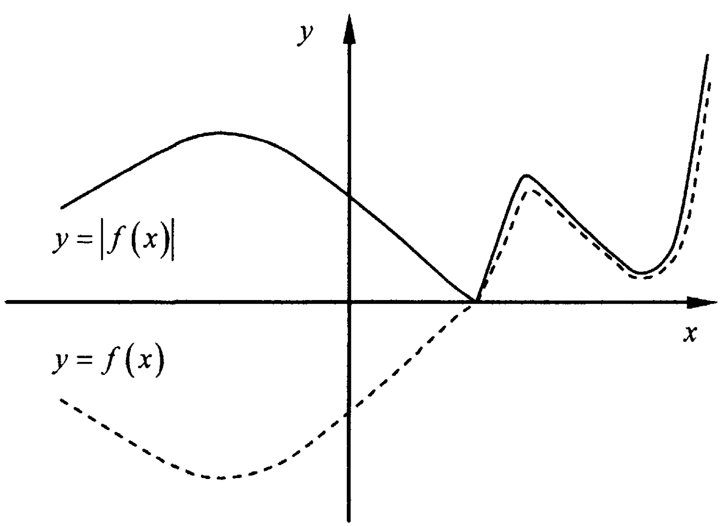


Рис. 1.9

плоскости), остается без изменения; часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, симметрично отображается (вверх) относительно оси Ox .

Например, см. рис. 1.10.

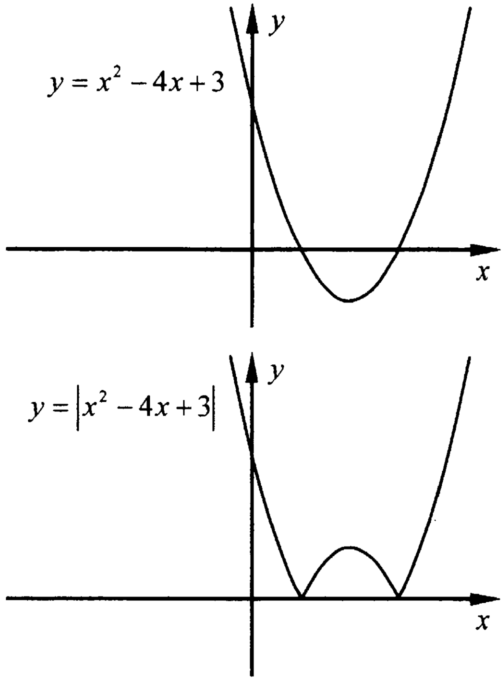


Рис. 1.10

2. $f(x) \to f(|x|)$.

График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом (см. рис. 1.11 — пунктиром обозначен график функции $y = f(x)$): та часть графика $y = f(x)$, которая расположена правее оси Oy (в правой полуплоскости), остается без изменения; та часть графика, которая расположена левее оси Oy, заменяется симметричным отображением относительно оси Oy той части графика $y = f(x)$, которая находится в правой полуплоскости.

Пример приведен на рис. 1.12.

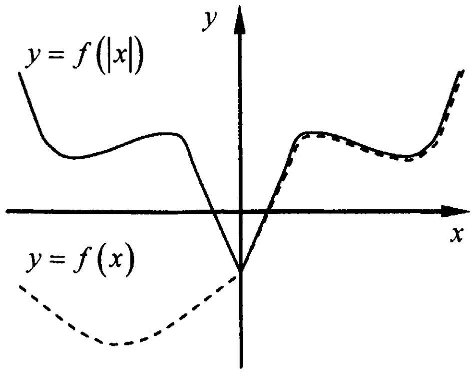


Рис. 1.11

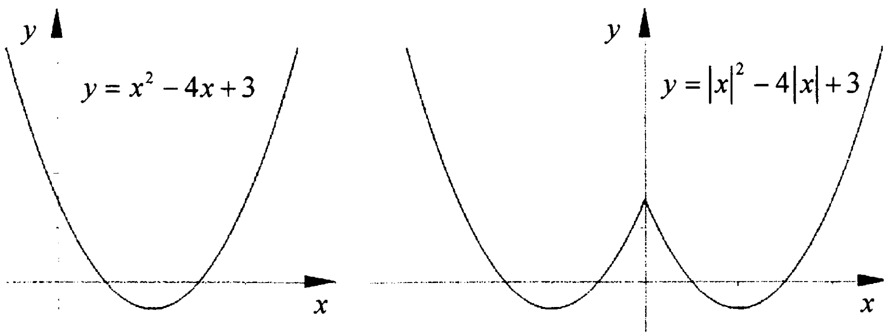


Рис. 1.12

Задача 1. Каким должно быть значение y_0, чтобы прямая $y = y_0$ пересекала график функции $y = \left|x^2 - 3|x| + 2\right|$ наибольшее число раз? Определить это максимальное число пересечений.

Решение. Построим график функции $y = \left|x^2 - 3|x| + 2\right|$. Найдем координаты вершины вспомогательной параболы $y_1 = x^2 - 3x + 2$ (это $x_0 = \dfrac{3}{2}$, $y_0 = -\dfrac{1}{4}$), абсциссы точек ее пересечения с осью Ox (это $x_1 = 1$, $x_2 = 2$) и ординату ее точки пересечения с осью Oy (это $y(0) = 2$). Используя найденные значения, построим график параболы $y_1 = x^2 - 3x + 2$, затем — график функции $y_2 = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ и, наконец, искомый график $y = \left||x|^2 - 3|x| + 2\right|$ для $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 1.13).

Поскольку уравнением $y = y_0$ определяется множество всех прямых, параллельных оси Ox, то при $y_0 \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$ эти прямые пересекают данный график наибольшее число раз. Это число равно 8.

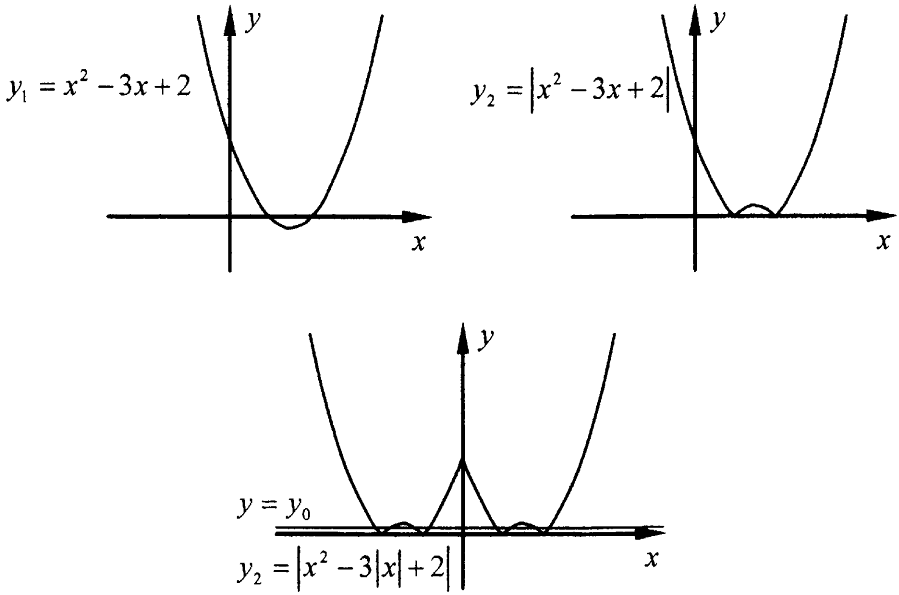


Рис. 1.13

Общий алгоритм построения эскиза графика функции $y = cf(ax - b) + d$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

1. Записать функцию в виде $y = cf\left(a\left(x - \frac{b}{a}\right)\right) + d$.

2. Построить эскиз графика $y_1 = f(x)$.

3. Построить эскиз графика $y_2 = f(|a|x)$ деформацией y_1 вдоль оси Ox: сжатием в $|a|$ раз при $|a| > 1$ или растяжением в $\frac{1}{|a|}$ раз при $|a| < 1$.

4. Если $a<0$, то построить эскиз графика $y_3=f(ax)=f(-|a|x)$ симметричным отображением y_2 относительно оси Oy. Если $a>0$, то положить $y_3=y_2$.

5. Построить эскиз графика $y_4=|c|f(ax)$ деформацией y_3 вдоль оси Oy: растяжением в $|c|$ раз при $|c|>1$ или сжатием в $\frac{1}{|c|}$ раз при $|c|<1$.

6. Если $c<0$, то построить эскиз графика $y_5=cf(ax)=-|c|f(ax)$ симметричным отображением y_4 относительно оси Ox. Если $c>0$, то положить $y_5=y_4$.

7. Построить эскиз графика $y_6=cf(ax)+d$ параллельным переносом y_5 вдоль оси Oy: на d единиц вверх при $d>0$ или на d единиц вниз при $d<0$.

8. Построить эскиз графика $y_7=cf\left(a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right)+d$ параллельным переносом y_6 вдоль оси Ox: на $\frac{b}{a}$ единиц вправо при $\frac{b}{a}>0$ или на $\frac{b}{a}$ единиц влево при $\frac{b}{a}<0$.

Задача 2. На рис. 1.14 изображен график функции $y=f(x)$. Построить график функции $y=-2f\left(1-\frac{x}{2}\right)+5$.

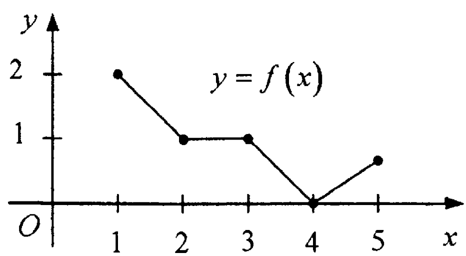


Рис. 1.14

Решение. Запишем искомую функцию в виде $y=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}(x-2)\right)+5$. Построим последовательно графики $y_1=f\left(\frac{1}{2}x\right)$, $y_2=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $y_3=2\cdot f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $y_4=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $y_5=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}x\right)+5$, $y_6=-2\cdot f\left(-\frac{1}{2}(x-2)\right)+5$.

Итак, y_1 получается растяжением графика $y=f(x)$ вдоль оси Ox в 2 раза; y_2 — симметричным отображением y_1 относительно оси Oy (рис. 1.15).

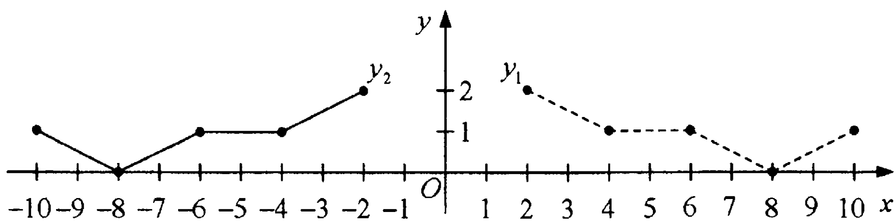


Рис. 1.15

Далее y_3 получается из y_2 растяжением в 2 раза вдоль оси Oy; y_4 — симметричным отображением y_3 относительно оси Ox (рис. 1.16).

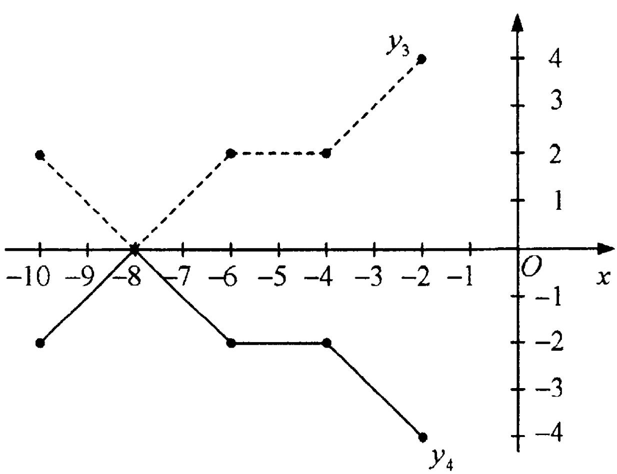


Рис. 1.16

И, наконец, y_5 получается параллельным переносом y_4 на 5 единиц вверх; y_6 — параллельным переносом y_5 на 2 единицы вправо (рис. 1.17).

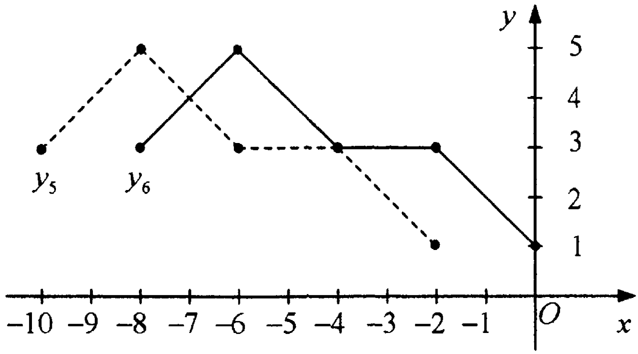


Рис. 1.17

Задача 3. Найти область определения и область значений функции $y=\dfrac{30x-25x^2-9}{5x-3}$.

Решение. Так как $5x-3\neq 0$, то $D(y)=(-\infty;\ 0{,}6)\cup(0{,}6;\ +\infty)$.

Далее: $\dfrac{30x-25x^2-9}{5x-3}=-\dfrac{(5x-3)^2}{5x-3}=-(5x-3)=3-5x$, т. е. для всех x из $D(y)$ $y=3-5x$. График этой функции — прямая. Так как $x=0{,}6$ не входит в область определения функции, то точка с координатами $(0{,}6;\ 0)$ не принадлежит графику функции. Значит, множество значений функции — все числа, кроме 0: $E(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Задача 4. Задать формулой функцию, графиком которой является отрезок MK, изображенный на рис. 1.18.

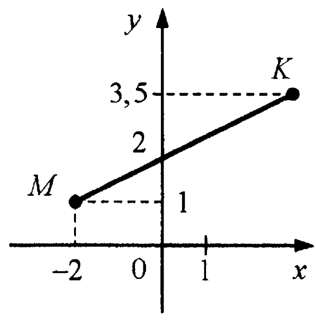


Рис. 1.18

Решение. Прямая MK является графиком линейной функции $y=kx+b$. По изображению отрезка видно, что прямая MK проходит через точки $(-2;1)$ и $(0;2)$. Значит, $1=k\cdot(-2)+b$ и

$2 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = 2$, $k = 0,5$, т. е. уравнение прямой MK имеет вид $y = 0,5x + 2$.

Найдем абсциссу x_0 точки $K(x_0; 3,5)$: $3,5 = 0,5x_0 + 2$; $x_0 = 3$. Итак, отрезок MK является графиком функции $y = 0,5x + 2$, заданной на промежутке $[-2; 3]$.

Задача 5. Определить количество целых чисел, не превосходящих 10 и принадлежащих множеству значений функции $y = 3^{2|x-2|} + 3 \cdot 3^{|x-2|} - 10$.

Решение. Вначале найдем множество значений функции $t = 3^{|x-2|}$ с помощью эскиза ее графика. Для этого построим последовательно эскизы графиков $t_1 = 3^x$, $t_2 = 3^{|x|}$, $t_3 = 3^{|x-2|}$ (рис. 1.19). t_2 получается из t_1 следующим образом: часть графика t_1, расположенная правее оси Oy, остается без изменения; кроме того, она симметрично отображается относительно оси Oy, заменяя собой часть t_1, расположенную левее оси Oy. t_3 получается из t_2 параллельным переносом вправо на 2 единицы.

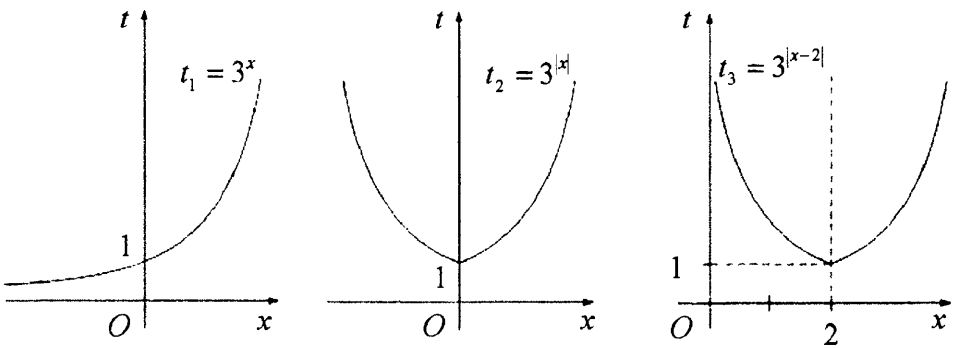


Рис. 1.19

Итак, множество значений функции $t = 3^{|x-2|}$ совпадает с множеством $[1; +\infty)$.

Таким образом, задача сводится к нахождению множества значений квадратичной функции $y = t^2 + 3t - 10$, заданной на промежутке $[1;+\infty)$. Построим эскиз параболы $y=t^2+3t-10$ и выделим на нем все те точки, абсциссы которых принадлежат промежутку $[1;+\infty)$.

Опорные точки: $t_0=-\dfrac{3}{2}$ — абсцисса вершины; $y_0=-\dfrac{49}{4}$ — ордината вершины; $t_1=-5$, $t_2=2$ — абсциссы точек пересечения с осью Ot; $y(0)=-10$ — ордината точки пересечения с осью Oy; $y(1)=-6$. Как следует из рис. 1.20, искомым множеством значений является множество $[-6;+\infty)$.

Количество целых чисел из множества $[-6;+\infty)$, не превышающих 10, равно 17.

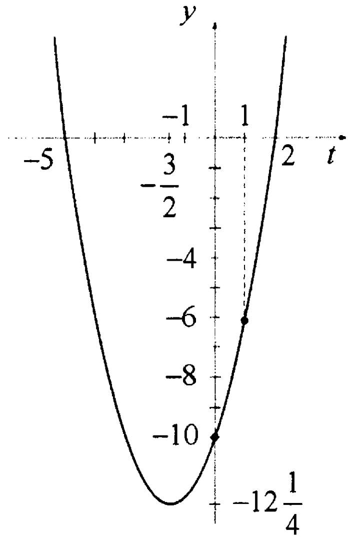


Рис. 1.20

Задача 6. Найти промежутки убывания функции $y=\left|\log_2\left|\dfrac{x-4}{2,5}\right|\right|$.

Решение. Найдем ответ на поставленный в условии задачи вопрос с помощью эскиза графика заданной функции. Запишем эту функцию так: $y=\left|\log_2\dfrac{2}{5}|x-4|\right|$.

Теперь построим последовательно эскизы графиков $y_1=\log_2 x$, $y_2=\log_2|x|$, $y_3=\log_2\left(\dfrac{2}{5}|x|\right)$, $y_4=\left|\log_2\left(\dfrac{2}{5}|x|\right)\right|$, $y_5=\left|\log_2\dfrac{2}{5}|x-4|\right|$ (рис. 1.21).

Итак, промежутками убывания исходной функции, как видно из эскиза ее графика, являются $(-\infty;\ 1,5]$ и $(4;\ 6,5]$.

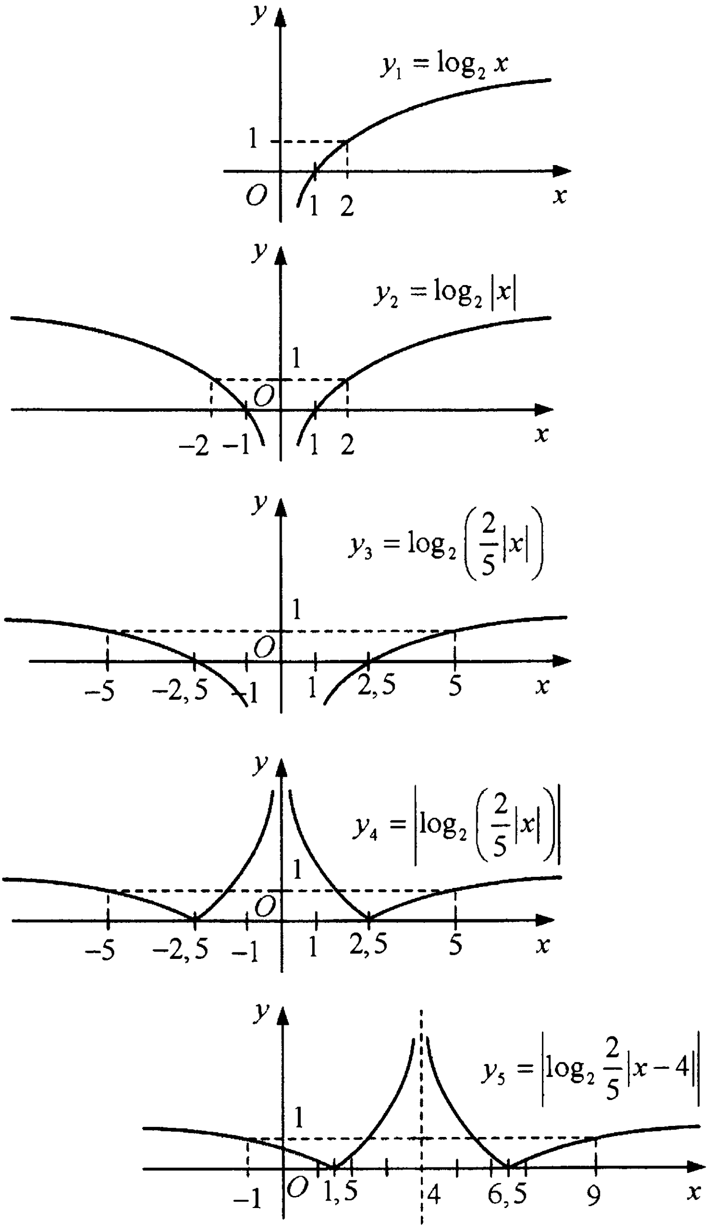

$y_1 = \log_2 x$
$y_2 = \log_2 |x|$
$y_3 = \log_2 \left(\frac{2}{5} |x| \right)$
$y_4 = \left| \log_2 \left(\frac{2}{5} |x| \right) \right|$
$y_5 = \left| \log_2 \frac{2}{5} |x - 4| \right|$
y
x
O
1
2
−1
−2
−5
−2,5
2,5
5
1,5
4
6,5
9

Рис. 1.21

Задача 7. Для каких из приведенных далее функций 1–5 точка $x_0=-2$ является точкой максимума:

1) $y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+1$; 2) $y=\sin\frac{3\pi x}{4}$; 3) $y=3-(x+2)^6$;

4) $y=3x^2+13x-3$; 5) $y=\log_{0,3}(x+2)$?

Решение. Функция 5 отпадает сразу, поскольку точка $x_0=-2$ не входит в ее область определения. Отпадает и функция 4, поскольку ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх, значит, такая парабола не имеет точек максимума. Ветви параболы 1 направлены вниз, и абсцисса ее вершины равна -2. Поэтому $x_0=-2$ — ее точка максимума.

Так как $3-(x+2)^6<0$ для всех x, отличных от -2, но причем $3-(x+2)^6=0$ при $x=-2$, то $x_0=-2$ является точкой максимума функции 3.

И наконец, графиком функции 2 является синусоида, изменяющаяся периодически от -1 до 1. Поэтому в точках максимума эта функция равна 1. Поскольку $y(-2)=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$, то $x_0=-2$ — ее точка максимума.

Итак, для функций 1–3 точка $x_0=-2$ является точкой максимума, а для функций 4, 5 — нет.

Задача 8. Известно, что функция $y=f(x)$ имеет наименьший положительный период T, не превосходящий 10. Найти этот период T по следующему фрагменту графика функции $y=f(x)$ (рис. 1.22).

Решение. Фрагмент задан на отрезке $[-3;\ 7]$. Рассмотрим значение функции f при $x=-3\in[-3;\ 7]$. Поскольку $f(-3)=2$, то в соответствии с определением периода T функции f должно выполняться равенство $f(-3+T)=2$. Как видно из графика, функция f принимает значение 2 только при $x\in\{-3;\ 2;\ 5\}$. Поэтому искомый период T равен либо $2-(-3)=5$, либо

$5-(-3)=8$. Проверим оба эти числа, взяв еще одну точку из отрезка $[-3;\ 7]$, например, $x=-2$, в которой функция f принимает значение 0. Вычислим $f(-2+5)=f(3)\neq 0$, значит, число 5 периодом данной функции не является. Вычислим $f(-2+8)=f(6)=0$. Значит, $T=8$.

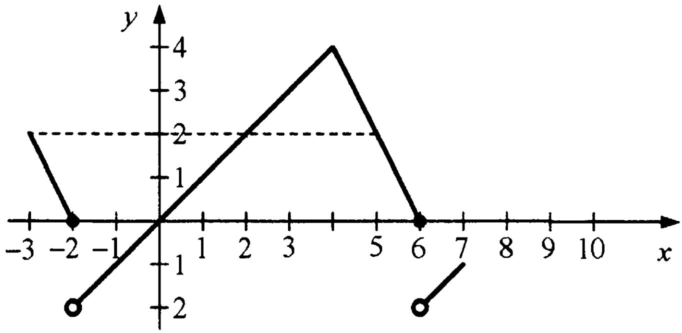


Рис. 1.22

Если прямая, проходящая через две точки $A(x_0;\ y_0)$ и $B(x_1;\ y_1)$, является касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $A(x_0;\ y_0)$ (рис. 1.23), то $\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=f'(x_0)=k$, где $y_0=f(x_0)$, k — **угловой коэффициент касательной**. При этом уравнение касательной можно представить в виде $\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{y_1-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

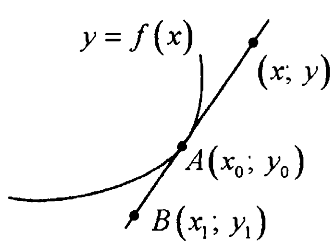


Рис. 1.23

Задача 9. Составить уравнения касательных к графику функции $f(x)=x^2-4x+3$, проходящих через точку $B(2;\ -5)$ (рис. 1.24).

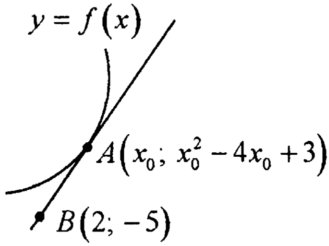


Рис. 1.24

Решение. Заметим, что точка $B(2;\ -5)$ не принадлежит данному графику. Обозначим координаты точки касания A через $(x_0;\ f(x_0))$, где $f(x_0)=x_0^2-4x_0+3$.

Поскольку угловой коэффициент k искомой касательной можно вычислить по формуле $k=f'(x_0)=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, где $(x_1;\ y_1)=(2;\ -5)$ — координаты точки B, $f'(x)=2x-4$, $f'(x_0)=2x_0-4$, то для определения x_0 получаем уравнение

$$2x_0-4=\frac{-5-\left(x_0^2-4x_0+3\right)}{2-x_0},$$

откуда
$$\left[\begin{array}{l} x_0=0; \\ x_0=4. \end{array}\right.$$

При $x_0=0$ получаем уравнение одной касательной: $y=-5-4(x-2) \Leftrightarrow y=-4x+3$. При $x_0=4$ получаем уравнение другой касательной: $y=-5+4(x-2) \Leftrightarrow y=4x-13$.

Задача 10. К гиперболе $xy=14$ в точке $B(-2;\ -7)$ проведена касательная. Найти: 1) площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат; 2) сумму координат центра окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Напишем уравнение касательной к гиперболе $xy = 14$ в указанной точке $B(-2;\ -7)$. Итак, $x_0 = -2$, $y(x_0) = -7$, $y(x) = \frac{14}{x}$, $y'(x) = -\frac{14}{x^2}$, $y'(x_0) = -\frac{7}{2}$. Следовательно, искомое уравнение касательной имеет вид:

$$y = -7 - \frac{7}{2}(x+2) \Leftrightarrow y = -14 - \frac{7}{2}x.$$

1. Найдем теперь длины отрезков, отсекаемых этой касательной от координатных осей, — это будут катеты прямоугольного треугольника искомой площади.

   Координаты точки A пересечения касательной с осью абсцисс являются решением системы:

$$\begin{cases} y = -14 - \frac{7}{2}x; \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4; \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(-4;\ 0).$$

   Катет AO, где O — начало координат, имеет длину 4. Аналогично находим координаты точки C пересечения касательной с осью ординат:

$$\begin{cases} y = -14 - \frac{7}{2}x; \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow C(0;\ -14).$$

   Таким образом, катет OC имеет длину 14. Площадь ΔAOC равна $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 14 = 28$.

2. Используем результаты задачи из пункта 1. Нами уже найдены точки $A(-4;\ 0)$ и $C(0;\ -14)$. Как известно из планиметрии, центр окружности, описанной около произвольного прямоугольного треугольника, лежит на середине его гипотенузы. Гипотенузой ΔAOC является отрезок AC, координаты концов которого известны. Тогда координаты середины M отрезка AC можно найти по формулам:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+0}{2} = -2;\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0-14}{2} = -7;$$

$$x_M + y_M = -9.$$

Легко увидеть, что центр описанной окружности M совпадает с точкой B, в которой была проведена касательная (рис. 1.25). Это совпадение не случайно: оно выражает одно из характеристических свойств гиперболы.

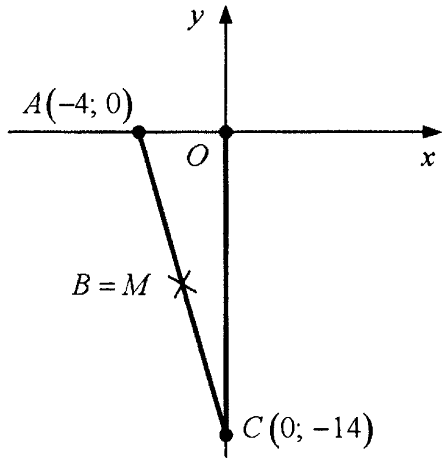


Рис. 1.25

Как мы уже видели, нахождение интервалов монотонности, множества значений, а также наибольшего (наименьшего) значения функции очень тесно связано с построением ее графика. Однако если функция непрерывна на отрезке, то она достигает наибольшего и наименьшего значения либо в **критических точках** (в точках, где производная равна нулю или не существует), принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка. В этих случаях построения графика можно избежать благодаря следующему алгоритму нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f, непрерывной на отрезке $[a;\ b]$.

1. Найти $f'(x)$.

2. Найти критические точки функции $f(x)$, принадлежащие отрезку $[a;\ b]$, т. е. решить систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f'(x) \text{ не существует;} \\ f'(x)=0; \end{array}\right. \\ x\in[a;\ b]. \end{cases}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — решения этой системы.

3. Вычислить $f(x_1),\dots,f(x_k)$, $f(a)$, $f(b)$. Среди полученных значений выбрать наибольшее M и наименьшее m, т. е.

$$M=\max\{f(x_1),\dots,f(x_k),f(a),f(b)\},$$

$$m=\min\{f(x_1),\dots,f(x_k),f(a),f(b)\}.$$

Они являются наибольшим и наименьшим значениями функции f на отрезке $[a;\ b]$.

Полезна также следующая **теорема**: если $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то она принимает на этом отрезке любые значения, лежащие между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на $[a;\ b]$.

Задача 11. Найти множество значений функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ на промежутке $[-3;\ 4]$.

Решение. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то ее множество значений $E(f)$ на промежутке $[-3;\ 4]$ совпадает с отрезком $[a;\ b]$, где a — наименьшее значение $f(x)$ на промежутке $[-3;\ 4]$, b — наибольшее значение $f(x)$ на промежутке $[-3;\ 4]$. Найдем a и b.

Так как $f'(x)=x^2-2x-3$, то критические точки, принадлежащие промежутку $[-3;\ 4]$, находятся так:

$$\begin{cases} f'(x)=0; \\ x\in[-3;\ 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0; \\ x\in[-3;\ 4] \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Вычислим значения функции $f(x)$ в критических точках и на концах промежутка $[-3;\ 4]$: $f(3)=-8$, $f(-1)=\dfrac{8}{3}$, $f(-3)=-8$, $f(4)=-\dfrac{17}{3}$. Следовательно, $a=-8$, $b=\dfrac{8}{3}$, и значит, $E(f)=\left[-8;\ \dfrac{8}{3}\right]$.

Задача 12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{3}{2}\ln x + \left|x^2 + 2x - 3\right|$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$.

Решение. Сначала раскроем модуль на данном отрезке. Подмодульное выражение $x^2 + 2x - 3$ обращается в нуль при $x \in \{-3;\ 1\}$. Точка $x = 1$ принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$. Значит, при $x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right]$ $\left|x^2 + 2x - 3\right| = -\left(x^2 + 2x - 3\right)$, а при $x \in [1;\ 4]$ $\left|x^2 + 2x - 3\right| = x^2 + 2x - 3$.

Рассмотрим теперь две задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке и решим их.

1. $y_1(x) = \frac{3}{2}\ln x - \left(x^2 + 2x - 3\right)$, $x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right]$.

2. $y_2(x) = \frac{3}{2}\ln x + x^2 + 2x - 3$, $x \in [1;\ 4]$.

Затем из двух найденных наименьших (наибольших) значений выберем меньшее (большее).

Итак:

1. $y_1'(x) = \frac{3}{2x} - (2x + 2)$;

$$\begin{cases} y_1'(x) = 0; \\ x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - 4x^2 - 4x}{2x} = 0; \\ x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x - 3 = 0; \\ x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2}; \\ x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \\ x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Вычислим значение функции $y_1(x)$ в точках $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$:

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - 3\right) = -\frac{3}{2}\ln 2 + 1\frac{3}{4} = -1{,}5\ln 2 + 1{,}75;$$

$$y_1(1) = 0 - (1 + 2 - 3) = 0.$$

Сравним полученные два числа:

$-1{,}5\ln 2 + 1{,}75 \vee 0 \Leftrightarrow 1{,}75 \vee 1{,}5\ln 2 \Leftrightarrow \ln e^{1,75} \vee \ln 2^{1,5} \Leftrightarrow e^{1,75} \vee 2^{1,5}$.

Здесь символ $\vee$ соответствует любому из символов сравнения — $>, <, =, \le, \ge$.

Поскольку $e > 2$ и $1{,}75 > 1{,}5$, то $e^{1,75} > 2^{1,5} \Leftrightarrow -1{,}5\ln 2 + 1{,}75 > 0$. Следовательно, наименьшее значение функции $y_1(x)$ равно $y_1(1) = 0$, а наибольшее значение $y_1(0{,}5) = -1{,}5\ln 2 + 1{,}75$.

2. $y_1'(x) = \dfrac{3}{2x} + (2x + 2)$;

$$\begin{cases} y_2'(x) = 0; \\ x \in [1;\ 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3 + 4x^2 + 4x}{2x} = 0; \\ x \in [1;\ 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x + 3 = 0; \\ x \in [1;\ 4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Поскольку критических точек функция $y_2(x)$ на отрезке $[1;\ 4]$ не имеет, то остается вычислить $y_2(4)$ и $y_2(1)$: $y_2(4) = 3\ln 2 + 21$, $y_2(1) = y_1(1) = 0$. Очевидно, что $y_2(4)$ — наибольшее, а $y_2(1)$ — наименьшее значение функции $y_2(x)$ на отрезке $[1;\ 4]$.

Окончательно получаем: наименьшее значение исходной функции $y(x) = \frac{3}{2}\ln x + \left|x^2 + 2x - 3\right|$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$ равно $y(1) = 0$, а наибольшее значение равно $y(4) = 3\ln 2 + 21$.

Графический метод предполагает умение распознавать уравнения окружности, ломаной, квадрата, ромба и т. д. Поэтому решим несколько задач, в которых тем или иным способом, задействованы основные фигуры для построения.

Напомним, что уравнение $ax+by+c=0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля, задает **прямую** на плоскости. Две пересекающиеся прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ делят плоскость на четыре области, причем неравенству $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\ge 0$ удовлетворяют все точки двух несмежных областей из этих четырех. Чтобы установить, какая пара из двух несмежных областей задается неравенством $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\ge 0$, достаточно проверить это неравенство для какой-либо точки $(x_0;\ y_0)$, взятой внутри этих областей.

Уравнение $x^2+y^2=R^2$ определяет **окружность** с радиусом $|R|$ и центром в начале координат, тогда как уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ определяет окружность того же радиуса с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

Уравнение $|x|+|y|=a$ (где $a>0$) задает на плоскости **ломаную**, являющуюся контуром квадрата с центром в точке $O(0;\ 0)$ и диагональю длиной $2a$, который расположен на плоскости так, как показано на рис. 1.26. Убедиться в этом можно, раскрыв модули в данном уравнении (в каждой координатной четверти с соответствующими знаками).

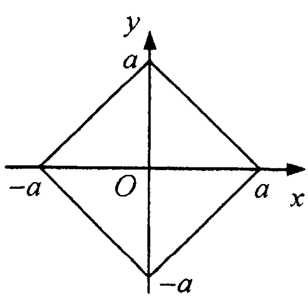


Рис. 1.26

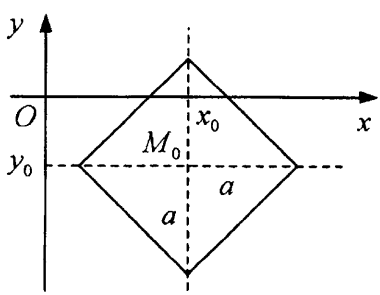


Рис. 1.27

Аналогично уравнение $|x-x_0|+|y-y_0|=a$ $(a>0)$ определяет контур **квадрата** с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ и длиной диагонали $2a$ (рис. 1.27).

Задача 13. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y_1=|x-3|$ и $y_2=4-|x-5|$.

Решение. Построим заданные графики. График функции $y_1=|x-3|$ получается из графика функции $y=|x|$ параллельным переносом его на 3 единицы вправо вдоль оси Ox. График функции $y_2=4-|x-5|$ получается из графика функции $y=-|x|$ параллельным переносом на 5 единиц вправо вдоль оси Ox, а затем — на 4 единицы вверх вдоль оси Oy. Изобразим оба графика на одном чертеже (рис. 1.28).

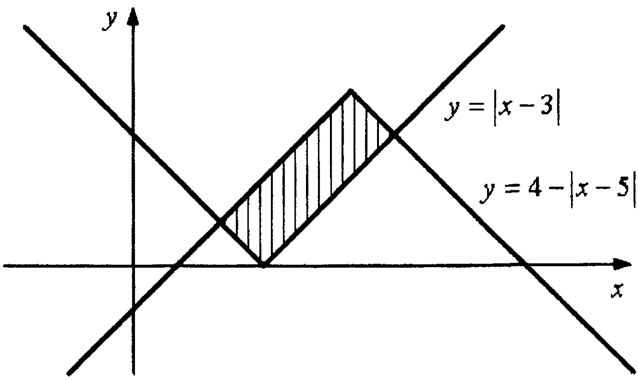


Рис. 1.28

Как видно из рис. 1.28, искомой фигурой является прямоугольник, длины сторон которого равны $a=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ (a — гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 3; b — гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1). Таким образом, площадь прямоугольника равна $ab=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$.

Множество всех решений системы неравенств с двумя переменными x, y можно графически интерпретировать, как область на координатной плоскости, состоящую из всех точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют данной системе неравенств. Границы этой области задаются уравнениями, которые получаются из неравенств системы заменой знаков $\geq$, $\leq$ знаком $=$.

Задача 14. Найти площадь фигуры, состоящей из всех точек $(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}(x+3y)(x-4y)\geq 0;\\ -13\leq x\leq -1.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим уравнение $(x+3y)(x-4y)=0$. Оно задает две прямые $x=-3y$ и $x=4y$, которые пересекаются в точке в начале координат.

Изобразим теперь множество точек плоскости, удовлетворяющих исходной системе неравенств (рис. 1.29).

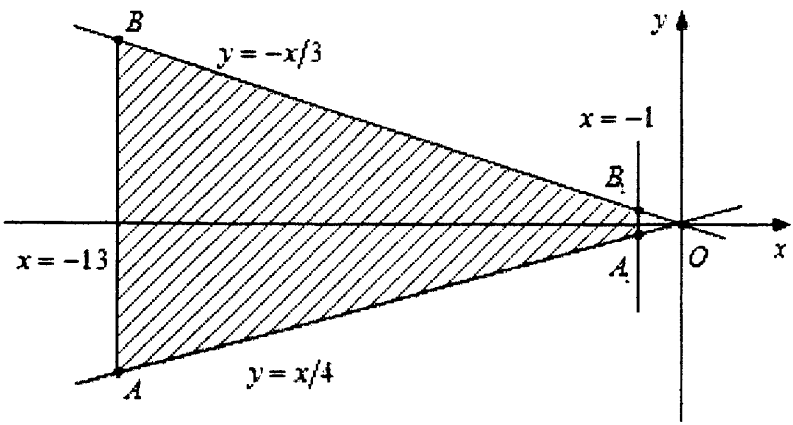


Рис. 1.29

Искомой фигурой является трапеция ABB_1A_1, площадь которой вычислим как разность площадей треугольников ABO и A_1B_1O. Для этого найдем координаты точек A, B, A_1, B_1.

$$A:\begin{cases}x=-13;\\ y=\dfrac{x}{4}\end{cases}\Leftrightarrow A\left(-13;\ -\frac{13}{4}\right).$$

$$B:\begin{cases}x=-13;\\ y=-\dfrac{x}{3}\end{cases}\Leftrightarrow B\left(-13;\ \frac{13}{3}\right).$$

$$A_1:\begin{cases}x=-1;\\ y=\dfrac{x}{4}\end{cases}\Leftrightarrow A_1\left(-1;\ -\frac{1}{4}\right).$$

$$B_1:\begin{cases}x=-1;\\ y=-\dfrac{x}{3}\end{cases}\Leftrightarrow B_1\left(-1;\ \frac{1}{3}\right).$$

Находим площадь S_1 треугольника ABO:

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h_1=\frac{1}{2}(y_B-y_A)\cdot 13=\frac{91}{12}\cdot\frac{13}{2}=\frac{1183}{24}.$$

Находим площадь S_2 треугольника A_1B_1O:

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot|A_1B_1|\cdot h_2=\frac{1}{2}(y_{B_1}-y_{A_1})\cdot 1=\frac{7}{24}.$$

Искомая площадь трапеции ABB_1A_1 равна $S_1-S_2=49$.

Задача 15. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases}x\ge 1+|y|;\\ x\le 6-4|y|.\end{cases}$$

Решение. Границы искомой фигуры задаются уравнениями $x=1+|y|$ и $x=6-4|y|$. Рассмотрим отдельно два случая.

1. При $y\ge 0$ $x=1+y$, $x=6-4y$, т. е. границы искомой фигуры задаются лучами

$$\begin{cases}y=x-1;\\ y\ge 0\end{cases}\text{ и }\begin{cases}y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2};\\ y\ge 0\end{cases}\text{ (рис. 1.30).}$$

2. При $y \le 0$ $x = 1 - y$, $x = 6 + 4y$, т. е. границы искомой фигуры задаются лучами

$$\begin{cases} y = 1 - x; \\ y \le 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}; \\ y \le 0 \end{cases} \text{ (рис. 1.30).}$$

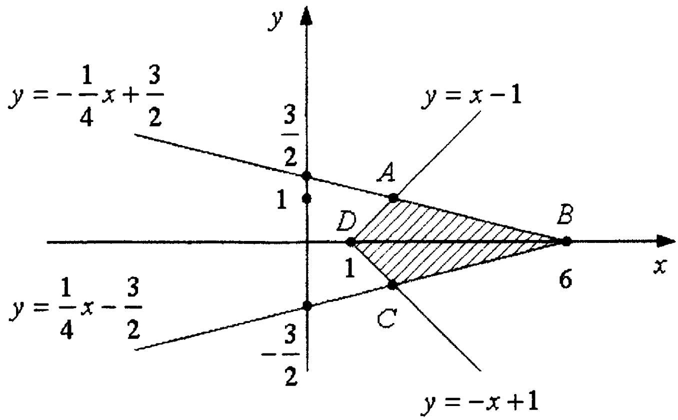


Рис. 1.30

Как видно из рис. 1.30, все четыре луча ограничивают фигуру, являющуюся четырехугольником $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. Найдем координаты его вершин:

$$A: \begin{cases} y = x - 1; \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2;\ 1);$$

$$C: \begin{cases} y = -x + 1; \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow C(2;\ -1);$$

$$D: \begin{cases} y = x - 1; \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(1;\ 0);$$

$$B: \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}; \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6; \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6;\ 0).$$

Отсюда длины диагоналей четырехугольника $ABCD$ равны $|AC| = 2$, $|BD| = 5$. Площадь $ABCD$ равна полупроизведению его диагоналей: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$.

Задача 16. Дана система неравенств:

$$\begin{cases} |x| + |y| \le 3; \\ x^2 + y^2 \ge 3(2y - 2x - 3); \\ (2x + y - 3)(x + 5y + 3) \le 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты которой удовлетворяют всем трем неравенствам системы.

Решение. Перепишем второе неравенство так: $(x+3)^2 + (y-3)^2 \ge 9$. На координатной плоскости оно задает область, которая получается «вырезанием» круга с центром в точке $P(-3; 3)$ и радиусом 3.

Неравенство $|x| + |y| \le 3$ задает внутренность квадрата с вершинами в точках $A(-3; 0)$, $B(0; 3)$, $C(3; 0)$, $D(0; -3)$. Таким образом, система

$$\begin{cases} |x| + |y| \le 3; \\ (x+3)^2 + (y-3)^2 \ge 9 \end{cases}$$

задает область, заштрихованную на рис. 1.31.

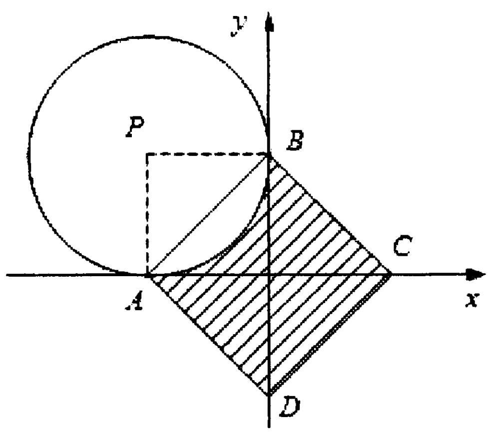


Рис. 1.31

Рассмотрим теперь уравнение $(2x+y-3)(x+5y+3)=0$. Оно задает две прямые $y=-2x+3$ и $x=-5y-3$, которые пересекаются в точке $K(2;-1)$ и проходят через точки B и A соответственно. Заметим, что K лежит на CD.

Эти прямые $2x+y-3=0$ и $x+5y+3=0$ делят плоскость на 4 области. И так как точка $(0;0)$ удовлетворяет неравенству $(2x+y-3)(x+5y+3)\le 0$, то все точки, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, заполняют две несмежные области, заштрихованные на рис. 1.32.

Итак, система неравенств из условия задачи задает область, заштрихованную на рис. 1.33.

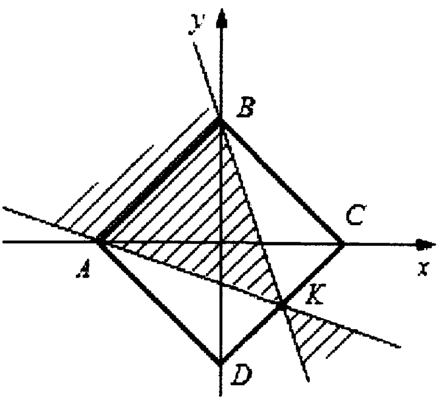


Рис. 1.32

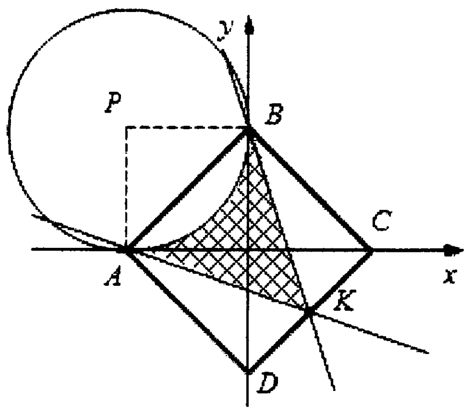


Рис. 1.33

Найдем ее площадь. Пятиугольник $APBCD$ состоит из 5 равных треугольников, суммарная площадь которых равна $5\cdot\frac{9}{2}=\frac{45}{2}$. Площадь сектора PBA равна $\frac{9\pi}{4}$, суммарная площадь треугольников AKD и BCK равна половине площади квадрата $ABCD$, т. е. 9. Отсюда искомая площадь равна $\frac{45}{2}-9-\frac{9\pi}{4}=\frac{54-9\pi}{4}$.

Задача 17. Найти все значения a, при которых окружности $(x+1-2a)^2+(y-1+5a)^2=4a^2$ и $(x+2)^2+(y-6)^2=1$ имеют ровно одну общую точку.

Решение. Первое уравнение задает окружность с центром в точке $O(2a-1;\,-5a+1)$ и радиусом $2|a|$, второе уравнение задает окружность с центром в точке $P(-2;\,6)$ и радиусом 1. По условию эти окружности должны касаться. При внутреннем касании $|OP|=\left|2|a|-1\right|$, а при внешнем касании $|OP|=\left|2|a|+1\right|$, где $|OP|$ — расстояние между центрами окружностей. В итоге задача сводится к решению уравнения $\sqrt{(2a+1)^2+(-5a-5)^2}=\left|2|a|\pm 1\right|$. Возведя обе части в квадрат, получим: $(2a+1)^2+25(a+1)^2=\left(2|a|\pm 1\right)^2$. Заметим, что правая часть может иметь вид $(2a+1)^2$ или $(2a-1)^2$. В первом случае уравнение $a=-1$, во втором случае $a=\dfrac{-29\pm 6\sqrt{6}}{25}$.

Задача 18. Дана система неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{16x^4-y^4}{6}}\ge xy;\\[2mm] y^2+25\ge 10y+\dfrac{1}{4}x^2;\\[2mm] x^2+y^2+10x\le 0.\end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты которой удовлетворяют всем трем неравенствам системы.

Решение. Второе неравенство запишем в виде $(y-5)^2\ge\dfrac{1}{4}x^2$ или $\left(y-\dfrac{1}{2}x-5\right)\left(y+\dfrac{1}{2}x-5\right)\ge 0$. На координатной плоскости оно задает две несмежные области, которые образуют прямые $y=\dfrac{1}{2}x+5$ и $y=-\dfrac{1}{2}x+5$, пересекающиеся в точке $(0;5)$ (рис. 1.34).

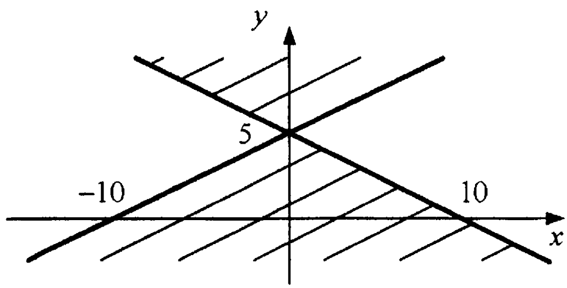


Рис. 1.34

Третье неравенство запишем в виде $(x+5)^2+y^2\le 25$. Оно задает круг с центром в точке $P(-5;0)$ и радиусом 5. Поэтому система неравенств

$$\begin{cases}(y-5)^2\ge\dfrac{1}{4}x^2;\\(x+5)^2+y^2\le 25\end{cases}$$

задает заштрихованную область на рис. 1.35.

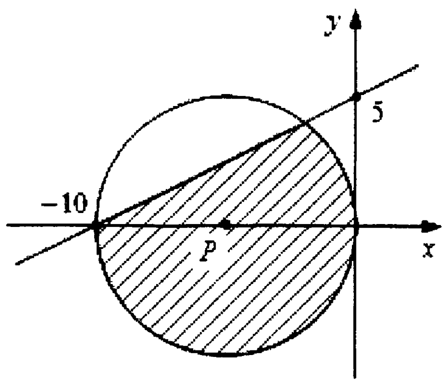


Рис. 1.35

Очевидно теперь, что неравенство $\sqrt{\dfrac{16x^4-y^4}{6}}\ge xy$ достаточно рассмотреть для случаев

$$\begin{cases}x<0;\\y>0\end{cases}\text{ и }\begin{cases}x<0;\\y<0.\end{cases}$$

1. Пусть $x<0$, $y>0$. Тогда

$$\sqrt{\frac{16x^4-y^4}{6}}\geq xy \Leftrightarrow \left(4x^2-y^2\right)\left(4x^2+y^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2|x|\geq|y|\ \Leftrightarrow\ y\leq -2x.$$

Прямая $y=-2x$ проходит через начало координат и точку $A(-2;\,4)$, лежащую на окружности $(x+5)^2+y^2=25$, а неравенство $y\leq -2x$ задает полуплоскость, содержащую центр этой окружности.

2. Пусть $x<0$, $y<0$. Тогда

$$\sqrt{\frac{16x^4-y^4}{6}}\geq xy\ \Leftrightarrow\ 16x^4-y^4\geq 6x^2y^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(y^2+8x^2\right)\left(y^2-2x^2\right)\leq 0\ \Leftrightarrow |y|\leq\sqrt{2}|x|\ \Leftrightarrow\ y\geq\sqrt{2}x.$$

Это неравенство задает полуплоскость, содержащую центр окружности $(x+5)^2+y^2=25$, прямая $y=\sqrt{2}x$ проходит через начало координат O и пересекает окружность в точке $C\left(-\frac{10}{3};\,-\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$.

Итак, искомая фигура изображена заштрихованной областью на рис. 1.36. Найдем ее площадь.

Так как ордината точки A равна 4, то площадь треугольника BAO равна $\frac{4\cdot 10}{2}=20$.

Обозначим через α угол POC. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$ и угол BPC равен $2\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Площадь сектора BPC равна $\frac{2\alpha}{2\pi}\cdot 25\pi=25\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Площадь треугольника CPO равна $\frac{25}{2}\cdot\sin\left(180^\circ-2\alpha\right)=\frac{25}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{25\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $25\operatorname{arctg}\sqrt{2}+20+\frac{25\sqrt{2}}{3}$.

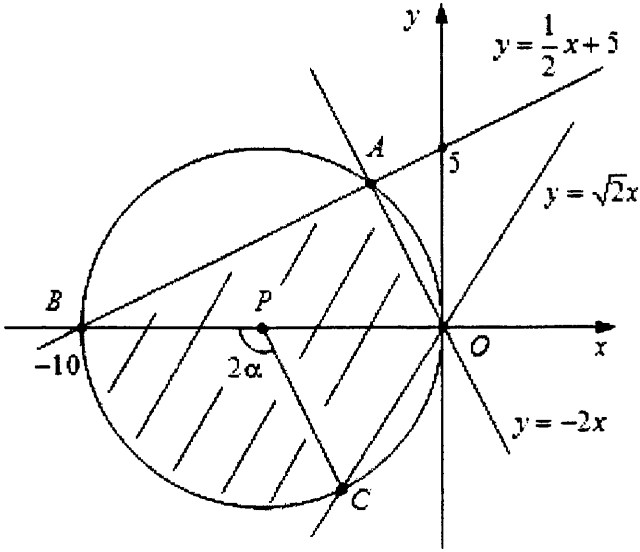


Рис. 1.36

Задача 19. Найти: 1) для каждого значения параметра $a\in[-\pi;\,0]$ максимальное значение b функции $f(x,\,y)=x(x+1)+y(y-6)$ на множестве точек $(x,\,y)$ таких, что $g(x,y)=x^2+y^2-4(x\cos a+y\sin a)\le 0$; 2) значения параметра $a\in[-\pi;\,0]$, при которых b достигает своего максимума.

Решение.

1. Преобразуем функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$:

$$f(x,\,y)=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-6y+9\right)-9=$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2-\frac{37}{4};$$

$$g(x,\,y)=\left(x^2-4x\cos a+4\cos^2 a\right)+\left(y^2-4y\sin a+4\sin^2 a\right)-4=$$

$$=(x-2\cos a)^2+(y-2\sin a)^2-4.$$

Итак, неравенство $g(x,y)\le 0$ задает круг Кр$(P,\,2)$ с центром в точке $P(2\cos a;\,2\sin a)$ радиусом 2.

Предположим, что функция $f(x,y)$ принимает наибольшее значение b на множестве точек (x,y), принадлежащих кругу $\text{Кр}(P,2)$. Тогда $f(x,y)=b \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=b+\frac{37}{4}$, т. е. уравнение $f(x,y)=b$ задает окружность $\text{Окр}(A,r(b))$ с центром $A\left(-\frac{1}{2};3\right)$ и радиусом $r(b)=\sqrt{b+\frac{37}{4}}$, имеющую точки пересечения с кругом $\text{Кр}(P,2)$.

Но ввиду максимально возможного значения b, радиус $r(b)$ должен быть наибольшим, что возможно, только если окружность $\text{Окр}(A,r(b))$ пересекает круг $\text{Кр}(P,2)$ в наиболее удаленной от A точке. Этой точкой является точка B, лежащая на линии центров AP и являющаяся точкой внутреннего касания окружности $\text{Окр}(A,r(b))$ и круга $\text{Кр}(P,2)$ (рис. 1.37).

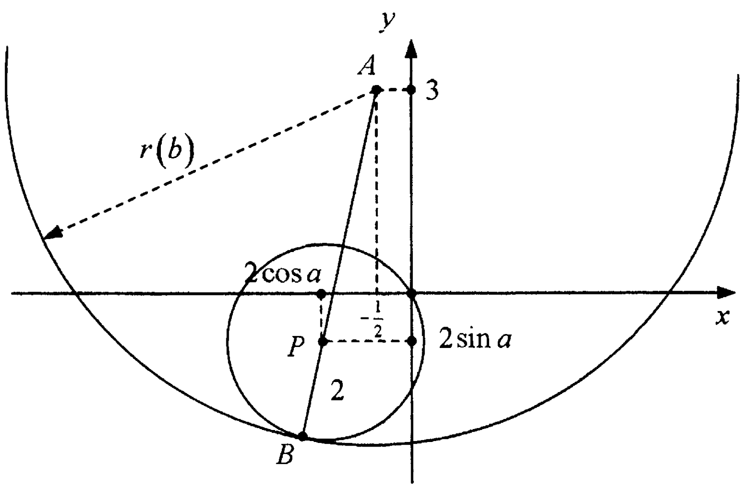


Рис. 1.37

Поэтому

$$r(b)=|AP|+|PB|=\sqrt{\left(2\cos a+\frac{1}{2}\right)^2+(2\sin a-3)^2}+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{b+\frac{37}{4}}=2+\sqrt{2\cos a-12\sin a+\frac{53}{4}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\left(2+\sqrt{2\cos a-12\sin a+\frac{53}{4}}\right)^2-\frac{37}{4}.$$

2. Из предыдущих рассуждений ясно, что $r(b)$ определяется величиной $|AP|$ — расстоянием между A и P. Поэтому b достигает своего максимума там, где это расстояние наибольшее. Точка $P(a)$ находится на расстоянии $\sqrt{4\cos^2 a+4\sin^2 a}=2$ от начала координат O, не зависящем от параметра a. Поэтому если a пробегает все значения от $-\pi$ до 0, то $P(a)$ — центр круга Кр$(P, 2)$ — пробегает полуокружность Полуокр$(O, 2)$ с центром в O и дугой CD, где $C(-2;0)$, $D(2;0)$. Очевидно, что $|AP|$ будет наибольшим, если AP содержит центры окружности Окр$(A, r(b))$ и полуокружности Полуокр$(O, 2)$, т. е. AP проходит через начало координат (рис. 1.38).

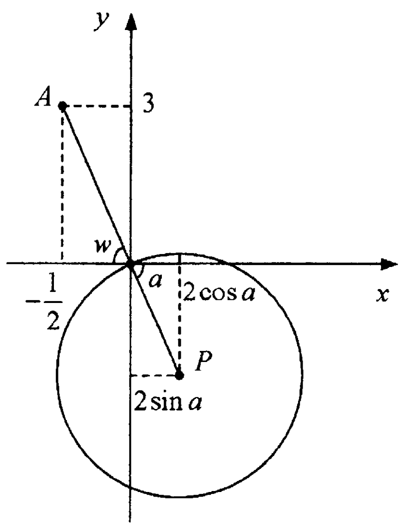


Рис. 1.38

Так как $\operatorname{tg} w = 3 : \frac{1}{2} = 6 = |\operatorname{tg} a|$, то $a = -\operatorname{arctg} 6$.

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{53}{4} + 2\cos a - 12\sin a} + 2\right)^2 - \frac{37}{4}$; $-\operatorname{arctg} 6$.

§ 1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти НОД$(524, 836)$ с помощью алгоритма Евклида.

2. Остаток от деления натурального числа x на 17 равен 8, остаток от деления x на 13 равен 7. Найти остаток от деления наименьшего из возможных чисел x на 25.

3. Дано число $3^{2002} + 13^{2002}$. Найти его последнюю цифру и остаток от деления на 11.

4. Упростить: $\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{6 + \sqrt{2}}}{\sqrt{6 - \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{17}{2}}$.

5. Вычислить: $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt[3]{\frac{10 + 7\sqrt{2}}{10 - 7\sqrt{2}}}$.

6. Вычислить выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}y + a} + \frac{2a}{7y^2 - a^2}\right) : \frac{1}{7y^2 - \sqrt{7}ay} - \sqrt{7} + 3,$$

если $a = 3{,}5$, $y = 1 + \sqrt{7}$.

7. Какой цифрой оканчивается число $43^{43} - 105^{105}$?

8. Найти двузначное число, квадрат которого записывается четырьмя цифрами 0, 2, 3, 5.

9. Найти число вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, если его произведение с числом $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ равно 7. В ответ записать сумму $a + b$.

10. Найти x из пропорции $0{,}875 : 0{,}(777) = x : 3{,}1(6)$.

Найти значение выражения (**11–16**).

11. $\dfrac{5-1{,}6\cdot\dfrac{5}{8}}{\left(4\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{3}\right)^2\left(25^{\frac{1}{3}}+15^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}\right)^2}.$

12. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}.$

13. $\dfrac{a-\dfrac{16}{25}}{\sqrt{a}-0{,}8}-\dfrac{a\sqrt{a}-\dfrac{64}{125}}{a+0{,}8\sqrt{a}+\dfrac{16}{25}}.$

14. $\dfrac{\left(3\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{2}\right)^3\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)^3}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2\left(7\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)^2}.$

15. $\dfrac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$

16. $\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}.$

17. Сократить дроби:

1) $\dfrac{a-7}{a-2\sqrt{7a}+7}$; 2) $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[3]{c}}$; 3) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Упростить выражение (**18–21**).

18. $\dfrac{m^{-6}-64}{16+4m^{-2}+m^{-4}}\cdot\dfrac{1}{4-4m^{-1}+m^{-2}}-\dfrac{4m^2(2m+1)}{1-2m}.$

19. $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}.$

20. $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$

21. $\dfrac{0,7x}{0,5x-1,5\sqrt{x}}-\dfrac{0,4x-1,2\sqrt{x}}{x-6\sqrt{x}+9}$.

22. Какая цифра находится на 100-м месте после запятой в представлении числа $\sqrt{0,\underbrace{99...9}_{100}}$ в виде десятичной дроби?

23. Каким должно быть значение y_0, чтобы прямая $y=5y_0$ пересекала график функции $y=\left|-x^2-3x-2\right|$ ровно три раза?

24. Каким должно быть значение y_0, чтобы прямая $y=\dfrac{y_0}{3}$ пересекала график функции $y=x^2-5|x|+4$ в трех различных точках?

25. График некоторой функции изображен на рис. 1.39. Какой из следующих формул может быть задана эта функция:

1) $y=-|x-1|+1$; 2) $y=|x+1|+1$; 3) $y=-|x+1|+1$;

4) $y=-|x-1|-1$; 5) $y=-|x+1|-1$?

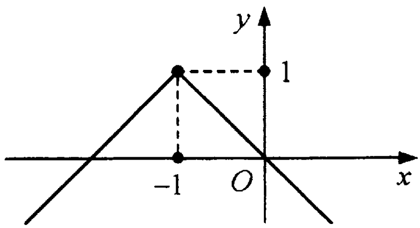


Рис. 1.39

26. Известно, что функция $y=f(x)$ имеет наименьший положительный период $T\le 17$. Найти T по следующему фрагменту графика функции $f(x)$ (рис. 1.40).

27. Определить количество целых чисел, не превосходящих 10 и принадлежащих множеству значений функции $y=5^{2x}-4\cdot 5^x-3$.

28. Найти сумму всех целых значений функции $y=5-7\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x+7|}$.

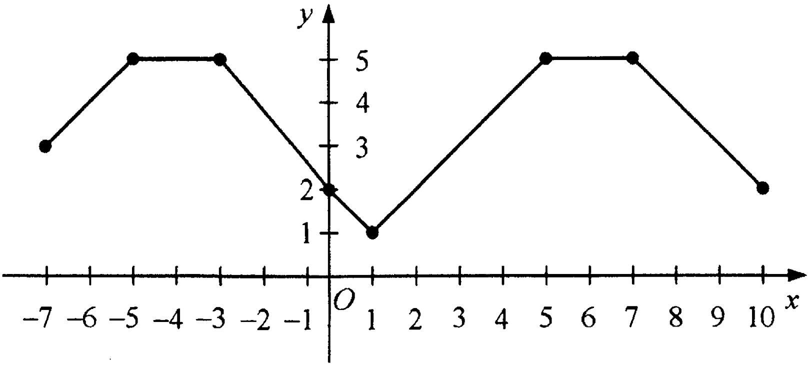


Рис. 1.40

29. Найти количество натуральных значений x из промежутка убывания функции $y=\left|\log_2\left|\dfrac{x-5}{2,5}\right|\right|$.

30. Найти произведение точек максимума функции $y=\left|(x-1)^2-6|x-1|+8\right|$.

31. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2+|2x+8|$ на отрезке $[-6;-2]$.

32. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало и полученное шестизначное число прибавили к исходному. Какие числа из промежутка [427 411; 427 434] могли получиться в результате сложения?

33. Найти наименьшее a, при котором прямая $y=x-a$ касается графика функции $y=-3x-\dfrac{1}{x}$.

34. Найти a и b, при которых парабола $y=x^2+bx+c$ касается прямой $y=-2x-1$ в точке $(0;-1)$.

35. Через точку $A(1;4)$ проходят две касательные к графику функции $y=-2-\dfrac{2}{x}$. Найти сумму абсцисс точек касания.

36. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;2)$ и касающейся кривой $y=\sqrt{x}-1$. В ответ записать ординату той точки касательной, абсцисса которой равна 12.

37. Составить уравнения общих касательных к графикам функций $y = 2x^2 + 2x + 9$ и $y = 6 - x^2$. В ответ записать меньший из угловых коэффициентов этих касательных.

38. Парабола с вершиной на оси Ox касается в точке A прямой, проходящей через точки $A(-1; -1)$ и $B(4; 4)$. Найти абсциссу вершины параболы.

39. На оси Oy найти точку, из которой можно провести две перпендикулярные касательные к графику функции $y = x^2 - 5x + 4$. В ответ записать ординату этой точки.

40. Найти a и b, при которых прямые $y = x$, $y = -x + 1$ касаются кривой $y = x^2 + ax + b$.

Найти площадь фигуры, заданной на плоскости системой неравенств (**41–45**).

41. $\begin{cases} x \geq -4 + |y+4|; \\ x \leq 8 - 5|y+4|. \end{cases}$

42. $\begin{cases} (y - 6x)(y + x) \geq 0; \\ 2 \leq y \leq 8. \end{cases}$

43. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4(x - |y|) \leq 0; \\ x \geq -2. \end{cases}$

44. $\begin{cases} y \leq 3 - |x+5|; \\ y \geq -1 + |x+5|. \end{cases}$

45. $\begin{cases} |x| + |y| \leq 2; \\ x^2 + y^2 \geq 4(x + y - 1); \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \leq 0. \end{cases}$

46. Дана система неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4|x|; \\ |x| + |y| \geq 2; \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \geq 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты которой удовлетворяют: 1) первому неравенству системы; 2) первым двум неравенствам системы; 3) всем трем неравенствам системы.

47. Дана система неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{xy}{15}} \geq y - 2x; \\ \dfrac{x-25}{x^2+y^2-625} > \dfrac{1}{26}. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты которой удовлетворяют обоим неравенствам системы.

48. Между числами 1 и 68,2 записано 31 неизвестное число, образующее вместе с заданными числами арифметическую прогрессию. Найти наибольшее из неизвестных чисел.

49. В арифметической прогрессии первый член равен 5, разность равна 4. Является ли число 10 091 членом этой прогрессии?

50. Известно, что в арифметической прогрессии сумма пятого и седьмого членов равна 12. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

51. В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 15. Найти шестой член.

52. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 18, сумма первых четырех ее членов равна 38, а сумма n первых членов равна 305. Найти n.

53. Между числами 3 и 384 расположены 6 чисел так, что вместе с данными числами они составляют геометрическую прогрессию. Найти большее из пропущенных чисел.

54. В геометрической прогрессии (b_n) четвертый член $b_4 = 3$. Найти произведение $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7$.

55. Найти произведение шестого и десятого членов геометрической прогрессии, если произведение пятого, восьмого и одиннадцатого членов этой прогрессии равно 64.

56. В арифметической прогрессии $a_n = 18,4 - 2,6n$. При каком количестве членов этой прогрессии их сумма (начиная с первого члена) будет наибольшей?

57. Найти сумму всех трехзначных положительных чисел, имеющих последней цифрой 5 и не кратных 11.

58. Число членов арифметической прогрессии равно $2k+1$. Известно, что сумма членов, стоящих на нечетных местах, на 15 больше суммы членов, стоящих на четных местах. Найти сумму первого и последнего членов этой прогрессии.

59. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, сумма крайних членов которой равна −49, а сумма средних членов равна 14.

60. Вычислить: $\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{5}{3^5}+\ldots+\frac{200}{3^{200}}$.

61. Пятый член арифметической прогрессии равен 4. Какой должна быть разность прогрессии, чтобы сумма квадратов второго и шестого членов была наименьшей?

62. Пусть $A=[-1;1]$, $B=(-\infty;0)$, $C=[0;2)$. Найти следующие множества: $A\cup C$, $A\cap B$, $(A\cup B)\cup C$, $(A\cup B)\cap C$, $B\cap C$.

63. В группе из 100 человек 70 знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько человек в группе не знают ни английского, ни французского языков?

64. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y_1=|x+1|$ и $y_2=|x-3|$ и осями координат.

65. Для каждого значения параметра $a\in[0;\pi]$ найти максимальное значение $g(a)$ функции $f(x,y)=x(x+2)+y(y+2)$ на множестве точек (x,y) таких, что $x^2+y^2\le 2(x\cos a+y\sin a)$. Найти также значение параметра $a\in[0;\pi]$, при котором $g(a)$ принимает наименьшее значение.

66. Найти периметр фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases}2|x+2|\cdot\arcsin(y-1)^2\le\pi(x+2);\\2|y-1|\ge x.\end{cases}$$

67. Найти длину отрезка, концы которого лежат на графике функции $f(x)=2|x^5|-9x^2-x+3+\frac{16}{x^3}+\sin(\pi|x|)$, а ось ординат является для него серединным перпендикуляром.

68. Найти середину отрезка, являющегося множеством значений функции $y=-\frac{x^3}{3}+2,5x^2+6x$, если x изменяется на $[-2;\ 1]$.

69. После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство. На перемене еще один ученик вдруг понял доказательство. Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

1) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?

2) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

70. Множество чисел назовем *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

1) Является ли множество $\{100;\ 101;\ 102;\ \ldots;\ 199\}$ хорошим?

2) Является ли множество $\{2;\ 4;\ 8;\ \ldots;\ 2^{200}\}$ хорошим?

3) Сколько хороших четырехэлементных подмножеств у множества $\{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9;\ 11;\ 12\}$?

ГЛАВА 2. Алгебраические уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

§ 2.1. Уравнения и неравенства в целых числах

Основные четыре метода решения уравнений в целых числах: выделение целой части, сведение к диафантовым линейным уравнениям, разложение на множители, последовательный спуск.

Метод выделения целой части. Пусть дано уравнение вида $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — многочлен от двух переменных с целыми коэффициентами, причем одну из переменных, скажем y, можно выразить в виде $y=\dfrac{g(x)}{ax+b}$, где $g(x)$ — целочисленный многочлен, старший коэффициент которого кратен a. В этом случае делим $g(x)$ на $ax+b$ с остатком и получаем уравнение вида $y=t(x)+\dfrac{r}{ax+b}$, где $t(x)$ — целочисленный многочлен, r — целое число. Дальше остается только перебрать все случаи делимости r на $ax+b$.

Случай, когда старший коэффициент многочлена $g(x)$ не кратен a, сводится к предыдущему, например, так: $ay=\dfrac{ag(x)}{ax+b}$.

Задача 1. Найти сумму всех таких целых значений x, при которых уравнение $8x^2+18x+9-2y-5y=0$ имеет решение в целых числах.

Решение. Представим уравнение в виде $y=\dfrac{8x^2+18x+9}{2x+5}$ и разделим уголком квадратный трехчлен $8x^2+18x+9$ на $2x+5$:

$$\begin{array}{r|l} 8x^2+18x+9 & 2x+5 \\ \cline{2-2} \underline{8x^2+20x} & 4x-1 \\ -2x+9 & \\ \underline{-2x-5} & \\ 14 & \end{array}$$

Таким образом, частное равно $4x-1$, остаток равен 14, откуда

$$8x^2+18x+9=(2x+5)(4x-1)+14.$$

Следовательно, $y=4x-1+\dfrac{14}{2x+5}$, т. е. $\dfrac{14}{2x+5}$ должно быть целым. Отсюда 14 должно быть кратно нечетному целому числу $2x+5$, а значит, возможны только следующие случаи: $2x+5=\pm1$, $2x+5=\pm7 \Rightarrow x=-2,\ x=-3,\ x=1,\ x=-6$.

Искомая сумма равна -10.

Задача 2. Найти все пары целых чисел x, y, при которых верно равенство $-3xy-10x+13y+35=0$.

Решение. Представим уравнение в виде $y=\dfrac{-10x+35}{3x-13}$. Так как старший коэффициент -10 числителя не делится на старший коэффициент 3 знаменателя, будем решать уравнение $3y=\dfrac{-30x+105}{3x-13}$.

Выделим теперь целую часть в дроби $\dfrac{-30x+105}{3x-13}$ делением $-30x+105$ на $3x-13$ с остатком: $3y=-10-\dfrac{25}{3x-13}$. Так как $\dfrac{25}{3x-13}$ должно быть целым, то 25 должно быть кратным $3x-13$, что возможно, только если $3x-13=\pm1$, $3x-13=\pm5$,

$3x-13=\pm 25$. Если еще при этом учесть, что $10+\dfrac{25}{3x-13}$ должно быть кратно 3 (правая часть $3y$ кратна 3), то из шести перечисленных возможностей остаются только три: $3x-13=-1$, $3x-13=5$, $3x-13=-25$, откуда получаем все решения: $(6;-5)$, $(4;\ 5)$, $(-4;\ -3)$.

Если уравнение $f(x,\ y)=0$ не представимо в виде $y=\dfrac{g(x)}{ax+b}$, то можно применить **метод разложения на множители**, т. е. представить уравнение в виде $g(x,\ y)\cdot t(x,\ y)=n$, где $g(x,\ y)$, $t(x,\ y)$ — целочисленные многочлены, n — целое число. Останется только перебрать все случаи делимости n на $g(x,\ y)$ и $t(x,\ y)$. При этом перебор должен быть «разумным», учитывающим различные свойства делимости и соотношения между сомножителями $g(x,\ y)$ и $t(x,\ y)$.

Задача 3. Среди всех пар натуральных чисел (x,y), разность квадратов которых равна 1992, найти пару (x,y) с минимально возможной суммой $x+y$. В ответ записать $x+y$.

Решение. По условию $1992=(x-y)(x+y)$, откуда $(x-y)(x+y)=2^3\cdot 3\cdot 83$.

Так как $x-y<x+y$, то $(x-y)^2<(x-y)(x+y)=1992$, откуда $x-y<\sqrt{1992}<45$.

Так как 83 — простое число, то $x+y$ делится на 83. Кроме того, числа $x+y$ и $x-y$ имеют одинаковую четность (оба четные или оба нечетные). Поэтому оба они должны делиться на 2, поскольку число $(x+y)(x-y)$ четное.

Итак, $x+y$ делится на взаимно простые числа 83 и 2 и, следовательно, делится на их произведение $83\cdot 2=166$. Исходя из этого, можно предположить, что минимальное значение суммы $x+y$ равно 166 (и тогда $x-y=12$). Это предположение оказывается истинным, поскольку система уравнений

$$\begin{cases} x+y=166; \\ x-y=12 \end{cases}$$

имеет решение $x=89, y=77$. Итак, $x+y=166$.

Если в уравнении $f(x, y)=0$ $f(x,y)$ — линейный многочлен от двух переменных с целыми коэффициентами, то оно называется **диофантовым линейным уравнением с двумя переменными**. Опишем метод нахождения всех решений таких уравнений, переписав это уравнение в виде $nx+ky=l$, где n,k,l — фиксированные целые числа и $\text{НОД}(|n|,|k|,|l|)=1$.

Если $\text{НОД}(|n|, |k|)>1$, то уравнение не имеет решений. Пусть $\text{НОД}(|n|, |k|)=1$. В этом случае нужно подобрать некоторое частное решение (x_0, y_0) уравнения, т. е. найти такую пару целых чисел (x_0, y_0), для которой $nx_0+ky_0=l$. Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} x=x_0+kt; \\ y=y_0-nt; \\ t \text{ — любое целое.} \end{cases}$$

Пусть, например, требуется решить уравнение $-12x+5y=3$. Так как $\text{НОД}(12, 5)=1$, то решения есть. Очевидно, пара чисел $x_0=1$, $y_0=3$ — его частное решение. Поэтому общее решение данного уравнения имеет вид: $x=1+5t$, $y=3+12t$, $t\in\mathbf{Z}$.

Следующие две задачи можно свести к решению *диофантового линейного уравнения*.

Задача 4. Подарки для детского сада, которых больше 200, но меньше 400, разложили в коробки по 6 штук. Найти число подарков, если известно, что при попытке разложить их в коробки по 9 штук 6 подарков оставались лишними, а при попытке разложить их в коробки по 7 штук 3 подарка оставались лишними.

Решение. Обозначим через a число подарков. Согласно условию, $a = 6x$, $a = 9y + 6$, $a = 7z + 3$. Поэтому имеем систему двух линейных диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} 7z + 3 = 6x; \\ 9y + 6 = 6x. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение: $3 = 6x - 7z$. Его частным решением является пара $(4, 3)$, откуда $x = 4 + 7t$, t — целочисленная переменная. Подставим найденные значения во второе уравнение: $9y + 6 = 6(4 + 7t) \Rightarrow 3y - 14t = 6$. Его частным решением является пара $(-12, -3)$, откуда $y = -12 + 14m$, m — целочисленная переменная.

Итак: $a = 9y + 6 = 9(-12 + 14m) + 6 = -102 + 126m$.

Следовательно, $200 \le -102 + 126m \le 400 \Rightarrow 302 \le 126m \le 502 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2,\ldots \le m \le 3,\ldots \Rightarrow m = 3$, $a = 276$.

Задача 5. Дано некоторое множество целых, число которых более 40, но менее 48. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8. Сколько чисел и какое наибольшее количество положительных может быть среди них?

Решение. Обозначим x, y соответственно число положительных, отрицательных чисел, через z — количество всех чисел (включая нули). Тогда имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 40 < z < 48; \\ 4x - 8y = -3z. \end{cases}$$

Из второго уравнения ясно, что z должно делиться на 4, откуда $z = 44$, $x - 2y = -33$. Решив последнее уравнение в целых числах, получим:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 17 + t; \quad \Rightarrow \quad x + y = 18 + 3t. \\ t \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Так как всего чисел 44, то $18 + 3t \le 44 \quad \Rightarrow \quad t \le 8$. При $t = 8$ $x = 17$, $y = 25$, т. е. положительных чисел не более 17. Остается привести конкретный пример, когда положительных чисел ровно 17: для этого надо взять 17 чисел 4, 25 чисел -8 и два нулевых числа. Очевидно, в этом случае все условия задачи выполняются.

Имеются задачи, в которых необходимо найти арифметическую прогрессию, являющуюся пересечением двух других арифметических прогрессий. Такие задачи сводятся к решению *диофантовых линейных уравнений с двумя переменными.*

Задача 6. Найти среднее арифметическое всех чисел, одновременно являющихся членами двух арифметических прогрессий 3, 7, 11, ..., 1995 и 2, 9, 16, ..., 1997.

Решение. Так как все числа первой прогрессии имеют вид $3 + 4x, x \in \mathbf{Z}$, а все числа второй прогрессии имеют вид $2 + 7y, y \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ — множество целых чисел), то для нахождения чисел, одновременно принадлежащих обеим прогрессиям, следует решить в целых числах уравнение $3 + 4x = 2 + 7y$ или $1 = -4x + 7y$.

Так как $\text{НОД}(4, 7) = 1$, то это уравнение имеет решения. Частное решение легко подбирается — им будет пара $(x_0, y_0) = (-2, -1)$. Поэтому общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = -2 + 7t; \\ y = -1 + 4t; \\ t \text{ — любое целое.} \end{cases}$$

Итак, все искомые числа имеют вид $2+7(-1+4t)=-5+28t$, $t \in \mathbf{Z}$. Остается найти все такие целые числа между 3 и 1995. Для этого решим двойное неравенство $3 \le -5+28t \le 1995$:

$$3 \le -5+28t \le 1995 \;\Leftrightarrow\; 8 \le 28t \le 2000 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{7} \le t \le 71\frac{3}{7} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; t=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 71.$$

В итоге получаем искомые числа: $a_1=-5+28\cdot 1$, $a_2=-5+28\cdot 2$, ..., $a_{71}=-5+28\cdot 71$. Они составляют арифметическую прогрессию, в которой $a_1=23$, $a_{71}=1983$. Поэтому их среднее арифметическое равно

$$\frac{(a_1+a_{71})\cdot 71}{2\cdot 71}=\frac{23+1983}{2}=1003.$$

Метод последовательного спуска эффективен, когда в уравнении более двух переменных, например, для уравнений вида $f(x, y, z)=0$, где $f(x, y, z)$ — многочлен от трех переменных с целыми коэффициентами. При реализации этого метода вам не обойтись без следующих элементарных свойств делимости:

- если произведение целых чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p;
- если целые числа a и b делятся на целое число c, то $a \pm b$ также делится на c;
- если целое число n кратно двум взаимно простым числам a и b, то n кратно их произведению ab.

Не забывайте также, что кратность числа n числу l равносильна равенству $n=kl$ при некотором целом k.

Суть метода в том, чтобы с помощью элементарных свойств делимости установить, что все переменные x, y, z делятся на l (l может быть одной из этих переменных или более сложным целочисленным выражением), после чего использовать замену переменных $x=lx'$, $y=ly'$, $z=lz'$ и все слагаемые разделить на l. Продолжая этот процесс, в конечном счете, можно прийти к уравнению, в котором все слагаемые являются взаимно простыми в совокупности (но не обязательно попарно).

Задача 7. Найти среднее арифметическое всех двухзначных чисел, кратных произведению своих цифр.

Решение. Пусть x и y — цифры искомого двухзначного числа $10x+y$. Тогда по условию $10x+y=zxy$ для некоторого натурального числа z. Так как $10x$ и zxy кратны x, то и y должно быть кратно x, т. е. $y=lx$ для некоторого натурального l.

Подставляем $y=lx$ в уравнение $10x+y=zxy$:

$$10x+xl=zlx^2 \Rightarrow 10+l=zlx.$$

Так как l и zlx кратны l, то и 10 кратно l, откуда $10=lk$, и уравнение принимает вид $k+1=zx$, где $k=10$ или $k=5$, или $k=2$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. $k=10 \Rightarrow 11=zx$. Так как x — цифра, то $x=1 \Rightarrow y=1$.
2. $k=5 \Rightarrow 6=zx$, $10x+y=6y \Rightarrow x\in\{1,2,3,6\}$ и $2x=y$.

   Если $x=1$, то $y=2$. Если $x=2$, то $y=4$. Если $x=3$, то $y=6$. Если $x=6$, то $y=12$, что невозможно.
3. $l=2 \Rightarrow 3=kx$, $10x+y=3y$ $x\in\{1,3\}$ и $5x=y$. Если $x=1$, то $y=5$. Если $x=3$, то $y=15$, что невозможно.

Итак, искомыми числами будут 11, 12, 24, 36, 15, а их среднее арифметическое равно

$$\frac{11+12+24+36+15}{5}=19{,}6.$$

Задача 8. Среди всех таких пар (a, b) натуральных чисел, для которых $a\geq b$, $\text{НОД}(a, b)=22$, $\text{НОК}(a, b)=6160$, найти пару с наименьшим значением $a-b$. В ответ записать $a+b$.

Решение. Так как a и b делятся на 22, то положим $a=22a'$, $b=22b'$, где a' и b' взаимно просты. Далее:

$$6160=ab\cdot\text{НОД}(a, b)=22a'b' \Rightarrow 280=a'b' \Rightarrow 1\cdot 2^3\cdot 5\cdot 7=a'b'.$$

Поэтому, с учетом того, что a' и b' взаимно просты и $a' \geq b'$ взаимно просты, возможны только следующие варианты:

$$a' = 2^3 \cdot 5, \quad b' = 7, \qquad a' = 2^3 \cdot 7, \quad b' = 5;$$

$$a' = 5 \cdot 7, \quad b' = 2^3, \qquad a' = 2^3 \cdot 5 \cdot 7, \quad b' = 1.$$

Среди всех этих вариантов разность $35 - 8 = 27$ наименьшая. Поэтому $a = 22 \cdot 35 = 770$, $b = 22 \cdot 8 = 176 \quad \Rightarrow \quad a + b = 946$.

Если же в системе неравенств с двумя переменными x, y требуется найти только целочисленные решения, можно прибегнуть к следующему алгоритму.

1. Перейти к равносильной системе, в которой все неравенства нестрогие.

2. Выбрать одну из переменных, которую можно «изолировать» (пусть будет y), т. е. представить систему в виде

$$\begin{cases} y \geq A_1; \\ \ldots\ldots \\ y \geq A_k; \\ y \leq B_1; \\ \ldots\ldots \\ y \leq B_r, \end{cases} \qquad (*)$$

где выражения $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_r$ уже не содержат переменной y.

3. Решить следующую систему, являющуюся следствием системы (*):

$$\begin{cases} A_i \leq B_j; \\ i = 1, \ \ldots, \ k; \\ j = 1, \ \ldots, \ r. \end{cases}$$

4. Подставить поочередно все найденные целочисленные значения переменной x в систему (*) и определить соответствующие целочисленные значения переменной y.

Примечание: этап 1 выполняется с помощью следующих очевидных свойств равносильного перехода к нестрогим неравенствам. Если C и D — целочисленные выражения, то

$$C < D \Leftrightarrow C+1 \le D; \qquad C > D \Leftrightarrow C-1 \ge D$$

и для любого числа e из интервала $(0;\,1)$

$$C+e < D \Leftrightarrow C+1 \le D; \quad C+e > D \Leftrightarrow C \ge D.$$

Задача 9. Найти все целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} y+\dfrac{1}{2} > \left|x^2-2x\right|; \\ y+|x-1| < 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Так как выражения $y+|x-1|$, 2, y, $\left|x^2-2x\right|$ целочисленные, то исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y \ge \left|x^2-2x\right|; \\ y+|x-1|+1 \le 2. \end{cases}$$

2. «Изолируем» переменную y:

$$\begin{cases} y \ge \left|x^2-2x\right|; \\ y \le 1-|x-1|. \end{cases}$$

3. Следствием последней системы является неравенство $\left|x^2-2x\right| \le 1-|x-1| \Leftrightarrow \left|x^2-2x\right|+|x-1| \le 1$. Так как $\left|x^2-2x\right|$ и $|x-1|$ — целые неотрицательные, то из последнего неравенства следуют три возможности:

$$\text{а)} \begin{cases} \left|x^2-2x\right|=0; \\ |x-1|=0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} \left|x^2-2x\right|=1; \\ |x-1|=0; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} \left|x^2-2x\right|=0; \\ |x-1|=1. \end{cases}$$

Решив эти системы, получаем: $x=0$, $x=1$, $x=2$.

4. Подставляем поочередно найденные значения x в систему

$$\begin{cases} y \ge \left|x^2 - 2x\right|; \\ y \le 1 - |x - 1| \end{cases}$$

- при $x = 0$ $\begin{cases} y \ge 0; \\ y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0;$
- при $x = 1$ $\begin{cases} y \ge 1; \\ y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1;$
- при $x = 2$ $\begin{cases} y \ge 0; \\ y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$

Отсюда искомые решения: $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $(2;\ 0)$.

Задача 10. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + y - 7 < 0; \\ 2x - y + 3 > 0; \\ y > 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} 2x + y - 7 + 1 \le 0; \\ 2x - y + 3 - 1 \ge 0; \\ y - 1 \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 6 \le 0; \\ 2x - y + 2 \ge 0; \\ y \ge 4. \end{cases}$$

2. Изолируем переменную y:

$$\begin{cases} y \ge 4; \\ y \le 6 - 2x; \\ y \le 2x + 2. \end{cases}$$

3. Следствием последней системы является система

$$\begin{cases} 4 \le 6 - 2x; \\ 4 \le 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1; \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

4. Подставляем $x = 1$ в систему

$$\begin{cases} y \geq 4; \\ y \leq 6 - 2x; \\ y \leq 2x + 2. \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} y \geq 4; \\ y \leq 4; \\ y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4.$$

Искомый ответ: $(1;\ 4)$.

Алгоритм, описанный выше, применим и к системе с двумя переменными x, y без требования целочисленности решений. Продемонстрируем это на следующей системе.

Задача 11. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 3xy + 1 \leq 0; \\ 9x^2 - 12x - 8y \leq 0. \end{cases}$$

Решение. В качестве изолируемой переменной выберем y (можно было бы и x) и перейдем к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{-3x - \sqrt{9x^2 - 4}}{2} \leq y \leq \dfrac{-3x + \sqrt{9x^2 - 4}}{2}; \\ y \geq \dfrac{9x^2 - 12x}{8}, \end{cases}$$

где $\dfrac{-3x \pm \sqrt{9x^2 - 4}}{2}$ — корни уравнения $y^2 + 3xy + 1 = 0$. Из этой системы получаем следствие:

$$\frac{9x^2 - 12x}{8} \leq \frac{-3x + \sqrt{9x^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow 9x^2 \leq 4\sqrt{9x^2 - 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81x^4 - 144x^2 + 64 \leq 0 \Leftrightarrow \left(9x^2 - 8\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Подставив это значение в неравенство

$$\frac{-3x-\sqrt{9x^2-4}}{2} \le y \le \frac{-3x+\sqrt{9x^2-4}}{2},$$

получим:
$$\frac{2\mp\sqrt{8}}{2} \le y \le \frac{2\mp\sqrt{8}}{2},$$

откуда
$$y=\frac{2\mp 2\sqrt{2}}{2}=1\mp\sqrt{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3};\, 1-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3};\, 1+\sqrt{2}\right)$.

§ 2.2. Рациональные уравнения и неравенства

Сложные рациональные уравнения можно решить, только уменьшив степени присутствующих в них многочленов. Достигнуть этого можно либо с помощью теоремы о корне многочлена, либо заменой общих фрагментов уравнения новыми переменными (методом замены переменных). Вся трудность решения зачастую и заключается в обнаружении искусно «спрятанных» фрагментов, предназначенных для замены.

Корнем многочлена $P(x)$ называется такое значение x_0 переменной x, при котором $P(x_0)=0$. Для *уменьшения степени многочлена* применяется **теорема о корне многочлена**: число x_0 является корнем многочлена $P(x)$, если и только если выполняется равенство $P(x)=(x-x_0)\cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен, степень которого на единицу меньше степени многочлена $P(x)$.

Кубическое уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$ с действительными коэффициентами всегда имеет либо один, либо три действительных корня. Если удается найти один действительный корень x_1, то левую часть уравнения можно записать в виде $ax^3+bx+cx+d=a(x-x_1)(x^2+px+q)$. Тогда исходное кубическое уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x=x_1; \\ x^2+px+q=0. \end{array}\right.$$

Теорема для нахождения рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n\geq 1$ с целыми коэффициентами. Если уравнение $P(x)=0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена многочлена $P(x)$.

Если уравнение $P(x)=0$ имеет рациональный корень $x=\dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{m}{n}$ несократимая дробь, то число m является делителем свободного члена многочлена $P(x)$, а число n — делителем старшего его коэффициента.

Задача 1. Решить уравнение: 1) $x^3-6x^2+21x-52=0$; 2) $2x^3-x^2+x+1=0$.

Решение.

1. Делителями свободного члена (-52) являются числа $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 13, -13, 26, -26, 52, -52\}$. Обозначим $P(x)$ левую часть уравнения. Тогда $P(1)\neq 0$, $P(-1)\neq 0$, $P(2)\neq 0$, $P(-2)\neq 0$, $P(4)=0 \Rightarrow x=4$ — корень уравнения. Разделив $P(x)$ на $(x-4)$, получим

$$x^3-6x^2+21x-52=(x-4)(x^2-2x+13).$$

Следовательно,

$$x^3-6x^2+21x-52=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; \\ x^2-2x+13=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=4.$$

2. Если $x=\dfrac{m}{n}$ — корень уравнения, то $m\in\{1,-1\}$, $n\in\{1,-1,\ 2,-2\}$, поэтому корни $\dfrac{m}{n}$ надо искать в множестве $\left\{\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,-1\right\}$. Если обозначить левую часть уравнения через $P(x)$, то $P(\pm1)\neq0$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq0$, $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$, т. е. $x=-\dfrac{1}{2}$ — корень уравнения. После деления на $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ получаем

$$2x^3-x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-2x+2\right).$$

Следовательно,

$$2x^3-x^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}; \\ 2x^2-2x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Задача 2. Найти сумму корней уравнения

$$\frac{x^2+8x+20}{x+4}+x+1=\frac{x^2-2x}{x-1}+\frac{x^2+12x+42}{x+6}.$$

Решение. Разделив числители дробей на их знаменатели с остатком с помощью схемы Горнера, получим такое уравнение из исходного:

$$\left(x+4+\frac{4}{x+4}\right)+x+1=\left(x-1-\frac{1}{x-1}\right)+\left(x+6+\frac{6}{x+6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x+4}+\frac{1}{x-1}-\frac{6}{x+6}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)(x+6)+(x+4)(x+6)-6(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-1)(x+6)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x-24=0; \\ x\neq-4,\ x\neq1,\ x\neq-6. \end{cases}$$

Так как дискриминант квадратного уравнения $x^2-12x-24=0$ равен 240, то это уравнение не имеет целых корней из «запрещенного» множества $\{-4, 1, -6\}$, а значит, сумму корней можно найти по теореме Виета: $x_1+x_2=-(-12)=12$.

Задача 3. Решить уравнение

$$\frac{3x^2-13x+5}{x^2-1}=\frac{4x^2-13x+1}{2x^2-5}.$$

Решение. Заметим, что разности числителей $(4x^2-13x+1)-(3x^2-13x+5)=x^2-4$ и знаменателей $(2x^2-5)-(x^2-1)=x^2-4$ дробных выражений данного уравнения одинаковы. Поэтому исходное уравнение можно записать так: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c}{b+c}$, где $a=3x^2-13x+5$, $b=x^2-1$, $c=x^2-4$. Отсюда имеем:

$$\begin{cases} a(b+c)=b(a+c); \\ b\neq 0,\ b+c\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(a-b)=0; \\ b\neq 0,\ b+c\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0; \\ b\neq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a=b; \\ b\neq 0,\ b+c\neq 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\begin{cases} x^2-4=0; \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x^2-13x+5=x^2-1; \\ x^2-1\neq 0,\ (x^2-1)+(x^2-4)\neq 0. \end{cases}$$

Первая из этих двух систем имеет корни $x=\pm 2$. Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 2x^2-13x+6=0; \\ x^2-1\neq 0,\ 2x^2-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{6;\ \frac{1}{2}\right\}.$$

Итак, общий ответ: $x\in\left\{\pm 2,\ 6,\ \dfrac{1}{2}\right\}$.

Задача 4. Найти сумму корней уравнения

$$x^2-4x+3+\frac{\left(x^2-6x-3\right)^2}{x^2-4x+3}=\frac{4\left(x+3\right)^2}{x^2-4x+3}.$$

Решение. Сопоставим выражения x^2-4x+3, x^2-6x-3 и $2\left(x+3\right)$: третье есть разность первого и второго. Воспользуемся этим наблюдением и обозначим $a=x^2-4x+3$, $b=x^2-6x-3$. Тогда исходное уравнение запишется так: $a+\frac{b^2}{a}=\frac{\left(b-a\right)^2}{a}$.

Приведем его к общему знаменателю, затем раскроем в числителе скобки и приведем подобные члены. В результате получим:

$$\frac{2ab}{a}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0; \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x-3=0; \\ x^2-4x+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x-3=0; \\ x\neq 1,\ x\neq 3. \end{cases}$$

Так как корни уравнения $x^2-6x-3=0$ иррациональные, то они не могут совпасть с 1 или 3. Поэтому сумму корней можно найти по теореме Виета: $x_1+x_2=-\left(-6\right)=6$.

Задача 5. Решить уравнение $x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x=4$.

Решение. Поскольку в уравнении присутствуют суммы $x+\frac{1}{x}$ и $x^2+\frac{1}{x^2}$, то, обозначив первую из них вспомогательной переменной $t=x+\frac{1}{x}$, вторую сумму можно выразить через новую переменную t:

$$t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Данное уравнение теперь можно записать так:

$$t^2+t-2=4 \Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3, \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-3; \\ x+\dfrac{1}{x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2+3x+1=0; \\ x^2-2x+1=0; \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}; \\ x=1. \end{array}\right.$$

Задача 6. Найти произведение корней уравнения

$$\frac{3x}{x^2-4x+1}-\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}.$$

Решение. Если разделить на x числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения, то получим уравнение, допускающее замену переменной (заметим, что при делении на x потери корней не произойдет, т. к. $x=0$ не является решением исходного уравнения):

$$\frac{3}{x-4+\dfrac{1}{x}}-\frac{2}{x+1+\dfrac{1}{x}}=\frac{8}{3}.$$

Сделаем замену переменной $t=x+\dfrac{1}{x}$: $\dfrac{3}{t-4}-\dfrac{2}{t+1}=\dfrac{8}{3}$. После приведения к общему знаменателю получим:

$$\left\{\begin{array}{l} 8t^2-27t-65=0; \\ t\neq\dfrac{1}{4},\ t\neq-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5; \\ t=-\dfrac{13}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=5; \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{13}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-5x+1=0; \\ 8x^2+13x+8=0; \end{array}\right. \\ x\neq 0. \end{array}\right.$$

Так как второе уравнение корней не имеет, то произведение корней можно найти по теореме Виета: $x_1x_2=1$.

В следующих задачах представлен очень важный класс уравнений с двумя переменными x и y, называемых **уравнениями, приводящимися к однородным**. Уравнение $f(x, y)=0$ называется **однородным**, если $f(x, y)$ является суммой одночленов одинаковой степени. Степень однородного уравнения определяется степенью входящих в него одночленов. Например, функция $f(x, y)=2x^3y^2-5xy^4+0{,}3y^5$ является суммой одночленов одинаковой степени 5. Поэтому уравнение $2x^3y^2 - 5xy^4 + 0{,}3y^5 = 0$ является однородным степени 5.

Если вам удалось с помощью замены переменных свести задачу к решению однородного уравнения второй степени, то успех гарантирован. При этом одной из переменных вполне может быть первоначальная переменная. Кстати, задачу 6 также можно решить с помощью замены $a = x^2 + 1$, приводящей исходное уравнение (после приведения его к общему знаменателю) к однородному уравнению с двумя переменными a и x.

Задача 7. Найти сумму корней уравнения

$$\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 + 4\cdot\frac{2x-1}{x-2} - 5\cdot\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 = 0.$$

Решение. Обозначим $a = \frac{2x-1}{x+1}$, $b = \frac{x+1}{x-2}$. Тогда исходное уравнение примет вид $a^2 + 4ab - 5b^2 = 0$. Левая часть $a^2 + 4ab - 5b^2$ является суммой одночленов 2-й степени. Поэтому данное уравнение — однородное. Для его решения разделим каждый одночлен на b^2 (при этом заметим, что $b \neq 0$, т. к. в противном случае и $a = 0$, что в нашей ситуации невозможно). Получаем: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4\frac{a}{b} - 5 = 0$. Пусть $t = \frac{a}{b}$. Тогда

$$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -5; \\ t = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = -5; \\ \frac{a}{b} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -5b; \\ a = b. \end{array}\right.$$

Подставляя $a = \frac{2x-1}{x+1}$, $b = \frac{x+1}{x-2}$, приходим к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x-1}{x+1}=-5\dfrac{x+1}{x-2};\\ \dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x-2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}7x^2+5x+7=0;\\ x^2-7x+1=0;\end{array}\right.\\ x\neq -1,\ x\neq 2.\end{array}\right.$$

Дискриминант первого уравнения отрицательный, дискриминант второго равен 45. Значит, среди его корней нет целых чисел -1 и 2. Поэтому искомую сумму корней найдем по теореме Виета: $x_1+x_2=7$.

Задача 8. Найти сумму корней уравнения

$$\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2+20x+96\right)=4x^2.$$

Решение. Разложим квадратные трехчлены на линейные множители:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3),\ x^2+20x+96=(x+8)(x+12).$$

В результате исходное уравнение примет вид: $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$. Перемножим попарно 1-ю и 4-ю, 2-ю и 3-ю скобки: $\left(x^2+14x+24\right)\left(x^2+11x+24\right)=4x^2$.

Заметив общие слагаемые в полученных скобках, обозначим $a=x^2+24$. Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$(a+14x)(a+11x)=4x^2 \Leftrightarrow a^2+25ax+150x^2=0.$$

Это однородное уравнение 2-й степени, после деления обеих частей которого на x^2 и введения переменной $t=\dfrac{a}{x}$ получаем:

$$t^2+25t+150=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-15;\\ t=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-15x;\\ a=-10x\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+24=-15x;\\ x^2+24=-10x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+15x+24=0;\\ x^2+10x+24=0.\end{array}\right.$$

Поскольку оба уравнения имеют положительные дискриминанты, сумму всех корней найдем по теореме Виета: для первого уравнения $x_1+x_2=-15$, для второго уравнения $x_3+x_4=-10$. Общая сумма равна -25.

Если в неравенстве была сделана замена переменной, то промежуточный ответ для новой переменной — перед возвращением к первоначальной — запишите в виде совокупности или системы неравенств. Хотя здесь имеется и альтернативный способ.

Задача 9. Решить неравенство

$$\frac{3}{(x-1)(x-4)}+\frac{2}{(x+1)(x-6)}<-\frac{5}{3}.$$

Решение. Заметив, что

$$(x-1)(x-4)=x^2-5x+4,\ (x+1)(x-6)=x^2-5x-6,$$

обозначим $x^2-5x=t$. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{3}{t+4}+\frac{2}{t-6}<-\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{t+4}+\frac{2}{t-6}+\frac{5}{3}<0.$$

Решим его методом интервалов:

$$\frac{9(t-6)+6(t+4)+5(t+4)(t-6)}{3(t+4)(t-6)}<0 \Leftrightarrow \frac{5t^2+5t-150}{3(t+4)(t-6)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2+t-30}{(t+4)(t-6)}<0 \Leftrightarrow \frac{(t+6)(t-5)}{(t+4)(t-6)}<0.$$

Итак: $t\in(-6;-4)\cup(5;\ 6)$ (рис. 2.1).

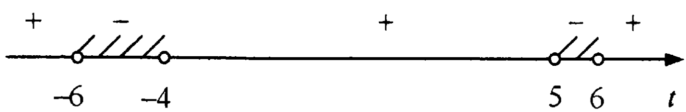


Рис. 2.1

Этот промежуточный ответ представим в виде совокупности двойных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} -6<t<-4; \\ 5<t<6. \end{array}\right.$$

Поскольку $t = x^2 - 5x$, то, переходя к переменной x, получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x>-6;\\x^2-5x<-4;\end{cases}\\\begin{cases}x^2-5x>5;\\x^2-5x<6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x+6>0;\\x^2-5x+4<0;\end{cases}\\\begin{cases}x^2-5x-5>0;\\x^2-5x-6<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-2)(x-3)>0;\\(x-1)(x-4)<0;\end{cases}\\\begin{cases}\left(x-\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)>0;\\(x+1)(x-6)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решение первой системы неравенств: $x \in (1;\ 2) \cup (3;\ 4)$ (рис. 2.2).

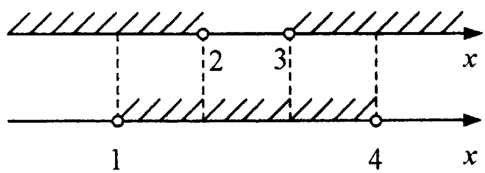


Рис. 2.2

Решение второй системы неравенств:

$$x \in \left(-1;\ \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2};\ 6\right) \text{ (рис. 2.3).}$$

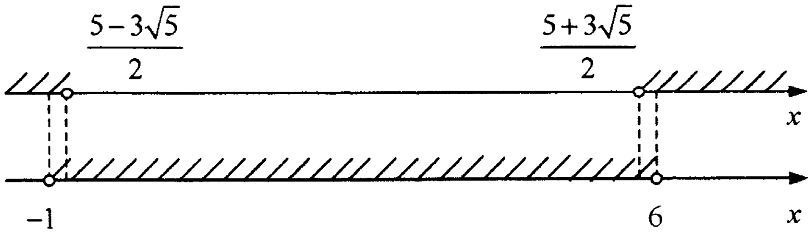


Рис. 2.3

Общим ответом является объединение указанных промежутков:

$$x \in \left(-1; \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 4) \cup \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}; 6\right).$$

Альтернативный способ решения.

После приведения неравенства к виду $\frac{(t+6)(t-5)}{(t+4)(t-6)} < 0$, готовому к нахождению значений переменной t с помощью числовой оси, можно было сразу вернуться к первоначальной переменной x, заменив t выражением $x^2 - 5x$:

$$\frac{(x^2-5x+6)(x^2-5x-5)}{(x^2-5x+4)(x^2-5x-6)} < 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов. Разложим все квадратные трехчлены на линейные множители:

$$\frac{(x-2)(x-3)\left(x-\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)}{(x-1)(x-4)(x+1)(x-6)} < 0.$$

Поскольку $4 < \frac{5+3\sqrt{5}}{2} < 6$, $-1 < \frac{5-3\sqrt{5}}{2} < 0$, то числовая ось для решения этого неравенства методом интервалов показана на рис. 2.4.

Отсюда получаем искомый ответ, уже упоминавшийся выше.

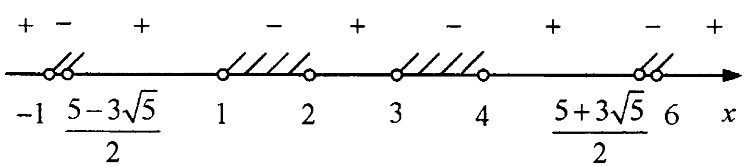


Рис. 2.4

В любом из разделов алгебры встречаются так называемые граничные задачи, решение которых основано на установлении нижних (или верхних) числовых границ входящих в них выражений.

Простейший класс таких задач составляют уравнения с двумя переменными, решение которых начинается с выделения полных квадратов. Такие уравнения приводятся к виду $f^2(x, y)+g^2(x, y)=0$ (в левой части может быть сумма более чем двух квадратов).

Так как $f^2(x, y)\ge 0$ и $g^2(x, y)\ge 0$ при всех допустимых значениях x и y (т. е. выражения $f^2(x, y)$ и $g^2(x, y)$ ограничены снизу числом 0), то равенство нулю выражения $f^2(x, y)+g^2(x, y)$ возможно только в случае

$$\begin{cases} f(x, y)=0; \\ g(x, y)=0. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к решению равносильной системы более простых уравнений.

Задача 10. Решить уравнение с двумя переменными

$$9x^2-6xy+2y^2+6y+9=0.$$

Решение. Это уравнение можно записать в виде

$$\left((3x)^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2\right)+\left(y^2+2\cdot 3y+3^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x-y)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=0; \\ y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1; \\ y=-3. \end{cases}$$

Задача 11. Решить уравнение с двумя переменными

$$\left(x^2+6x+12\right)\left(9+4y+y^2\right)=15.$$

Решение. Так как

$$x^2+6x+12=x^2+2\cdot 3x+9+3=(x+3)^2+3;$$

$$9+4y+y^2=y^2+2\cdot 2y+4+5=(y+2)^2+5,$$

то уравнение примет вид: $\left((x+3)^2+3\right)\left((y+2)^2+5\right)=15$. Рассмотрим два способа его решения.

Первый способ повторяет идею предыдущей задачи:

$$(x+3)^2(y+2)^2+3(y+2)^2+5(x+3)^2+15=15 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+3)^2(y+2)^2+3(y+2)^2+5(x+3)^2=0.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x+3)(y+2)=0; \\ y+2=0, \\ x+3=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-3; \\ y=-2. \end{cases}$$

Второй способ основан на «оценке снизу» слагаемых левой части уравнения. Так как $(x+3)^2 \ge 0$, то $(x+3)^2+3 \ge 3$; аналогично $(y+2)^2+5 \ge 5$.

Поэтому $\left((x+3)^2+3\right)\left((y+2)^2+5\right) \ge 15$, причем равенство здесь возможно, только если $(x+3)^2+3=3$ и $(y+2)^2+5=5$, откуда $x=-3$, $y=-2$.

А теперь решим более сложную **граничную задачу**.

Задача 12. Решить уравнение $4x^2+4x+17=\dfrac{12}{x^2-x+1}$.

Решение. Структурно это уравнение напоминает уравнение задачи 8. Разница лишь в том, что здесь квадратные трехчлены левой и правой частей не имеют корней (их дискриминанты меньше нуля), а потому основная идея решения задачи 8, состоящая в разложении квадратных трехчленов на множители, а затем — в подходящей группировке этих множителей, для этого уравнения не подходит.

Попробуем применять метод выделения полных квадратов. Так как

$$4x^2+4x+17=\left((2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1\right)+16=(2x+1)^2+16;$$

$$x^2-x+1=\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

то данное уравнение можно записать в виде:

$$\left((2x+1)^2+16\right)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=12.$$

Поскольку $(2x+1)^2+16\geq16$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$ при всех x, то

$$\left((2x+1)^2+16\right)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\geq16\cdot\frac{3}{4}=12$$

при всех x, причем выражение из левой части неравенства будет равно 12, только если $(2x+1)^2+16=16$ и $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$, откуда следует:

$$\begin{cases}2x+1=0;\\ x-\frac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2};\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Дискриминант квадратного трехчлена дает ответ на вопрос о числе его корней, а знаки коэффициентов приведенного квадратного трехчлена позволяют определять знаки его корней с помощью прямой теоремы Виета. Это делается в соответствии с правилами, приведенными в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Оба корня положительны	**Оба корня отрицательны**	**Корни имеют разные знаки**
$\begin{cases}-\frac{b}{a}>0;\\ \frac{c}{a}>0;\\ D\geq0\end{cases}$	$\begin{cases}-\frac{b}{a}<0;\\ \frac{c}{a}>0;\\ D\geq0\end{cases}$	$\frac{c}{a}<0$

Задача 13. При каких a уравнение $\dfrac{x^2+(a-1)x+16}{x+8}=0$ имеет единственное решение?

Решение. Переформулируем данную задачу так: при каких a парабола $y=x^2+(a-1)x+16$ пересекает ось абсцисс в одной точке, отличной от точки $(-8;0)$, или в двух точках, одна из которых совпадает с точкой $(-8;0)$? Первое требование обеспечивается системой

$$\begin{cases} D=0; \\ y(-8)\neq 0, \end{cases}$$

а второе — системой

$$\begin{cases} D>0; \\ y(-8)=0. \end{cases}$$

1. $\begin{cases} D=0; \\ y(-8)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2-64=0; \\ 64-(a-1)8+16\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-7; \\ a=9; \end{array}\right. \\ a\neq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-7; \\ a=9. \end{array}\right.$

2. $\begin{cases} D>0; \\ y(-8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2-64>0; \\ a=11 \end{cases} \Leftrightarrow a=11.$

В итоге, $a\in\{-7;\ 9;\ 11\}$.

Задача 14. При каких значениях a корни уравнения $(2a+1)x^2-2ax+a+1=0$: 1) положительны; 2) отрицательны; 3) имеют разные знаки?

Решение. Сначала рассмотрим случай $a=-\frac{1}{2}$. Тогда уравнение является линейным и имеет вид:

$$(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}+1=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}<0.$$

Таким образом, при $a=-\frac{1}{2}$ корень уравнения отрицателен, т. е. значение $a=-\frac{1}{2}$ нужно добавить к ответу задания 2.

Пусть теперь $a \neq -\dfrac{1}{2}$, x_1 и x_2 — корни данного уравнения. В силу теоремы Виета справедлива следующая система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2a}{2a+1}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a+1}{2a+1}; \\ D = -a^2 - 3a - 1 \geq 0, \end{cases}$$

где $D = 4a^2 - 4(a+1)(2a+1) = -4\left(a^2 + 3a + 1\right)$.

1. Корни x_1 и x_2 данного уравнения положительны, если и только если их сумма и произведение положительны, т. е. выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{2a+1} > 0; \\ \dfrac{a+1}{2a+1} > 0; \\ a^2 + 3a + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ -1\right) \text{ (рис. 2.5).}$$

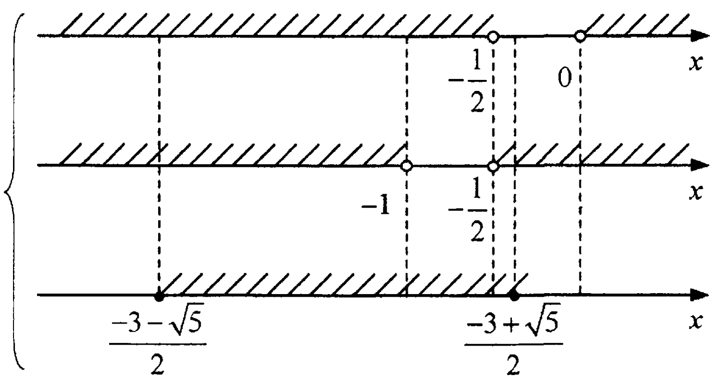


Рис. 2.5

2. Корни x_1 и x_2 отрицательны, если и только если их сумма отрицательна, а произведение положительно, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{2a+1}<0; \\ \dfrac{a+1}{2a+1}>0; \\ a^2+3a+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right] \text{ (рис. 2.6).}$$

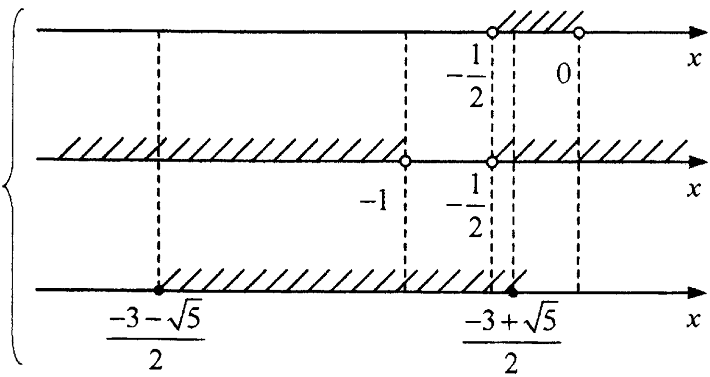


Рис. 2.6

3. Корни x_1 и x_2 имеют разные знаки, если и только если их произведение отрицательно, т. е. $\dfrac{a+1}{2a+1}<0 \Leftrightarrow a\in\left(-1;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ (если свободный член квадратного трехчлена отрицателен, то его дискриминант положительный, поэтому условие $D\ge 0$ в этом случае излишне).

Задача 15. При каких значениях параметра a все корни уравнения $ax^2+5(a-1)x+2a=0$ являются целыми числами?

Решение. Начнем со случая $a=0$. Тогда уравнение имеет вид:

$$0\cdot x^2+5(-1)x+0=0 \Leftrightarrow x=0,$$

и его единственный корень — целый.

Пусть теперь $a\ne 0$, x_1 и x_2 — корни уравнения. Запишем условия теоремы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \cdot \dfrac{a-1}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2a}{a}; \\ D = 25 \cdot (a-1)^2 - 4 \cdot 2a^2 \geq 0; \\ x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение $x_1 \cdot x_2 = 2$ при условии целочисленности x_1, x_2 дает только два возможных варианта: 1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$.

Рассмотрим каждый из них и найдем значение a, исходя из первого уравнения и неравенства системы:

1. $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2; \\ 1 + 2 = -5\dfrac{a-1}{a}; \\ 25 \cdot (a-1)^2 - 8a^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{8}; \\ 25 \cdot \left(-\dfrac{3}{8}\right)^2 - 8\left(\dfrac{5}{8}\right)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{8}.$

2. $\begin{cases} x_1 = -1, x_2 = -2; \\ -1 - 2 = -5 \cdot \dfrac{a-1}{a}; \\ 25 \cdot (a-1)^2 - 8a^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2}; \\ 25 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 8\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{2}.$

Итак, $a \in \left\{0;\ \dfrac{5}{8};\ \dfrac{5}{2}\right\}$.

В следующей задаче обратите внимание на то, как неравенство $D \geq 0$ «поучаствовало» в решении! Если бы вы забыли или не сочли нужным включить это неравенство в основную систему, ответ был бы совершенно другим.

Задача 16. При каких ненулевых значениях параметра a неполный квадрат суммы корней уравнения $ax^2 + x + 5a + 2 = 0$ больше 3?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни исходного уравнения. В соответствии с теоремой Виета и условиями задачи справедлива следующая система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{1}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{5a+2}{a}; \\ D = 1 - 4a(5a+2) \ge 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 > 3. \end{cases}$$

Последнее неравенство запишем в виде $(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 > 3$ и подставим в него $x_1 + x_2 = -\dfrac{1}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{5a+2}{a}$. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{5a+2}{a} > 3; \\ 1 - 4a(5a+2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - a(5a+2) - 3a^2}{a^2} > 0; \\ 20a^2 + 8a - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8a^2 + 2a - 1}{a^2} < 0; \\ \left(a + \dfrac{1}{2}\right)\left(a - \dfrac{1}{10}\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(a + \dfrac{1}{2}\right)\left(a - \dfrac{1}{4}\right)}{a^2} < 0; \\ \left(a + \dfrac{1}{2}\right)\left(a - \dfrac{1}{10}\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a \in \left(-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{10}\right] \text{ (рис. 2.7).}$$

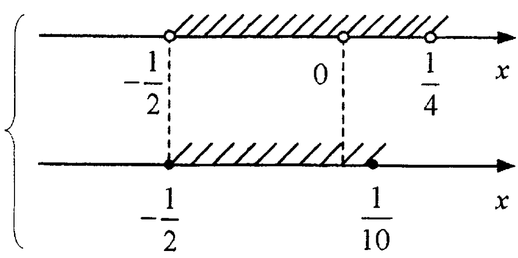


Рис. 2.7

Как мы уже видели, дискриминант квадратного трехчлена дает ответ на вопрос о числе его корней; знаки коэффициентов приведенного квадратного трехчлена позволяют определять знаки его корней. На более сложный вопрос о расположении корней квадратного трехчлена относительно произвольно заданной точки z_0 оси абсцисс помогает найти ответ следующий **графический метод**.

Идея метода состоит в составлении и последующем решении системы рациональных неравенств, равносильной условиям, при которых корни x_1 и x_2 данного квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ расположены требуемым в задаче способом относительно известной точки z_0. Можно выделить 3 случая расположения корней x_1, x_2 (считаем, что $x_1<x_2$) относительно точки z_0.

1. Точка z_0 находится внутри интервала (x_1, x_2). В этом случае для параболы $f(x)=ax^2+bx+c$ возможны два варианта (рис. 2.8).

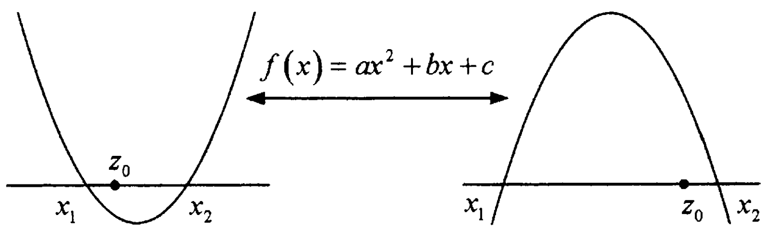


Рис. 2.8

Это равносильно выполнению неравенства $a\cdot f(z_0)<0$.

2. Точка z_0 находится вне отрезка $[x_1, x_2]$, слева от него: $z_0<x_1$. Тогда для параболы $f(x)$ возможны два варианта (рис. 2.9).

Условия такого расположения парабол равносильны следующей системе неравенств ($D=b^2-4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена):

$$\begin{cases} a\cdot f(z_0)>0; \\ z_0<-\dfrac{b}{2a}; \\ D\geq 0. \end{cases}$$

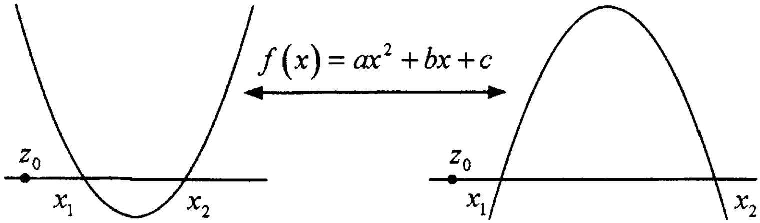


Рис. 2.9

3. Точка z_0 находится вне отрезка $[x_1,\ x_2]$, справа от него: $z_0>x_2$. Тогда для параболы $f(x)$ возможны два варианта (рис. 2.10).

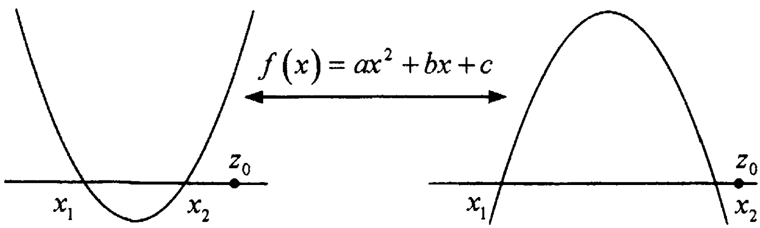


Рис. 2.10

Условия такого расположения парабол равносильны следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a\cdot f(z_0)>0; \\ z_0>-\dfrac{b}{2a}; \\ D\geq 0. \end{cases}$$

Задача 17. При каких значениях параметра k корни x_1, x_2 уравнения $x^2-(k+1)x+k^2+k-8=0$ удовлетворяют условию $x_1<2<x_2$?

Решение. В нашем случае $f(x)=x^2-(k+1)x+k^2+k-8$, $z_0=2$. Парабола $f(x)$, удовлетворяющая условиям задачи, изображена на рис. 2.11. Как следует из графического метода, описанного выше (случай 1), такое расположение параболы равносильно неравенству

$$1\cdot f(2)<0 \Leftrightarrow 4-(2k+1)+k^2+k-8<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2-k-6<0 \Leftrightarrow k\in(-2;\ 3).$$

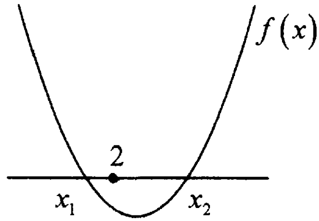


Рис. 2.11

Задача 18. При каких значениях параметра k оба корня уравнения $x^2+x+k=0$ больше k?

Решение. В нашем случае $f(x)=x^2+x+k$, $z_0=k$. Парабола $f(x)$, удовлетворяющая условиям задачи, изображена на рис. 2.12. Как следует из графического метода, описанного выше (случай 2), такое расположение параболы равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}1\cdot f(k)>0;\\ k<-\dfrac{1}{2};\\ D\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k^2+k+k>0;\\ k<-\dfrac{1}{2};\\ 1-4k\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k(k+2)>0;\\ k<-\dfrac{1}{2};\\ k\leq\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow k\in(-\infty;\ -2).$$

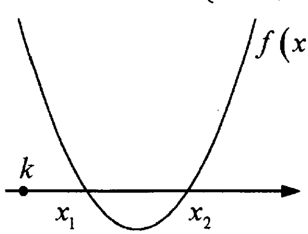


Рис. 2.12

Задача 19. При каких значениях параметра a корни квадратного трехчлена $x^2-2ax+a^2-a=0$ больше -2, но меньше 6?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трехчлена. Парабола для этого случая $f(x)=x^2-2ax+a^2-a$ изображена на рис. 2.13.

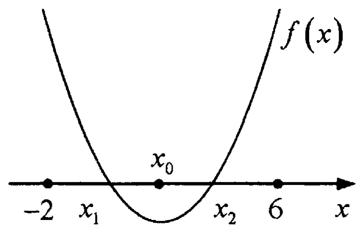


Рис. 2.13

Напишем условия такого расположения параболы:

$$\begin{cases} f(-2)>0; \\ f(6)>0; \\ D\ge 0; \\ -2<x_0<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)^2-2\cdot(-2)a+a^2-a>0; \\ 6^2-2\cdot 6a+a^2-a>0; \\ (-2a)^2-4\cdot(a^2-a)\ge 0; \\ -2<a<6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+3a+4>0; \\ a^2-13a+36>0; \\ a\ge 0; \\ -2<a<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \mathbf{R}; \\ (a-4)(a-9)>0; \\ a\ge 0; \\ -2<a<6 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[0;\,4)\ \text{(рис. 2.14)}.$$

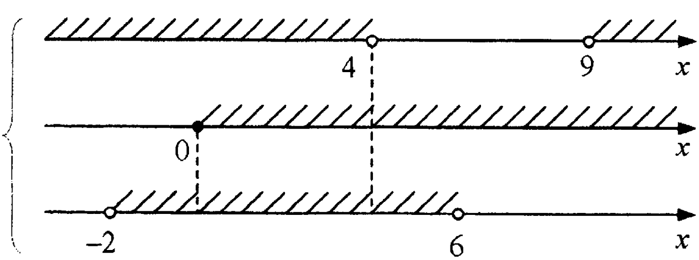


Рис. 2.14

Задача 20. При каких значениях параметра k хотя бы одно из решений системы

$$\begin{cases} x + y = 2(k+1); \\ xy = k^2 + 3k - 1 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям $|x| < 1$ и $|y| > 1$?

Решение. Используя обратную теорему Виета, составим квадратное уравнение относительно переменной t, корни которого $t_1 = x$ и $t_2 = y$ удовлетворяют этой системе. Это уравнение имеет вид: $t^2 - 2(k+1)t + k^2 + 3k - 1 = 0$.

Выясним теперь, при каких условиях на коэффициенты уравнения его корни удовлетворяют условиям $|t_1| < 1$ и $|t_2| > 1$. В этом случае парабола $f(t) = t^2 - 2(k+1)t + k^2 + 3k - 1$ выглядит либо так, как на рис. 2.15 слева, либо — как на рис. 2.15 справа.

Условия такого расположения парабол описываются следующими системами неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} f(-1) > 0; \\ f(1) < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} f(-1) < 0; \\ f(1) > 0, \end{cases}$$

которые равносильны одному неравенству: $f(1) \cdot f(-1) < 0$.

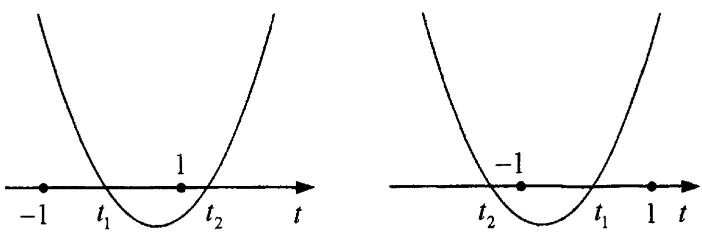


Рис. 2.15

В нашем случае

$$f(1) = 1 - 2(k+1) + k^2 + 3k - 1 = k^2 + k - 2;$$

$$f(-1) = 1 + 2(k+1) + k^2 + 3k - 1 = k^2 + 5k + 2.$$

Поэтому

$$f(1)\cdot f(-1)<0 \Leftrightarrow \left(k^2+k-2\right)\left(k^2+5k+2\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k\in\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2};\ -2\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2};\ 1\right) \text{ (рис. 2.16).}$$

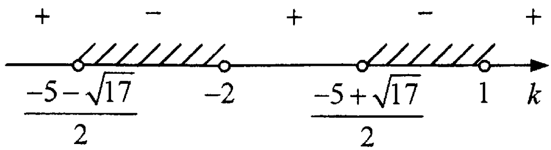


Рис. 2.16

Задача 21. При каких значениях параметра a всякое решение неравенства $x^2-3x+2<0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2-(3a+1)x+3>0$?

Решение. Решением неравенства $x^2-3x+2<0$ является интервал $(1;\ 2)$. Таким образом, вопрос задачи сводится к тому, чтобы найти a, при которых решение неравенства $ax^2-(3a+1)x+3>0$ содержит интервал $(1;\ 2)$. Обозначим $f(x)=ax^2-(3a+1)x+3$.

При $a=0$ второе неравенство принимает вид $x<3$, а значит, его решение $(-\infty;\ 3)$ содержит интервал $(1;\ 2)$.

Пусть теперь $a<0$. Тогда, согласно условию задачи, парабола $y=f(x)$ должна иметь вид, как показано на рис. 2.17 (отметим, что ситуации $x_1=1$ и/или $x_2=2$ также возможны).

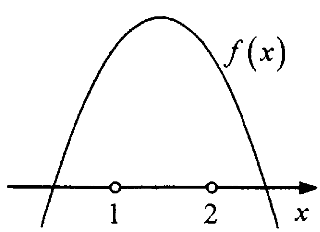


Рис. 2.17

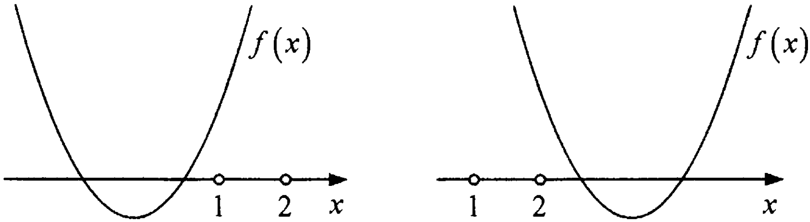


Рис. 2.18

Это равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(1)\ge 0; \\ f(2)\ge 0; \\ D>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2\ge 0; \\ -2a+1\ge 0; \\ (3a-1)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le 1/2; \\ a\ne 1/3. \end{cases}$$

С учетом неравенства $a<0$ получаем $a\in(-\infty;\ 0)$.

Рассмотрим случай $a>0$. Тогда парабола $y=f(x)$ должна иметь один из двух видов, показанных на рис. 2.18.

Парабола на рис. 2.18 слева приводит к равносильной системе неравенств (возможна также ситуация $x_2=1$):

$$\begin{cases} a>0; \\ f(1)\ge 0; \\ D\ge 0; \\ x_0<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0; \\ -2a+2\ge 0; \\ (3a-1)^2\ge 0; \\ \dfrac{3a+1}{2a}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0; \\ a\le 1; \\ a<-1 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing.$$

Парабола на рис. 2.18 справа приводит к равносильной системе неравенств (возможна также ситуация $x_1=2$):

$$\begin{cases} a>0; \\ f(2)\ge 0; \\ D\ge 0; \\ x_0>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0; \\ -2a+1\ge 0; \\ (3a-1)^2\ge 0; \\ \dfrac{3a+1}{2a}>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0; \\ a\le 1/2; \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right].$$

Таким образом, $a\in(-\infty;\ 0)\cup\{0\}\cup\left(0;\ \frac{1}{2}\right]=\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$.

Задача 22. При каких значениях a все числа из отрезка $[-2;\ 0]$ являются решением неравенства $(a+2)x^2+ax-a\geq 0$, но ни одно из чисел отрезка $[2;\ 3]$ этому неравенству не удовлетворяет?

Решение. Рассмотрим отдельно случай $a+2=0$. Тогда $a=-2$, и исходное неравенство принимает вид: $-2x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$.

Очевидно, что при $a=-2$ все условия задачи выполняются.

Пусть теперь $a\neq -2$. Положим $f(x)=x^2+\dfrac{a}{a+2}x-\dfrac{a}{a+2}$.

Графиком функции $y=f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $a+2>0$. Тогда исходное неравенство равносильно $f(x)\geq 0$. Очевидно, в этом случае парабола должна пересекать ось Ox в двух точках — x_1 и x_2, $x_1<x_2$; причем весь отрезок $[2;\ 3]$ должен располагаться строго между точками пересечения параболы с осью Ox, в то время как отрезок $[-2;\ 0]$ должен быть левее точки x_1 (рис. 2.19). При этом допускается ситуация, когда $x_1=0$.

   Приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(2)<0; \\ f(3)<0; \\ f(0)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+\dfrac{2a}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}<0; \\ 9+\dfrac{3a}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}<0; \\ -\dfrac{a}{a+2}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5a+8}{a+2}<0; \\ \dfrac{11a+18}{a+2}<0; \\ \dfrac{a}{a+2}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(-2;\ -\frac{18}{11}\right) \text{ (рис. 2.20).}$$

2. Пусть $a+2<0$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $f(x)\leq 0$. В этом случае отрезок $[-2;\ 0]$ должен быть «нестрого» расположен между точками пересечения x_1 и x_2 параболы $y=f(x)$ с осью Ox (допускаются ситуации

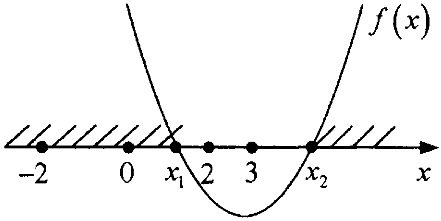


Рис. 2.19

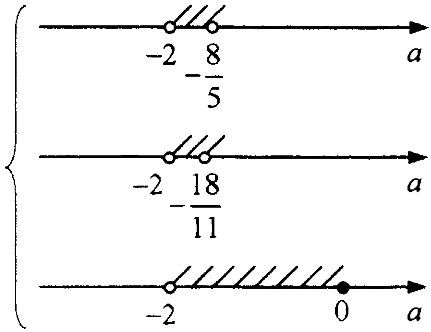


Рис. 2.20

$x_1=-2$ и/или $x_2=0$), в то время как отрезок $[2;\ 3]$ должен лежать «строго» правее точки x_2 (ситуация $x_2=2$ исключается) (рис. 2.21).

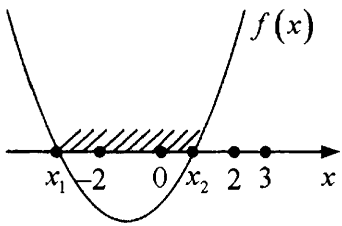


Рис. 2.21

Поэтому приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(-2)\le 0; \\ f(0)\le 0; \\ f(2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-\dfrac{2a}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}\le 0; \\ 4+\dfrac{2a}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}>0; \\ -\dfrac{a}{a+2}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+8}{a+2}\le 0; \\ \dfrac{5a+8}{a+2}>0; \\ \dfrac{a}{a+2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [-8;-2) \text{ (рис. 2.22).}$$

Ответ: $\left[-8;\ -\dfrac{18}{11}\right]$.

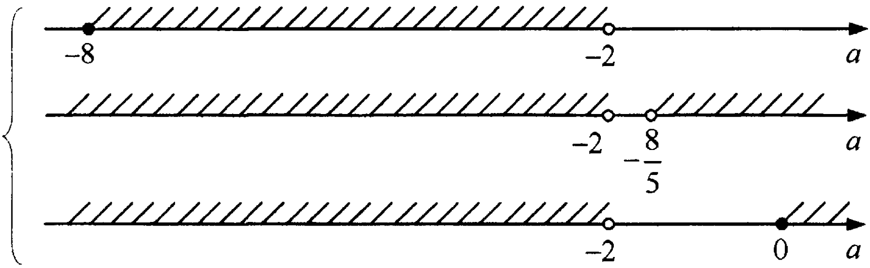


Рис. 2.22

Решим еще несколько задач, в которых графическая интерпретация квадратных трехчленов является ключевой в решении.

Задача 23. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 3; \\ y^2 + x = 2? \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} y = 3 - x^2; \\ x = 2 - y^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает параболу с вершиной в точке $(0;\ 3)$, пересекающую ось Ox в точках $(-\sqrt{3};\ 0)$ и $(\sqrt{3};\ 0)$. Второе уравнение также задает параболу (относительно аргумента y) с вершиной в точке $(2;\ 0)$, пересекающую ось Oy в точках $(0;\ -\sqrt{2})$ и $(0;\ \sqrt{2})$. Так как эти параболы пересекаются в четырех точках, то исходная система имеет ровно 4 решения (рис. 2.23).

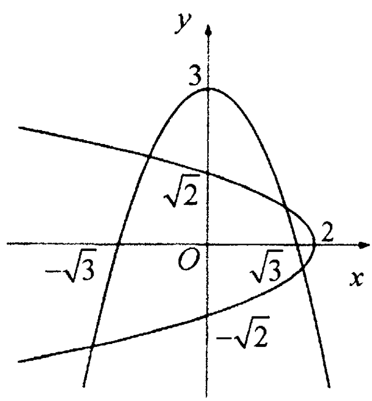


Рис. 2.23

Задача 24. Найти значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2x - a \le 0; \\ x^2 - 4x + 6a \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = \dfrac{4x - x^2}{6}$. Теперь удобно записать систему в виде двойного неравенства: $f(x) \le a \le g(x)$. Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (рис. 2.24) Очевидно, наличие хотя бы одного решения означает выполнимость неравенства $f(x) \le g(x)$, которое справедливо только на промежутке $\left[-\dfrac{8}{7}; 0\right]$ (см. рис. 2.24). Отметим также, что точка $(-1; -1)$ является вершиной параболы $y = f(x)$.

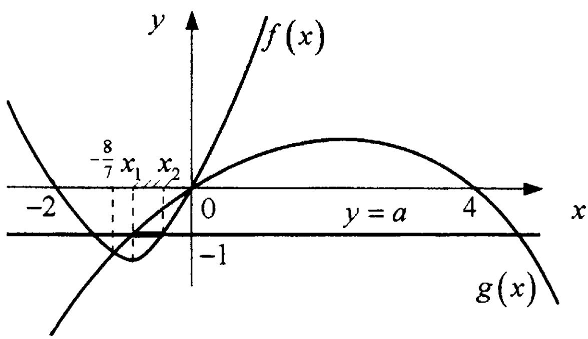


Рис. 2.24

Проведем прямую $y = a$ для некоторого $a \in [-1; 0]$. На промежутке $\left[-\dfrac{8}{7}; 0\right]$ эта прямая пересекает $y = f(x)$ и $y = g(x)$ соответственно в точках с абсциссами x_1 и x_2. Как видно из рис. 2.24, отрезок $[x_1; x_2]$ является решением неравенства $f(x) \le a \le g(x)$. Теперь ясно, что ввиду требования единственности решения надо найти такое положение горизонтальной прямой $y = a$, при котором отрезок $[x_1; x_2]$ схлопнется в точку. Последнее возможно только при $a = -1$ и $a = 0$.

§ 2.3. Уравнения и неравенства с модулями

Можно условно выделить четыре основных приема раскрытия модулей: 1) по определению; 2) по стандартным схемам; 3) методом интервалов; 4) с помощью метода «скрытой подсказки». Искусство решающего как раз и заключается в том, чтобы в каждом конкретном случае правильно выбрать нужный прием (или их комбинацию). Далее мы продемонстрируем каждый подход на конкретной задаче. Но вначале приведем несколько общих рекомендаций.

- Раскрывать модуль по определению имеет смысл только в случае одного модуля в уравнении (неравенстве).
- Стандартные схемы эффективны только при наличии не более двух модулей, причем в случае двух модулей уравнение (неравенство) должно приводиться к виду $|f(x)| \# |g(x)|$, где под символом # подразумевается один из знаков $=, >, \geq, \leq, <$.
- Метод интервалов универсален: ему подвластны практически любые уравнения (неравенства) с модулями. Однако во многих случаях его применение становится настолько громоздким, что на решение одной задачи может уйти больше времени, чем его отводится на тестирование в целом. В таких случаях на помощь приходит наиболее искусный из перечисленных приемов, который мы условно называем здесь методом «скрытой подсказки».

Полезно помнить, что метод интервалов выручает в следующих ситуациях:

- под знаком модуля встречаются не только линейные функции, но и квадратичные, кубические, показательные и пр.;
- формулировка задачи не обязательно сводится к решению уравнения или неравенства.

Задача 1. Найти количество целых чисел, принадлежащих области значений функции $y=\left|x^2+x-6\right|+\left|x^2+x-12\right|$, заданной на отрезке $[-5;\,5]$.

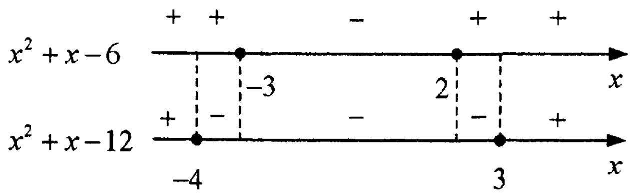


Рис. 2.25

Решение. Методом интервалов раскроем модули (рис. 2.25).

1. $\begin{cases} x\in[-5;\,-4]\cup[3;\,5]; \\ y=\left(x^2+x-6\right)+\left(x^2+x-12\right)=2x^2+2x-18. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x\in(-4;\,-3]\cup[2;\,3); \\ y=\left(x^2+x-6\right)-\left(x^2+x-12\right)=6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x\in(-3;\,2); \\ y=-\left(x^2+x-6\right)-\left(x^2+x-12\right)=-2x^2-2x+18. \end{cases}$

Теперь построим график исходной функции на отрезке $[-5;\,5]$ (рис. 2.26).

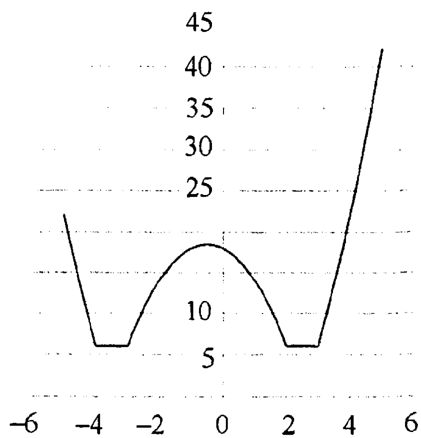


Рис. 2.26

Из графика видно, что областью значений данной функции является отрезок $[6;\ 42]$, где $6 = y(-5)$, $42 = y(5)$. Поэтому искомое количество целых чисел из отрезка $[6;\ 42]$ равно $42-6+1=37$.

Приведем схемы решения частных случаев уравнений и неравенств с модулями, которые намного эффективнее стандартных схем и метода интервалов.

1. $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x)\ge 0$ и $f|(x)| \le f(x) \Leftrightarrow f(x)\ge 0$.

Например:

$$|x^2+4x-12| = x^2+4x-12 \Leftrightarrow x^2+4x-12\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-6]\cup[2;+\infty).$$

2. $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x)\le 0$. Например:

$$|x^2+4x-12| = 12-4x-x^2 \Leftrightarrow x^2+4x-12\le 0 \Leftrightarrow x\in[-6;2].$$

3. $|f(x)|+|g(x)| \le |f(x)+g(x)| \Leftrightarrow$

$|f(x)|+|g(x)| = |f(x)+g(x)| \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\ge 0$. Например:

$$|6-x|+|x|\le 6 \Leftrightarrow |6-x|+|x|=6 \Leftrightarrow (6-x)x\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0;6].$$

4. $|f(x)| > f(x) \Leftrightarrow f(x)<0$. Например:

$$|x^2+4x-12| > x^2+4x-12 \Leftrightarrow x^2+4x-12<0 \Leftrightarrow x\in(-6;2).$$

5. $|f(x)| \ge f(x) \Leftrightarrow x\in(-\infty;+\infty)$.

6. $|f(x)| < f(x) \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Задача 2. Найти наименьший целый корень уравнения

$$\sqrt{(2x-7)^6} = 8x^3-84x^2+294x-343.$$

Решение. Поскольку $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$, то $\sqrt{\left((2x-7)^3\right)^2} =$ $=|2x-7|^3$. При этом заметим, что

$$8x^3-84x^2+294x-343 = (2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 7+3\cdot(2x)\cdot 7^2-7^3 = (2x-7)^3.$$

Теперь исходное уравнение можно записать в виде $|2x-7|^3=(2x-7)^3$. Получили уравнение вида $|f(x)|=f(x)$, которое равносильно неравенству $f(x)\geq 0$. Поэтому

$$|2x-7|^3=(2x-7)^3 \Leftrightarrow (2x-7)^3\geq 0 \Leftrightarrow 2x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{7}{2},$$

т. е. решением уравнения является промежуток $[3{,}5;+\infty)$. Наименьший целый корень уравнения равен 4.

Задача 3. Найти количество целых корней уравнения

$$\left|\frac{x+3}{x}\right|+|x|=\frac{x^2+x+3}{|x|},$$

не превосходящих 30.

Решение. Метод интервалов не подведет и в этом случае. Однако если заметить особенность этого уравнения, которое можно записать в виде $|f(x)|+|g(x)|=|f(x)+g(x)|$, где $f(x)=\frac{x+3}{x}$, $g(x)=x$, то можно получить более простое решение этого уравнения, сведя его к равносильному неравенству:

$$f(x)\cdot g(x)\geq 0:\ \frac{x+3}{x}\cdot x\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3; \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3;\,0)\cup(0;\,+\infty).$$

Итак, количество целых решений, не превосходящих 30, равно 33.

Самый искусный способ раскрытия модулей — **метод скрытой подсказки** — уместен там, где стандартные методы решения неэффективны. Этот прием основан на обнаружении подсказок для определения знаков подмодульных выражений. Он не требует виртуозных технических ухищрений, но предполагает умение определять знаки стоящих под модулями выражений в условиях «окружающей среды», т. е. по виду других присутствующих в задаче выражений.

Отметим, что раскрытие модулей в частных случаях, описанных выше, также основано на методе скрытой подсказки.

Задача 4. Найти сумму корней уравнения или корень, если он единственный:

$$|x-2|=\frac{|3x-4|+x^2-12|x|+36}{x-5}.$$

Решение. Это уравнение можно было бы решить методом интервалов, раскрывая модули на каждом из четырех промежутков: $(-\infty;\,0]$, $\left(0;\frac{4}{3}\right]$, $\left(\frac{4}{3};2\right]$, $(2;+\infty)$. Однако за счет наблюдательности постараемся избежать кропотливого перебора вариантов. Запишем данное уравнение в виде $|x-2|=\frac{|3x-4|+\left(|x|-6\right)^2}{x-5}$, из которого усматриваем «подсказку»: знаменатель $x-5$ больше нуля, поскольку неотрицательными являются числитель и левая часть уравнения. Итак, $x>5$, а значит, подмодульные выражения $x,\ x-2,\ 3x-4$ положительные и потому $|x-2|=x-2,\ |x|=x,$ $|3x-4|=3x-4$. Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x>5; \\ x-2=\dfrac{3x-4+x^2-12x+36}{x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5; \\ (x-2)(x-5)=x^2-9x+32 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>5; \\ 2x=22 \end{cases} \Leftrightarrow x=11.$$

Задача 5. Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+|x+3|-4}{\sqrt{7-x^2}}\le 0$.

Решение. Поскольку $7-x^2>0$, то $x\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)$. При таких значениях x подмодульное выражение $x+3$ положительно (это первая «подсказка»). Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x\in\left(-\sqrt{7};\,\sqrt{7}\right); \\ |x-1|+(x+3)-4\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\sqrt{7};\,\sqrt{7}\right); \\ |x-1|+(x-1)\le 0. \end{cases}$$

А вот и вторая «подсказка»: из вида второго неравенства ясно, что выражение $x-1$ меньше или равно 0, а значит, модуль $|x-1|$ раскрывается со знаком «минус», т. е.

$$|x-1|+x-1\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-(x-1)+(x-1)\le 0;\\ x-1\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le 0;\\ x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow x\le 1.$$

Итак, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}x\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right);\\ x\le 1,\end{cases}$$

т. е. $x\in\left(-\sqrt{7};1\right]$.

Задача 6. Решить неравенство

$$\left|x^7-2\right|+|x|+|x+5|+\left|x^3-13\right|+1\ge x.$$

Решение. Сразу обращает на себя внимание обилие модулей в этом неравенстве. Присмотритесь: если $x\le 0$, то левая часть, очевидно, больше правой и, следовательно, при всех $x\le 0$ неравенство верно. Если же $x>0$, то $|x|=x$, $|x+5|=x+5$, поэтому

$$\begin{cases}x>0;\\ \left|x^7-2\right|+x+(x+5)+\left|x^3-13\right|+1\ge x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0;\\ \left|x^7-2\right|+\left|x^3-13\right|+x+6\ge 0.\end{cases}$$

Поскольку неравенство $\left|x^7-2\right|+\left|x^3-13\right|+x+6\ge 0$ выполняется при всех $x>0$, то последняя система равносильна неравенству $x>0$. Таким образом, решением исходного неравенства является промежуток $(-\infty;+\infty)$.

Имеются уравнения и неравенства с модулями, в которых стандартные подходы раскрытия модуля приводят к очень громоздким вычислениям и утомительному перебору случаев, а метод скрытой подсказки в принципе не применим. В подобных случаях спасительным кругом служит **графическая интерпретация задачи**.

Задача 7. Решить неравенство $\dfrac{20-4|x|}{|x^2+11x+21|-3}\le 1$.

Решение. Не стоит здесь прибегать к методу интервалов, т. к. придется решать четыре системы рациональных уравнений, а иррациональные корни квадратного трехчлена $x^2+11x+21$ усугубят ситуацию. Прибегнем к графическому методу.

Обозначим $g(x)=|x^2+11x+21|-3$, $h(x)=20-4|x|$. Тогда наше неравенство принимает вид $\dfrac{h(x)}{g(x)}\le 1$. График функции $y=h(x)$ изображен на рис. 2.27.

Отдельно построим график функции $y=g(x)$. Начнем с графика $y_1=|x^2+11x+21|$, схема которого дана на рис. 2.28 (при этом не надо торопиться находить точки пересечения с осью абсцисс — они могут не понадобиться).

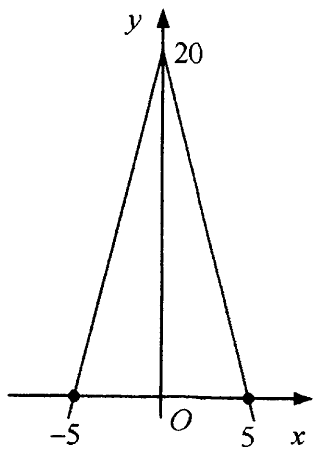


Рис. 2.27

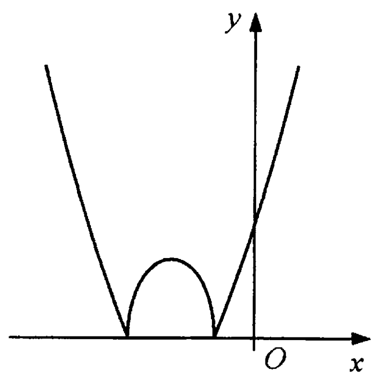


Рис. 2.28

Для построения графика функции $y = g(x)$ удобно предварительно найти нули функции $g(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 11x + 21 = 3; \\ x^2 + 11x + 21 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \quad x = -9,\ -8,\ -3,\ -2.$$

Опуская график, изображенный на рис. 2.28 на 3 единицы вниз, получим график функции $y = g(x)$ на рис. 2.29.

Теперь расположим графики функций $y = h(x)$ и $y = g(x)$ на одной координатной плоскости (рис. 2.30). Предварительно заметим, что $h(-8) = -12 < -3 = \min g(x)$, а это означает, что эти графики пересекаются точно в двух точках с абсциссами x_1 и x_2 (рис. 2.30).

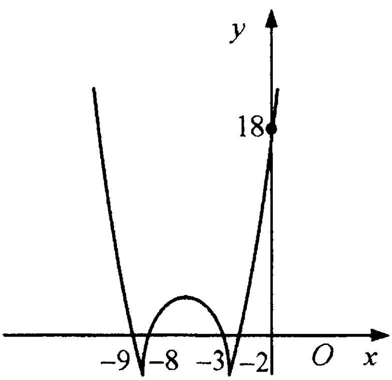


Рис. 2.29

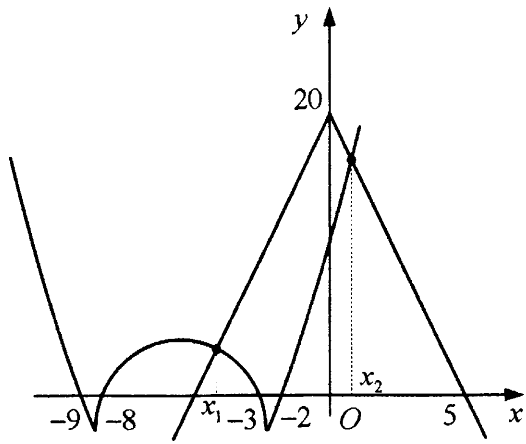


Рис. 2.30

Так как $\dfrac{h(x)}{g(x)} \le 1$, то решениями будут те промежутки, на которых:

- $g(x)$, $h(x)$ *разных знаков*;
- $g(x)$, $h(x)$ одного знака, но $h(x)$ по модулю меньше $g(x)$.

Как легко видеть из рис. 2.30, такими промежутками являются: $(-\infty; -9) \cup (-8; x_1) \cup (-3; -2) \cup [x_2; +\infty)$. Остается найти x_1 и x_2. Так как при x_1 значения выражений $x^2 + 11x + 21$ и x отрицательны (что видно из графиков), то $-(x_1^2 + 11x_1 + 21) - 3 = 20 + 4x_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = -4$. Так как при x_2 значения выражений $x^2 + 11x + 21$ и x положительны, то $(x_2^2 + 11x_2 + 21) - 3 = 20 - 4x_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{-15 + \sqrt{233}}{2}$.

Итоговый ответ: $(-\infty; -9) \cup (-8; -4) \cup (-3; -2) \cup \left[\dfrac{-15 + \sqrt{233}}{2}; +\infty\right)$.

В задачах, где требуется найти значения параметра, при которых уравнение (неравенство) имеет какое-то количество решений, **графический метод** — это первое, о чем следует подумать, поскольку альтернативные подходы либо невозможны в принципе, либо малоэффективны.

Задача 8. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a - 6 + |x - 1|)(a - x^2 + 2x) = 0$: 1) имеет ровно три корня; 2) ровно два корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a = 6 - |x - 1|; \\ a = x^2 - 2x. \end{array}\right.$$

Задача сводится к построению графиков функций $y = 6 - |x - 1|$ и $y = x^2 - 2x$ с последующим рассмотрением горизонтальных прямых $y = a$, пересекающих эти графики.

Как видно из рис. 2.31, $y = a$ пересекает графики ровно три раза при $a = 6$ или $a = -1$ (точки с ординатами 6 и -1). Пересечений будет ровно два, если $a > 6$ или $a < -1$, а также в двух точках $(\pm x_0, y_0)$, где сами графики пересекаются. Поэтому осталось найти ординату y_0 этих точек из равенства

$6-|x_0-1|=x_0^2-2x_0$: $x_0=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow y_0=\dfrac{13-\sqrt{29}}{2}$. Итоговый ответ: $(-\infty;\,-1)\cup(6;\,+\infty)\cup\left\{\dfrac{13-\sqrt{29}}{2}\right\}$.

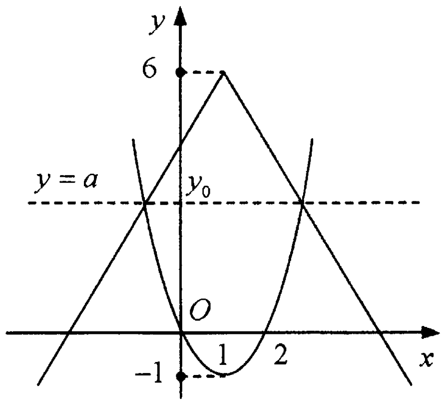


Рис. 2.31

Задача 9. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|x-2|-2y=0; \\ x^2-2x+y^2-2ay=-2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 2y=|x|+|x-2|; \\ (x-1)^2+(y-a)^2=(a-1)^2. \end{cases}$$

Раскроем модули в первом уравнении методом интервалов (рис. 2.32).

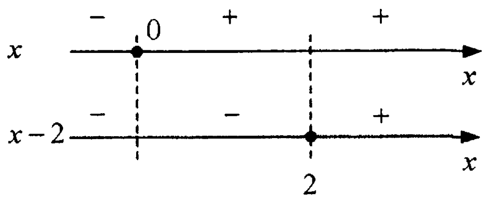


Рис. 2.32

1. $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0]; \\ 2y = -x-(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ 0]; \\ y = -x+1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x \in [0;\ 2]; \\ 2y = x-(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\ 2]; \\ y = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x \in [2;\ +\infty); \\ 2y = x+(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2;\ +\infty); \\ y = x-1. \end{cases}$

Итак, первое уравнение задает ломаную (рис. 2.33).

Второе уравнение задает множество окружностей с центрами $(1;a)$ и радиусами $|a-1|$. Задача сводится к нахождению тех из них, которые имеют ровно 3 общие точки с ломаной на рис. 2.33. Так как центры этих окружностей лежат на оси симметрии ломаной (это прямая $x=1$), то возможна только ситуация, когда центр окружности $O(1;a)$ лежит выше прямой $y=1$, а сама окружность касается трех ветвей ломаной (рис. 2.34).

Итак, $a>1$, радиус окружности равен $a-1$ и, следовательно, $OK = a$, $OP = a-1 = \dfrac{OK}{\sqrt{2}} \Rightarrow a-1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 2+\sqrt{2}$.

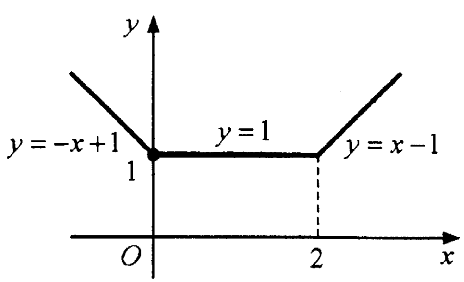


Рис. 2.33

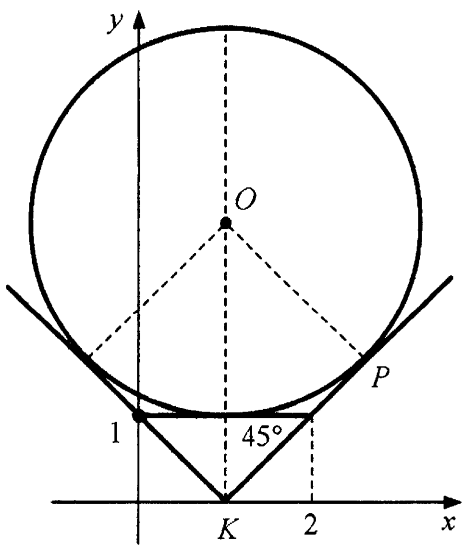


Рис. 2.34

Особую группу задач составляют задачи, в которых требуется найти значения параметра, при которых имеется фиксированное число решений n (одно или несколько), а присутствующие в условии уравнения (неравенства) не изменяются либо при замене на противоположный знак переменных (симметрия относительно знака), либо при перестановке переменных (симметрия относительно перестановки). При этом из-за симметрии сразу станет ясно, что число решений не превосходит n только при очень специфических значениях переменных.

Алгоритм решения **«симметричных» задач** следующий:

1. Используя симметрию, определить те значения переменных (как правило, они будут нулевыми), при которых число решений все же останется требуемым, т. е. равным n.

2. Подставить эти значения переменных в уравнения (неравенства), определив необходимые значения параметра.

3. Выяснить, являются ли найденные необходимые значения параметра достаточными.

Задача 10. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+3y^2\right)\left(y^2-25\right)\ge 0;\\ |x+2+y|+|y+2-x|\le a\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Так как $x^2-xy+3y^2\ge 0$ при любых x, y, причем равенство нулю достигается только при $x=y=0$, то исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=y=0;\\ |y|\ge 5;\end{array}\right.\\ |y+2+x|+|y+2-x|\le a.\end{cases}$$

Заметим, что если (x_0,y_0) — решение этой системы, то пара $(-x_0,y_0)$ — также решение. Ввиду требования единственности решения, отсюда следует, что $-x_0=x_0$, и значит, $x_0=0$.

Итак, необходимым условием единственности решения является единственность решения системы

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |y| \ge 5; \\ y = 0; \end{array}\right. \\ |y+2| + |y+2| \le a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \in (-\infty; -5] \cup [0] \cup [5; +\infty); \\ y \in \left[-\dfrac{a}{2} - 2;\ \dfrac{a}{2} - 2\right]. \end{cases}$$

Ввиду неотрицательности параметра a, $-\dfrac{a}{2} - 2 < 0$. Поэтому последние два множества для y пересекаются в единственной точке, если и только если

$$\begin{cases} -5 < -\dfrac{a}{2} - 2; \\ 5 > \dfrac{a}{2} - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \in [4;\ 6).$$

Убедимся теперь, что для любого a из $[4;\ 6)$ исходная система имеет единственное решение.

Очевидно, $(0;0)$ — решение. Остается показать, что система

$$\begin{cases} |y| \ge 5; \\ |y + 2 + x| + |y + 2 - x| \le a \end{cases}$$

не имеет решений при $a \in [4;\ 6)$. Заметим, что

$$|y+2+x| + |y+2-x| \ge |y+2+x+y+2-x| = |2y+4| \ge 2|y| - 4.$$

Но $2|y| - 4 \ge 6$ при $|y| \ge 5$. Получаем, что левая часть $|y+2+x| + |y+2-x|$ неравенства $|y+2+x| + |y+2-x| \le a$ превосходит правую, противоречие.

Итак, искомый ответ: $[4;\ 6)$.

Во многих задачах с параметрами, ориентированных на графическое решение, существуют *«пограничные» расположения графиков функций*, которые разделяют случаи существования и отсутствия корней уравнения (неравенства). Такие граничные ситуации зачастую определяются с помощью **касательных к графикам функций**. Напомним уравнение касательной.

Уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет следующий вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение невертикальной касательной (если $f'(x_0)$ существует); $x = x_0$ — уравнение вертикальной касательной (если $f'(x_0) = \infty$).

Производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной, проведенной к графику этой функции в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (рис. 2.35).

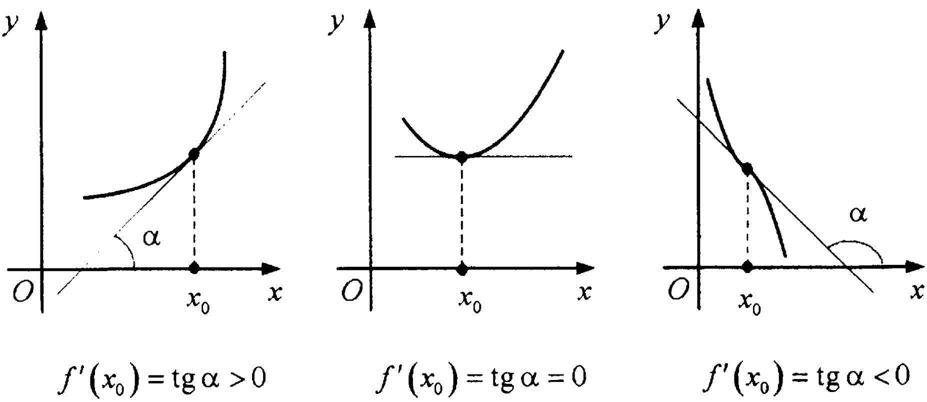


Рис. 2.35

Задача 11. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|ax^2 - 5| = |3ax| + |2a|$ имеет хотя бы одно действительное решение.

Решение. Так как при $a = 0$ решений нет, то исходное уравнение равносильно $\left|x^2 - \dfrac{5}{a}\right| = |3x| + 2$.

Графики функций $y_1 = \left|x^2 - \frac{5}{a}\right|$ симметричны относительно оси ординат, и их вид и расположение зависят от знака параметра a: на рис. 2.36 две верхние параболы соответствуют отрицательному значению a, а нижняя — положительному.

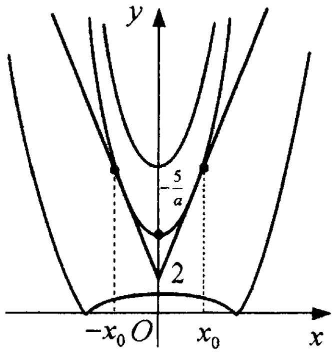


Рис. 2.36

На рис. 2.36 также изображен график функции $y = |3x| + 2$ и средняя парабола $y = x^2 - \frac{5}{a}$, касающаяся ветвей ломанной $y_2 = |3x| + 2$. Этот случай определяет граничное положение параболы, при котором еще возможно пересечение графиков y_1 и y_2, т. е. еще возможно наличие решений в уравнении $\left|x^2 - \frac{5}{a}\right| = |3x| + 2$. Поэтому найдем значение a, при котором это граничное положение достигается.

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2 - \frac{5}{a}$ в точке с абсциссой x_0 равен $2x_0$, откуда

$$2x_0 = 3 \Rightarrow x_0 = 1,5 \Rightarrow x_0^2 - \frac{5}{a} = 3x_0 + 2 \Rightarrow -\frac{5}{a} = \frac{17}{4}.$$

Итак, при $-\frac{5}{a} > \frac{17}{4}$ график $y_1 = \left|x^2 - \frac{5}{a}\right|$ располагается выше своего граничного случая, и потому уравнение не имеет решений;

а при $-\dfrac{5}{a}<\dfrac{17}{4}$ график $y_1=\left|x^2-\dfrac{5}{a}\right|$ располагается ниже своего граничного случая, и потому уравнение имеет решения. Остается решить неравенство $-\dfrac{5}{a}\le\dfrac{17}{4}$ и получить ответ $\left(-\infty;-\dfrac{20}{17}\right]\cup(0;+\infty)$.

§ 2.4. Иррациональные уравнения и неравенства

Основной идеей решения иррациональных уравнений (неравенств) является их преобразование к рациональным уравнениям (неравенствам). При этом основным средством устранения радикалов является **возведение обеих частей уравнения** (неравенства) **в подходящую степень**.

Избавляясь от иррациональности, нужно знать о подстерегающих вас опасностях.

- Возведение в четную степень часто приводит к посторонним решениям, тогда как слишком вольное обращение с радикалами (введение под знак радикала, вынесение из-под знака радикала, разложение радикала в произведение радикалов и т. д.) может привести к невосполнимой потере решений.
- Чрезмерное увлечение возведением в степень может привести к громоздким выражениям, не поддающимся дальнейшему упрощению.

Опасности первого типа можно избежать, используя стандартные способы соблюдения равносильности преобразований уравнений и неравенств. Можно, конечно, игнорировать равносильность преобразований, уповая на последующую проверку полученных решений. Однако стоит иметь в виду, что во многих случаях такая проверка либо затруднительна, либо невозможна по причине бесконечного множества корней.

Вспомним стандартные схемы решения иррациональных уравнений и неравенств, сохраняющих равносильность (табл. 2.2).

Таблица 2.2

$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x); \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$	$\sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$
$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^{2n}(x); \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$	$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g^{2n+1}(x)$
$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x); \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$	$\sqrt{f(x)}\le\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le g(x); \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0,\ f(x)\ge 0; \\ f(x)<g^2(x) \end{cases}$	$\sqrt{f(x)}\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0,\ f(x)\ge 0; \\ f(x)\le g^2(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0; \\ f(x)\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge 0; \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$	$\sqrt{f(x)}\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0; \\ f(x)\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge 0; \\ f(x)\ge g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$
$\sqrt[3]{f(x)}<\sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$	$\sqrt[3]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow f(x)<g^3(x)$

Приведем пример решения стандартного неравенства.

Задача 1. Решить неравенство $\sqrt{\sqrt{6x+\frac{49}{4}}+\frac{7}{2}} \geq x$.

Решение. Если $x \in \left[-\frac{49}{24};0\right]$, то неравенство выполняется.

При $x>0$, возведя обе части в квадрат, получим неравенство стандартного вида: $\sqrt{6x+\frac{49}{4}} \geq x^2-\frac{7}{2}$. При $x \in \left[0;\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ оно выполняется. В противном случае имеем систему:

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{7}{2}}; \\ 6x+\frac{49}{4} \geq \left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{7}{2}}; \\ x\left(x^3-7x-6\right) \leq 0. \end{cases}$$

Разложим многочлен x^3-7x-6 на множители. Очевидно, $x=-1$ — его корень. Применив схему Горнера, получим $x^3-7x-6=(x+1)\left(x^2-x-6\right)$.

Итак, последняя система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{7}{2}}; \\ x(x+1)(x-3)(x+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{7}{2}}; \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\sqrt{\frac{7}{2}};\ 3\right].$$

Итоговый ответ: $\left[-\frac{49}{24};\ 3\right]$.

А теперь напомним стандартные способы соблюдения равносильности преобразования уравнений (неравенств) с радикалами.

Пусть n и k — натуральные числа. Тогда

$$y=\sqrt[2n]{\left(f(x)\right)^{2nk}} \Leftrightarrow y=\left|f(x)\right|^k;$$

$$y=\left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2nk} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^k(x); \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Например: $\sqrt[4]{(x-5)^{12}}=|x-5|^3$; $\left(\sqrt{x+3}\right)^6=(x+3)^3$ при $x\geq -3$.

$$y=\sqrt[2n+1]{\left(f(x)\right)^{(2n+1)k}} \Leftrightarrow y=f^k(x);$$

$$y=\left(\sqrt[2n+1]{f(x)}\right)^{(2n+1)k} \Leftrightarrow y=f^k(x).$$

Например: $\sqrt[3]{(x-5)^9}=(x-5)^3$, $\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^9=(x+3)^3$.

Будем называть уравнения вида $f(x)g(x)=0$ **смешанными**, если один из множителей в уравнении является рациональной функцией, а другой — иррациональной. При таких же условиях неравенства $f(x)g(x)>0$ (≥ 0, <0, ≤ 0) будем также называть **смешанными**.

Схема решения смешанного уравнения:

$$f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=0; \\ g(x)=0; \end{array}\right. \\ \text{область определения функции } f(x); \\ \text{область определения функции } g(x). \end{array}\right.$$

Схемы решения смешанных неравенств:

$$f(x)g(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0; \\ g(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0; \\ g(x)<0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad f(x)g(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0; \\ g(x)<0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0; \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Например, $(x-2)\sqrt{16-x^2}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<0; \\ \sqrt{16-x^2}>0. \end{cases}$

$$f(x)g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)g(x)=0; \\ f(x)g(x)>0. \end{array}\right.$$

$$f(x)g(x)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)g(x)=0; \\ f(x)g(x)<0. \end{array}\right.$$

Для упрощения выражений с корнями $\sqrt[2n]{}$ четной степени $2n$ используются следующие равносильные преобразования:

$$y=\sqrt[2n]{f(x)g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[2n]{|f(x)|}\sqrt[2n]{|g(x)|}; \\ f(x)g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Например: $\sqrt[4]{(x-2)(x+3)}=\sqrt[4]{|x-2|}\sqrt[4]{|x+3|}$ при условии, что $(x-2)(x+3)\ge 0$.

$$y=\sqrt[2n]{\frac{f(x)}{g(x)}} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt[2n]{|f(x)|}}{\sqrt[2n]{|g(x)|}}; \\ f(x)g(x)\ge 0. \end{cases}$$

$$y=\sqrt[2n]{f(x)}\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[2n]{f(x)g(x)}; \\ f(x)\ge 0; \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

$$y=\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\sqrt[2n]{g(x)}} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[2n]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}; \\ f(x)\ge 0; \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Например: $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$, при условии, что $\begin{cases} x-2\ge 0; \\ x+3>0. \end{cases}$

В процессе решения уравнений с радикалами постарайтесь не перепутать схему преобразования радикала четной степени $\sqrt[2n]{f(x)g(x)}$ в произведение двух радикалов $\sqrt[2n]{f(x)}\sqrt[2n]{g(x)}$ с обратным преобразованием выражения $\sqrt[2n]{f(x)}\sqrt[2n]{g(x)}$ в выражение $\sqrt[2n]{f(x)g(x)}$.

Задача 2. Решить уравнение

$$-5\cdot\sqrt[6]{(2-x)(x-3)}+\sqrt[3]{x-2}+6\sqrt[3]{x-3}=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}-5\cdot\sqrt[6]{|2-x|}\cdot\sqrt[6]{|x-3|}+\sqrt[3]{x-2}+6\sqrt[3]{x-3}=0;\\(2-x)(x-3)\ge 0.\end{cases}$$

Так как $(2-x)(x-3)\ge 0$, то $x\in[2;3]$, поэтому $|2-x|=x-2$, $|x-3|=3-x$. Тогда

$$\begin{cases}-5\cdot\sqrt[6]{x-2}\cdot\sqrt[6]{3-x}+\sqrt[3]{x-2}-6\sqrt[3]{3-x}=0;\\2\le x\le 3.\end{cases}$$

Сделаем замену $u=\sqrt[6]{x-2}$, $v=\sqrt[6]{3-x}$. Система примет вид:

$$\begin{cases}-5uv+u^2-6v^2=0;\\2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{u}{v}\right)^2-5\left(\dfrac{u}{v}\right)-6=0;\\2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{u}{v}=6;\\\dfrac{u}{v}=-1;\end{array}\right.\\2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt[6]{x-2}=6\sqrt[6]{3-x};\\\sqrt[6]{x-2}=-\sqrt[6]{3-x};\end{array}\right.\\2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-2=6^6\cdot(3-x);\\x\in\varnothing;\end{array}\right.\\2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(6^6+1\right)=3\cdot 6^6+2;\\2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=\frac{3\cdot 6^6+2}{6^6+1}=\frac{139970}{46657}.$$

Не злоупотребляйте использованием схем в тех ситуациях, когда возможны упрощения с помощью «подсказок». Напротив, при решении смешанных уравнений и неравенств не пытайтесь «упростить» приведенные схемы решения: такие попытки обычно заканчиваются «упрощенными» ответами.

Задача 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-8x+12}-2x=2\sqrt{6-x}-x\sqrt{2-x}.$$

Решение. Так как $x^2-8x+12=(x-6)(x-2)$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{(x-6)(x-2)}-2x=2\sqrt{6-x}-x\sqrt{2-x}.$$

Из областей определения радикалов $\sqrt{6-x}$ и $\sqrt{2-x}$ следует, что $x\le 2$. Поэтому $\sqrt{(x-2)(x-6)}=\sqrt{2-x}\sqrt{6-x}$. Таким образом, исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{6-x}\cdot\sqrt{2-x}-2x=2\sqrt{6-x}-x\sqrt{2-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{6-x}\cdot\sqrt{2-x}-2\sqrt{6-x}\right)+\left(x\sqrt{2-x}-2x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6-x}\left(\sqrt{2-x}-2\right)+x\left(\sqrt{2-x}-2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2-x}-2\right)\left(\sqrt{6-x}+x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}-2=0;\\ \sqrt{6-x}+x=0;\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}=2;\\ \sqrt{6-x}=-x;\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{2-x}=2;\\ x\le 2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{6-x}=-x;\\ x\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x=4;\\ x\le 2;\end{cases}\\ \begin{cases}6-x=x^2;\\ -x\ge 0;\\ x\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2;\\ x\le 2;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x-6=0;\\ x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2;\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3;\\ x=2;\end{array}\right.\\ x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2;\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{9-(x-8)\sqrt{1-(x-3)\sqrt{9+(x+2)(x-4)}}}=1-2x.$$

Решение. Нетрудно предугадать, что попытка устранить три радикала, присутствующих в этом уравнении, троекратным возведением в квадрат приведет (со многими техническими сложностями) к уравнению 8-й степени.

Чтобы избежать этого неприятного исхода, попробуем поступить по-другому, а именно: будем «снимать корни изнутри», начиная с внутреннего радикала. Его подкоренное выражение имеет вид: $9+(x+2)(x-4)=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Поскольку $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$, то хочется в самом уравнении найти «подсказку», чтобы раскрыть этот модуль. Исходя из вида данного уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$, можно утверждать, что $g(x)\ge 0$, т. е. $1-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le\frac{1}{2}$. Таким образом, для $x\le\frac{1}{2}$ получим: $|x-1|=-(x-1)=1-x$.

Теперь рассмотрим выражение, стоящее под «средним» радикалом: $1-(x-3)(1-x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$. С учетом неравенства $x\le\frac{1}{2}$ получим: $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=-(x-2)=2-x$. Аналогично теперь преобразуем выражение, стоящее под «внешним» радикалом: $9-(x-8)(2-x)=x^2-10x+25=(x-5)^2$, при этом $\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|=-(x-5)=5-x$, поскольку $x\le\frac{1}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}5-x=1-2x;\\ x\le\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4;\\ x\le\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=-4.$$

Задача 5. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\le\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

Решение. Перенесем все в левую часть и вынесем за скобки общий множитель обоих слагаемых $\sqrt{8-2x-x^2}$:

$$\sqrt{8-2x-x^2}\left(\frac{1}{x+10}-\frac{1}{2x+9}\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8-2x-x^2}\cdot\frac{x-1}{(x+10)(2x+9)}\le 0.$$

Получили смешанное неравенство.

Вот типичный образец *ложного рассуждения* по поводу его решения: так как $\sqrt{8-2x-x^2}\ge 0$, то $\dfrac{x-1}{(x+10)(2x+9)}\le 0$ и, таким образом, с учетом области допустимых значений (ОДЗ) $8-2x-x^2\ge 0$, наше неравенство «равносильно» системе

$$\begin{cases}8-2x-x^2\ge 0;\\ \dfrac{x-1}{(x+10)(2x+9)}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x+4)(x-2)\le 0;\\ \dfrac{x-1}{(x+10)(2x+9)}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x\in[-4;\,1]\ \text{(рис. 2.37).}$$

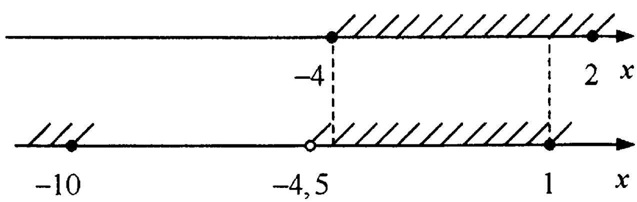


Рис. 2.37

Получен *неверный ответ*.

Чтобы решить это неравенство *правильно*, применим стандартную схему:

$$1.\ \begin{cases}\left[\begin{aligned}&\sqrt{8-2x-x^2}=0;\\&x-1=0;\end{aligned}\right.\\ 8-2x-x^2\ge 0;\\ x\ne -10,\ x\ne -4{,}5\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=2;\\&x=-4;\\&x=1;\end{aligned}\right.\\ x\in[-4;\,2]\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in\{-4;\,1;\,2\}.$$

2. $\begin{cases} \sqrt{8-2x-x^2} > 0; \\ \dfrac{x-1}{(x+10)(2x+9)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8<0; \\ \dfrac{x-1}{(x+10)(2x+9)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-4;\, 1)$

(рис. 2.38).

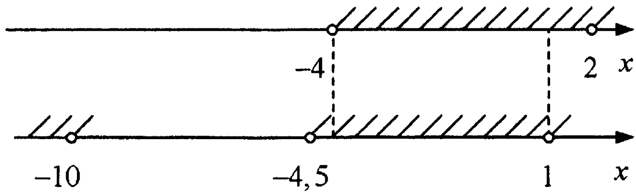


Рис. 2.38

Общим ответом является объединение ответов, полученных в случаях 1 и 2: $x \in [-4;\, 1] \cup \{2\}$.

Опасность второго типа подстерегает тех, кто либо не замечает, либо пренебрегает заменой переменной или не ищет альтернативных путей решения.

Задача 6. Найти разность максимального и минимального корней уравнения $\sqrt[3]{7-x} + \sqrt{2x+6} = 4$.

Решение. Заменой можно убрать любой из радикалов в этом уравнении. Оставшийся корень нужно будет устранить возведением полученного уравнения в степень, соответствующую показателю этого корня. Поэтому, чтобы возводить впоследствии в квадрат, а не в куб, сделаем такую замену: $\sqrt[3]{7-x} = t$, т. е. $x = 7 - t^3$.

Подставим в исходное уравнение:

$$t + \sqrt{2\left(7-t^3\right)+6} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{20-2t^3} = 4 - t.$$

Последнее уравнение возведем в квадрат:

$$\begin{cases} 20-2t^3 = 16-8t+t^2; \\ 4-t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^3+t^2-8t-4=0; \\ t \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t\left(t^2-4\right)+\left(t^2-4\right)=0; \\ t\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(t^2-4\right)\left(2t+1\right)=0; \\ t\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=-2; \\ t=2; \\ t=-\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ t\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow t\in\left\{2;-2;-\frac{1}{2}\right\}.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7-x}=2; \\ \sqrt[3]{7-x}=-2; \\ \sqrt[3]{7-x}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7-x=8; \\ 7-x=-8; \\ 7-x=-\dfrac{1}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=15; \\ x=7\dfrac{1}{8}. \end{array}\right.$$

Разность максимального и минимального корней равна $15-(-1)=16$.

Задача 7. Решить уравнение

$$\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x+7}=t$, $t\ge 0$. Тогда $x+7=t^2 \Rightarrow x=t^2-7$, и уравнение принимает следующий вид:

$$\sqrt{t^2-7+8+2t}+\sqrt{t^2-7+1-t}=4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2-t-6}=4 \Leftrightarrow |t+1|+\sqrt{t^2-t-6}=4.$$

Поскольку $t\ge 0$, то $t+1>0$, а значит, $|t+1|=t+1$. Тогда

$$t+1+\sqrt{t^2-t-6}=4 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-t-6}=3-t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6=(3-t)^2; \\ 3-t\ge 0; \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t=15; \\ 0\le t\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+7}=3 \Leftrightarrow x=9-7=2.$$

Задача 8. Найти сумму корней уравнения

$$\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{7-6x}}{x}+\frac{1}{\sqrt{7-6x}}=0$$

или корень, если он единственный.

Решение. Заметив, что $\frac{2}{x}=2\cdot\frac{\sqrt[4]{7-6x}}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{7-6x}}$, левую часть уравнения можно записать в виде квадрата разности:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{7-6x}}{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{7-6x}}\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[4]{7-6x}}{x}=\frac{1}{\sqrt[4]{7-6x}} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{7-6x}=x;\\ 7-6x\neq 0;\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7-6x=x^2;\\ x\neq\frac{7}{6};\\ x\geq 0;\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+6x-7=0;\\ x>0;\\ x\neq\frac{7}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1;\\ x=-7;\end{array}\right.\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Задача 9. Найти произведение корней уравнения

$$x=\left(\sqrt{9+x}+3\right)\left(\sqrt{9+x}+x^2+8x-23\right)$$

или корень, если он единственный.

Решение. Заметим, что $\left(\sqrt{9+x}+3\right)\left(\sqrt{9+x}-3\right)=x$ при $x\geq -9$. Поэтому исходное уравнение можно записать в виде:

$$\left(\sqrt{9+x}+3\right)\left(\sqrt{9+x}-3\right)=\left(\sqrt{9+x}+3\right)\left(\sqrt{9+x}+x^2+8x-23\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9+x}+3\right)\left(\left(\sqrt{9+x}-3\right)-\left(\sqrt{9+x}+x^2+8x-23\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9+x}+3\right)\left(x^2+8x-20\right)=0.$$

Так как $\sqrt{9+x}+3>0$ при всех $x\geq -9$, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+8x-20=0; \\ x\ge -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-10; \\ x=2; \end{array}\right. \\ x\ge -9 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Рассмотрим уравнение $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=h(x)$, которое равносильно уравнению

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}\right)^3=h^3(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\pm g(x)\pm 3\sqrt[3]{f(x)g(x)}\left(\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}\right)=h^3(x).$$

Если в последнем уравнении заменить выражения $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}$ выражением $h(x)$, то получится следствие исходного уравнения, которое может иметь посторонние корни, причем появление таких посторонних корней — не редкость.

Следующий **критерий** позволяет выяснить, является ли x_0 **посторонним корнем исходного уравнения**. Пусть x_0 — корень уравнения $f(x)\pm g(x)\pm 3\sqrt[3]{f(x)g(x)}h(x)=h^3(x)$. Тогда x_0 является посторонним корнем, если и только если $f(x_0)=g(x_0)=-h^3(x_0)\ne 0$.

Этот критерий выручает в тех случаях, когда проверка полученных значений подстановкой их в уравнение становится чрезвычайно трудоемкой.

Задача 10. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб и заменим сумму $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}$ на 1:

$$(x-1)+(2x-1)+3\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}=1-x\Leftrightarrow(x-1)(2x-1)=(1-x)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)+(x-1)^3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(2x-1+(x-1)^2\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=1. \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что $x=0$ — посторонний корень. Таким образом, $x=1$ — единственный корень уравнения.

Задача 11. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=x\sqrt[3]{2}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб:

$$(x+1)+(x-1)+3\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=2x^3.$$

Сумму $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}$ заменим выражением $x\sqrt[3]{2}$: $2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot x\sqrt[3]{2}=2x^3 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot x\sqrt[3]{2}=2x\left(x^2-1\right)$. Еще раз возведем в куб обе части уравнения:

$$27\left(x^2-1\right)\cdot 2x^2=8x^3\left(x^2-1\right)^3 \Leftrightarrow x^3\left(x^2-1\right)\left(27-4\left(x^2-1\right)^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=\pm 1; \\ \left(x^2-1\right)^2=\dfrac{27}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x\pm 1; \\ x^2-1=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=\pm 1; \\ x=\pm\sqrt{1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}. \end{array}\right.$$

Не составляет труда убедиться подстановкой в исходное уравнение, что числа $x=0$, $x=\pm 1$ являются корнями этого уравнения. Значения $\pm\sqrt{1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ проверить подстановкой в уравнение чрезвычайно сложно. Воспользуемся приведенным критерием. В нашем случае $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$, $h(x)=x\sqrt[3]{2}$. Очевидно, что $f(x_0)\neq g(x_0)$ при любом значении x_0. Поэтому никакие из полученных значений x не могут быть посторонними корнями, т. е. корни уравнения принадлежат множеству $\left\{0;\ \pm 1;\ \pm\sqrt{1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}\right\}$.

Нужно помнить о том, что «изюминкой» решения некоторых типов задач этого параграфа является умение использовать различные свойства функций. К числу таких свойств относятся: знакопостоянство, специфичность области определения, ограниченность множества значений, четность и нечетность.

Задача 12. Найти сумму целых решений неравенства

$$\frac{7+3x^2}{\sqrt{-2x^2+23x-56}}>-5.$$

Решение. Поскольку числитель и знаменатель левой части неравенства положительны, то неравенство с очевидностью выполняется в своей области определения, т. е.

$$-2x^2+23x-56>0 \Leftrightarrow 2x^2-23x+56<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x-3{,}5)<0 \Leftrightarrow x\in(3{,}5;\ 8).$$

Найдем сумму целых решений: $4+5+6+7=22$.

Задача 13. Решить уравнение $\sqrt{x^2-2x-3}=-x^2+4x-3$.

Решение. Уравнение записано в виде $\sqrt{f(x)}=g(x)$, однако использование здесь стандартной схемы решения затруднительно: в результате возведения в квадрат получится громоздкое уравнение 4-й степени.

Попробуем предварительно учесть область определения данного уравнения и неотрицательность его правой части:

$$\begin{cases} f(x)\ge 0; \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

Мы рассчитываем на то, что эта система неравенств либо будет иметь пустое множество решений, либо множество решений будет состоять из конечного числа точек. Итак:

$$\begin{cases} x^2-2x-3\ge 0; \\ -x^2+4x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty); \\ x\in[1;\ 3] \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (рис. 2.39).}$$

Постановка единственной точки $x=3$ из области определения в уравнение обращает его в верное равенство:

$$\sqrt{3^2-3\cdot 2-3}=-3^2+4\cdot 3-3.$$

А это означает, что $x=3$ — корень уравнения.

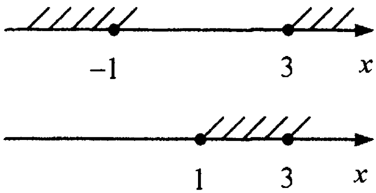


Рис. 2.39

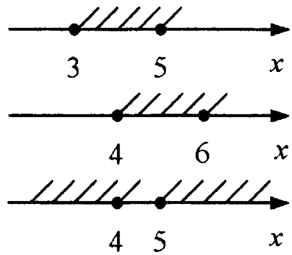


Рис. 2.40

Задача 14. Решить уравнение

$$4\sqrt{8x-x^2-15}+5\sqrt{10x-x^2-24}=5-\sqrt{x^2-9x+20}.$$

Решение. Найдем область определения данного уравнения:

$$\begin{cases} 8x-x^2-15\ge 0; \\ 10x-x^2-24\ge 0; \\ x^2-9x+20\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15\le 0; \\ x^2-10x+24\le 0; \\ x^2-9x+20\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in[3;\ 5]; \\ x\in[4;\ 6]; \\ x\in(-\infty;\ 4]\cup[5;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow\ x\in\{4;\ 5\}\ \text{(рис. 2.40)}.$$

Таким образом, уравнение может иметь своими корнями только точки из множества $\{4;5\}$. Проверим их подстановкой в уравнение: $x=4$ не удовлетворяет уравнению, т. е. корнем не является; подстановка $x=5$ обращает уравнение в верное тождество. Значит, $x=5$ — единственный корень уравнения.

Задача 15. Решить неравенство $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[4]{x-1}\ge 1$.

Решение. Областью определения этого неравенства является промежуток $X=[1;+\infty)$. Если $x\in X$, то $\sqrt[4]{x-1}\ge 0$, а

$\sqrt[3]{2x-1} \ge \sqrt[3]{2\cdot 1-1} = 1$. Таким образом, левая часть неравенства больше или равна 1 для всех $x \in X = [1; +\infty)$, т. е. решениями являются все числа промежутка $[1; +\infty)$.

Задача 16. Решить уравнение

$$\sqrt{5-4x-x^2}+7=\sqrt{2x-x^2+15}+\sqrt{2x-x^2+8}.$$

Решение. Очевидно, возведение в квадрат обеих частей этого уравнения бесперспективно. Однако сам вид подкоренных выражений подсказывает начало решения:

$$\sqrt{9-\left(4+4x+x^2\right)}+7=\sqrt{16-\left(1-2x+x^2\right)}+\sqrt{9-\left(1-2x+x^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9-(x+2)^2}+7=\sqrt{16-(x-1)^2}+\sqrt{9-(x-1)^2}.$$

Оценим теперь каждое слагаемое правой части уравнения:

$$16-(x-1)^2 \le 16 \Rightarrow \sqrt{16-(x-1)^2} \le 4;$$

$$9-(x-1)^2 \le 9 \Rightarrow \sqrt{9-(x-1)^2} \le 3,$$

$$\text{т. е. } \sqrt{16-(x-1)^2}+\sqrt{9-(x-1)^2} \le 7.$$

Однако левая часть этого уравнения больше или равна 7. Поэтому равенство левой и правой частей возможно, если и только если

$$\begin{cases} \sqrt{16-(x-1)^2}=4; \\ \sqrt{9-(x-1)^2}=3; \\ \sqrt{9-(x+2)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; \\ x=1; \\ |x+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Задача 17. Найти сумму абсцисс точек пересечения графиков функций $y=\sqrt[3]{x^4+27}$ и $y=100-\sqrt[3]{7x^2+8}$.

Решение. Строить графики данных функций — дело трудное и неблагодарное, поскольку точки пересечения и их абсциссы, в лучшем случае, можно будет найти только приближенно.

Попробуем найти искомые абсциссы как корни уравнения $\sqrt[3]{x^4+27}=100-\sqrt[3]{7x^2+8}$. Откажемся от решения этого уравнения методом возведения в куб обеих его частей, обратим внимание на свойства функций $f(x)=\sqrt[3]{x^4+27}$ и $g(x)=100-\sqrt[3]{7x^2+8}$. Заметим, что обе функции четные. Это означает, что если $f(x_0)=g(x_0)$, то и $f(-x_0)=g(-x_0)$, т. е. если x_0 — корень уравнения $f(x)=g(x)$, то и $-x_0$ — тоже его корень. Поэтому сумма всех корней этого уравнения (абсцисс точек пересечения графиков) будет равна нулю. Осталось лишь заметить, что графики будут иметь хотя бы одну точку пересечения. Действительно, функция $f(x)$ возрастает от 3 до $+\infty$ при $x>0$, а функция $g(x)$ убывает от 98 до $-\infty$ при $x>0$. Поэтому найдется такое $x_0>0$, при котором $f(x_0)=g(x_0)$. Таким образом, искомая сумма абсцисс равна 0.

Задача 18. Найти длину отрезка, концы которого лежат на графике функции $f(x)=2\sqrt[5]{|x|+3}-9x^2-x+7+\dfrac{16}{x^3}+\sqrt{x^6+8}$, а ось ординат для него является серединным перпендикуляром.

Решение. Поскольку данный отрезок перпендикулярен оси ординат и делится ею пополам, то, обозначив координаты одного из концов отрезка $(x_0; f(x_0))$, $x_0>0$, получим координаты другого конца отрезка $(-x_0; f(-x_0))$, причем $f(-x_0)=f(x_0)$.

Последнее равенство равносильно следующему:

$$2\sqrt[5]{|x_0|+3}-9x_0^2-x_0+7+\frac{16}{x_0^3}+\sqrt{x_0^6+8}=$$

$$=2\sqrt[5]{|-x_0|+3}-9(-x_0)^2+x_0+7+\frac{16}{(-x_0)^3}+\sqrt{(-x_0)^6+8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x_0+\frac{16}{x_0^3}=x_0-\frac{16}{x_0^3}\Leftrightarrow x_0=\frac{16}{x_0^3}\Leftrightarrow x_0^4=16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0=2 \text{ (с учетом } x_0>0\text{)}.$$

Тогда искомая длина отрезка будет равна $x_0-(-x_0)=2x_0=4$.

Задача 19. Решить неравенство

$$\frac{5}{6-3\sqrt{4+3x-x^2}}+\frac{1}{x-2}>\frac{1}{1+|x-2|}.$$

Решение. Обозначим: $f(x)=6-3\sqrt{4+3x-x^2}$, $g(x)=\frac{1}{1+|x-2|}-\frac{1}{x-2}$. Изучим поведение функции $f(x)$ на ее области определения $[-1;\,4]$. Для этого найдем нули этой функции:

$$6-3\sqrt{4+3x-x^2}=0 \iff 2=\sqrt{4+3x-x^2} \iff \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=3. \end{array}\right.$$

Теперь рассмотрим график $y=4+3x-x^2$ на отрезке $[-1;\,4]$ (рис. 2.41) и решим исходное неравенство на каждом из промежутков $[-1;\,0)$, $(0;\,2)$, $(2;\,3)$, $(3;\,4]$ (точка $x=2$ добавлена, т. к. в этой точке меняет знак подмодульное выражение $x-2$ в правой части неравенства).

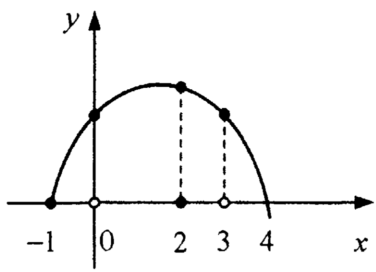


Рис. 2.41

1. $x\in[-1;\,0)\Rightarrow\frac{5}{f(x)}$ возрастает от $\frac{5}{6}$ до $+\infty$. При этом функция $g(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3-x}$ возрастает от $\frac{7}{12}$ до $\frac{5}{6}$. Это означает, что неравенство $\frac{5}{f(x)}>g(x)$ верно для всех $x\in[-1;0)$.

2. $x\in(0;2)\Rightarrow f(x)<0$, $g(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3-x}>0$. Это означает, что неравенство $\frac{5}{f(x)}>g(x)$ не выполняется для всех $x\in(0;2)$.

3. $x \in (2;3) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{x^2-3x+2}$. Сделаем замену переменной: $t = \sqrt{4+3x-x^2}$. Тогда $x^2-3x+2 = 6-t^2$, и неравенство принимает вид $\frac{5}{6-3t} > \frac{-1}{6-t^2} \Leftrightarrow \frac{5}{3t-6} < \frac{1}{6-t^2}$. Учитывая $4 < t^2 < 6$ при $x \in (2;3)$, получаем

$$5(6-t^2) < 3t-6 \Leftrightarrow 5t^2+3t-36 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{12}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4+3x-x^2 > \frac{144}{25} \Leftrightarrow 25x^2-75x+44 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{4}{5}; \frac{11}{5}\right).$$

Откуда $x \in \left(2; \frac{11}{5}\right)$.

4. $x \in (3;4) \Rightarrow f(x) > 0$, $g(x) = \frac{-1}{(x-1)(x-2)} < 0$, и, следовательно, неравенство $\frac{5}{f(x)} > g(x)$ верно для всех $x \in (3;4)$.

Ответ: $[-1;\ 0) \cup \left(2;\ \frac{11}{5}\right) \cup (3;\ 4]$.

Более подробно остановимся на использовании свойства **монотонности функций** в решении уравнений и неравенств. Применение этого метода основано на следующих теоремах.

Теорема 2.1. Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, а множество всех допустимых значений x, при которых обе функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, является некоторым промежутком X. Если на промежутке X функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает или постоянна, то исходное уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Теорема 2.2. Пусть множество всех допустимых значений x, при которых обе функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, является некоторым промежутком X, причем на промежутке X функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает или постоянна.

Предположим, что найдено такое число x_0, что $f(x_0)=g(x_0)$. Тогда множество решений неравенства

- $f(x)>g(x)$ совпадает с $(x_0;+\infty)\cap X$;
- $f(x)\geq g(x)$ совпадает с $[x_0;+\infty)\cap X$;
- $f(x)\leq g(x)$ совпадает с $(-\infty;x_0]\cap X$;
- $f(x)<g(x)$ совпадает с $(-\infty;x_0)\cap X$.

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на своей области определения. Тогда уравнения $f(x)=x$ и $f(f(x))=x$ равносильны.

Задача 20. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt{2x+9}=5$.

Решение. Структура этого уравнения полностью идентична уравнению задачи 15, что говорит о возможности заменить переменную и решить это уравнение теми же методами. Однако в данном случае можно предложить другой, более короткий путь решения, опирающийся на теорему 2.1.

В нашем случае область определения уравнения $X=[-4{,}5;+\infty)$, причем функции $\sqrt[3]{x+8}$ и $\sqrt{2x+9}$ возрастают на X, а значит, их сумма $f(x)$ будет возрастать на X. Правая часть уравнения $g(x)=5$ постоянна на X. В силу теоремы 2.1 уравнение либо вообще не имеет корней на промежутке X, либо имеет единственный корень, который мы попытаемся найти подбором. Подстановка $x=0$ в наше уравнение приводит к результату $\sqrt[3]{0+8}+\sqrt{0+9}=5$. Это означает, что $x=0$ — единственный корень уравнения.

Задача 21. Найти сумму корней уравнения

$$\sqrt{7-x^2+4x}+\sqrt{10-3x^2+12x}=x^2-4x+9.$$

Решение. Обозначим $t = x^2 - 4x$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{7-t} + \sqrt{10-3t} = t + 9.$$

На промежутке $T = \left(-\infty; \frac{10}{3}\right]$ функции $\sqrt{7-t}$ и $\sqrt{10-3t}$ убывают, а значит, убывает и их сумма $f(t)$. При этом правая часть уравнения $g(t) = t + 9$ возрастает на T. В силу теоремы 2.1, данное уравнение на промежутке T имеет не более одного корня. Подбор и проверка целых значений $t \in T$ показывает, что $t = -2$ — корень уравнения. Возвращаясь к переменной x, получим: $x^2 - 4 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$.

Поскольку дискриминант этого уравнения больше нуля, сумму его корней можно найти по теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -(4) = 4.$$

Задача 22. Решить неравенство $\sqrt{x^3 + 1} \le 5 - x$.

Решение. Область определения данного неравенства — это промежуток $X = [-1; +\infty)$. На этом промежутке функция $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ возрастает, а функция $g(x) = 5 - x$ убывает, причем, как не трудно убедиться, значения этих функций равны при $x = 2$. Следовательно, по теореме 2.2 множеством решений исходного неравенства является множество $[-\infty; 2] \cap [-1; +\infty] = [-1; 2]$.

Ответ: $[-1; 2]$.

Задача 23. Найти произведение корней уравнения $7\sqrt[3]{7x-6} = x^3 + 6$.

Решение. Преобразуем это уравнение так, чтобы правая часть превратилась в x: $7\sqrt[3]{7x-6} - 6 = x^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{7\sqrt[3]{7x-6} - 6} = x$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{7x-6}$. Если обозначить $f(x)$ через y, то уравнение $\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7x-6} - 6} = x$ примет вид $\sqrt[3]{7y-6} = x$ или $f(y) = x$, или $f(f(x)) = x$.

Так как $f(x)=\sqrt[3]{7x-6}$ — возрастающая функция, то уравнение $f(f(x))=x$ по теореме 2.3 равносильно уравнению $f(x)=x$, т. е. уравнению $\sqrt[3]{7x-6}=x$. Остается только его решить:

$$7x-6=x^3 \Leftrightarrow x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow x^3-x-6x+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)+6(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=-3; \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: -6.

Задача 24. Решить неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}+x-2\right)\left(\sqrt{4x+9}+x-3\right)}{\sqrt{6-x-4x^2-x^3}} \le 0.$$

Решение. Обозначим $f(x)=x^3+4x^2+x-6$, $g(x)=\sqrt{x+4}+x-2$, $h(x)=\sqrt{4x+9}+x-3$. Тогда исходное неравенство запишем в виде $\dfrac{g(x)h(x)}{\sqrt{-f(x)}} \le 0$.

Число 1 является корнем многочлена $f(x)$. Применим схему Горнера к $f(x)$:

	1	4	1	–6
1	1	5	6	0

и разложим $f(x)$ на множители:

$$f(x)=(x-1)\left(x^2+5x+6\right)=(x-1)(x+2)(x+3).$$

Решив неравенство $f(x)<0$ методом интервалов, получим $x\in(-\infty;\,-3)\cup(-2;\,1)$.

С учетом ограничений $x+4\ge 0$, $4x+9\ge 0$ получаем:

$$\frac{g(x)h(x)}{\sqrt{-f(x)}} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x)h(x)\le 0; \\ x\in(-2;\,1). \end{cases}$$

Теперь заметим, что на промежутке $(-2;1)$ функции $g(x)$ и $h(x)$ монотонно возрастают, причем $g(0)=0$, $h(0)=0$. Это означает, что при $x\in(-2;0)$ верно $g(x)<0$, $h(x)<0$, а при $x\in(0;1)$ верно $g(x)>0$, $h(x)>0$, т. е. $g(x)h(x)>0$ для всех x из $(-2;1)$, кроме $x=0$.

Ответ: 0.

И наконец, **графический метод**, с которым мы уже встречались в предыдущих параграфах, как всегда, эффективен *в задачах с параметрами.*

Задача 25. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x-8}=ax-3a-2$ имеет единственное решение?

Решение. Функция $y=a(x-3)-2$ задает множество всех прямых, проходящих через точку $(3;-2)$ с угловым коэффициентом a. Поэтому графическое решение задачи сводится к поиску тех прямых, которые пересекают график функции $y=\sqrt{x-8}$ точно один раз. На рис. 2.42 отмечены три положения, разграничивающих число пересечений прямых $y=a(x-3)-2$ с кривой $y=\sqrt{x-8}$:

- прямая $y=-2$ (с угловым коэффициентом $a=0$);
- прямая, проходящая через точку $(8;0)$ (с угловым коэффициентом $\frac{2}{5}$);
- касательная к кривой $y=\sqrt{x-8}$ (с угловым коэффициентом $a=y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0-8}}$), проходящая через точку $\left(x_0;\sqrt{x_0-8}\right)$.

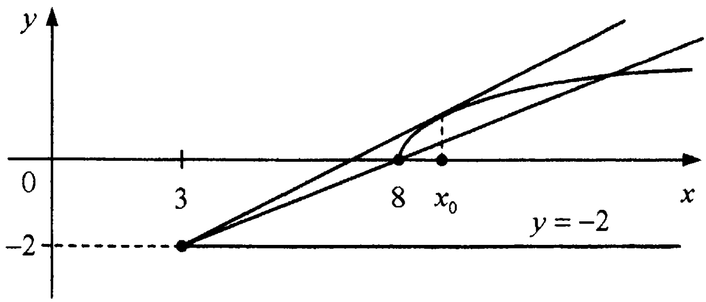


Рис. 2.42

Из рис. 2.42 ясно, что единственное пересечение происходит только при $a \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$ и $a = \frac{1}{2\sqrt{x_0 - 8}}$. Остается найти угловой коэффициент касательной:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0 - 8}}; \\ \sqrt{x_0 - 8} = a(x_0 - 3) - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0; \\ \dfrac{1}{2a} = a\left(\dfrac{1}{4a^2} + 5\right) - 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{2}{5}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

§ 2.5. Системы уравнений

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1; \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

где $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Возможны три следующие ситуации: 1) система имеет единственное решение; 2) система имеет бесконечно много решений; 3) система не имеет решений.

Если в задаче ставится вопрос о числе решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными в зависимости от значений параметра a, то при решении используйте следующие теоретические положения.

1. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы непропорциональны: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ($a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$).Тогда система имеет *единственное решение*.

2. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ($a_2 \neq 0, b_2 \neq 0,\ c_2 \neq 0$). Тогда система *не имеет решений*.

3. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений системы пропорциональны: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ($a_2 \neq 0, b_2 \neq 0,\ c_2 \neq 0$).Тогда система имеет *бесконечно много решений*, которыми являются любые пары чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие любому из уравнений системы. Заметим, что условия $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ равносильны $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, где число $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ называется **определителем системы**

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1; \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Если же речь идет о самих решениях подобных систем, то следует применить **метод прямой подстановки**, приводящий одно из уравнений к виду $bz = c$. При этом не забывайте, что $z = \frac{c}{b}$ при $b \neq 0$, но при $b = c = 0$ z — любое, а при $b = 0$, $c \neq 0$ — решений вообще нет.

Задача 1. Найти a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 7x - 2ay = 5; \\ (4 - 3a)x + 4ay = 7 \end{cases}$$

несовместна.

Решение. При $a = 0$

$$\begin{cases} 7x = 5; \\ 4x = 7, \end{cases}$$

т. е. система не имеет решений. Этот случай мы вынуждены были рассмотреть отдельно, поскольку дальше понадобится отношение $\frac{-2a}{4a}$, которое при $a = 0$ не имеет смысла.

Данная система не имеет решений при $a \neq 0$, если $\frac{4-3a}{7} = \frac{4a}{-2a} \neq \frac{7}{5}$. Так как $\frac{4a}{-2a} = -2 \neq \frac{7}{5}$, то остается лишь проверить выполнимость условия $\frac{4-3a}{7} = \frac{4a}{-2a}$:

$$\frac{4-3a}{7} = -2 \Rightarrow 4 - 3a = -14 \Rightarrow a = 6.$$

Ответ: $a = 6$ или $a = 0$.

Задача 2. Найти наименьшее целое a, при котором решения системы

$$\begin{cases} x - 2y = a; \\ 2ax - 9y = -2 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям $x < 0$, $y \leq 0$.

Решение. Решим данную систему методом прямой подстановки:

$$\begin{cases} x = a + 2y; \\ 2a(a + 2y) - 9y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2y; \\ (9 - 4a)y = 2a^2 + 2. \end{cases}$$

Если $a = \frac{9}{4}$, то решений нет. Если $a \neq \frac{9}{4}$, то

$$\begin{cases} x = a + 2 \cdot \dfrac{2a^2 + 2}{9 - 4a}; \\ y = \dfrac{2a^2 + 2}{9 - 4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9a + 4}{9 - 4a}; \\ y = \dfrac{2a^2 + 2}{9 - 4a}. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} x<0; \\ y\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9a+4}{4a-9}>0; \\ \dfrac{2a^2+2}{4a-9}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4a-9>0 \Leftrightarrow a\in\left(\frac{9}{4};\ +\infty\right).$$

Ответ: $a=3$.

Задача 3. Найти все значения параметра b, при которых для любого значения параметра a система

$$\begin{cases} x+ay=z^2-1; \\ ax+y=z+b \end{cases}$$

имеет решение.

Решение. Прежде всего, рассмотрим определитель системы: $\Delta=1-a^2$. Если $\Delta\ne 0$, то система имеет решения независимо от значений b и z (причем для каждых фиксированных b_0 и z_0 пара $(x_0;y_0)$ определяется однозначно).

Если $\Delta=0$, то $a=1$ и $a=-1$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1. Пусть $a=1$. Тогда система

$$\begin{cases} x+y=z^2-1; \\ x+y=z+b \end{cases}$$

имеет решение, если и только если $z^2-1=z+b\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^2-z-b-1=0\Leftrightarrow$ дискриминант $5+4b$ неотрицателен, т. е. при $b\ge -\dfrac{5}{4}$.

2. Пусть $a=-1$. Тогда система

$$\begin{cases} x-y=z^2-1; \\ -x+y=z+b \end{cases}$$

имеет решение, если и только если $z^2-1=-z-b\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^2+z+b-1=0\Leftrightarrow$ дискриминант $5-4b$ неотрицателен, т. е. при $b\le \dfrac{5}{4}$.

Ответ: $\left[-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right]$.

Задача 4. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(y+8-x^2)(2x+|y|)=0;\\ 2ax-y=8+a^2\end{cases}$$

имеет ровно две пары решений.

Решение. Система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}y+8=x^2;\\ 2ax=y+8+a^2,\end{cases}\quad \begin{cases}2x+|y|=0;\\ 2ax=y+8+a^2.\end{cases}$$

Решим первую из них:

$$\begin{cases}x^2=y+8;\\ 0=x^2-2ax+a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2-8;\\ (x-a)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=a^2-8;\\ x=a.\end{cases}$$

Таким образом, первая система имеет единственное решение для любого значения параметра a.

Теперь найдем решения второй системы, рассмотрев два случая: $y\ge 0$ и $y<0$.

1. $$\begin{cases}y\ge 0;\\ 2x+y=0;\\ 2ax=y+8+a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0;\\ y=-2x;\\ 2x(a+1)=a^2+8.\end{cases}$$

Если $a=-1$, то решений нет.

Если $a\ne -1$, то

$$\begin{cases}y\ge 0;\\ y=-\dfrac{a^2+8}{a+1};\\ x=\dfrac{a^2+8}{2(a+1)}.\end{cases}$$

Если $a>-1$, то решений нет, если $a<-1$, то решением будет

$$\begin{cases}y=-\dfrac{a^2+8}{a+1};\\ x=\dfrac{a^2+8}{2(a+1)}.\end{cases}$$

2. $\begin{cases} y < 0; \\ y = 2x; \\ 2x(a-1) = a^2 + 8. \end{cases}$

Если $a = 1$, то решений нет.

Если $a \neq 1$, то

$$\begin{cases} y < 0; \\ y = \dfrac{a^2+8}{a-1}; \\ x = \dfrac{a^2+8}{2(a-1)}. \end{cases}$$

Если $a > 1$, то решений нет, если $a < 1$, то решением будет

$$\begin{cases} y = \dfrac{a^2+8}{a-1}; \\ x = \dfrac{a^2+8}{2(a-1)}. \end{cases}$$

Суммируя результаты по второй системе, имеем: при $a \in (-\infty; -1)$ эта система имеет ровно два решения; при $a \in [-1; 1)$ она имеет точно одно решение; при $a \in [1; +\infty)$ решений нет.

Так как первая система имеет одно решение $(a; a^2 - 8)$ для любого a, а в совокупности требуется ровно два решения, возможны только следующие два варианта.

1. $a \in (-\infty; -1)$ и решение первой системы совпадает с одним из решений второй, т. е.

$$\begin{cases} a = \dfrac{a^2+8}{2(a \pm 1)}; \\ a^2 - 8 = \mp \dfrac{a^2+8}{(a \pm 1)} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -4; \\ a = -2. \end{array} \right.$$

2. $a \in [-1; 1)$ и решение первой системы не совпадает с решением второй, т. е.

$$\begin{cases} a \neq \dfrac{a^2+8}{2(a-1)}; \\ a^2 - 8 \neq \dfrac{a^2+8}{(a-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 4; \\ a \neq -2. \end{cases}$$

Это означает, что решения первой и второй систем не совпадают при всех $a \in [-1; 1)$.

Ответ: $\{-4\} \cup \{-2\} \cup [-1; 1)$.

Так же, как при решении уравнений различных типов, *при решении систем* часто используется **метод замены переменных**. В этом случае некоторые выражения от исходных переменных принимаются за новые переменные, что приводит к более простой, чем первоначальная, системе от этих переменных. После того как новые переменные будут найдены, нужно найти значения исходных переменных.

Общих правил выбора новых переменных не существует: приходится полагаться на свою интуицию и учитывать структуру исходной системы. Однако есть два типа систем — симметричные и однородные, для которых априори известны методы решения и подходящие замены.

Задача 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3; \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Решение. Сделаем в этой системе замену переменных $a = \sqrt[3]{x+2y}$, $b = \sqrt[3]{x-y+2}$. В результате первое уравнение системы примет простейший вид: $a + b = 3$. Второе уравнение новой системы можно получить, учитывая особенность структуры исходной системы. А именно:

$$a^3 + b^3 = \left(\sqrt[3]{x+2y}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{x-y+2}\right)^3 = (2x+y) + 2 = 7 + 2 = 9.$$

Таким образом, $a^3+b^3=9$, и новая система имеет вид:

$$\begin{cases} a+b=3; \\ a^3+b^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3; \\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3; \\ 3\left(a^2-ab+b^2\right)=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3; \\ a^2-ab+b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3; \\ (a+b)^2-3ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3; \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1; \\ b=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=2; \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=1; \\ \sqrt[3]{x-y+2}=2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=2; \\ \sqrt[3]{x-y+2}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2y=1; \\ x-y+2=8; \end{cases} \\ \begin{cases} x+2y=8; \\ x-y+2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{13}{3}; \\ y=-\dfrac{5}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2; \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{13}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$, $(2;\ 3)$.

Задача 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1; \\ 7\sqrt{y-x}-26x+6y=3. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену переменных: $a=\sqrt{11x-y}$, $b=\sqrt{y-x}$. Тогда $a^2=11x-y$, $b^2=y-x$, $a^2-2b^2=13x-3y$, и система примет вид:

$$\begin{cases} a-b=1; \\ 7b-2\left(a^2-2b^2\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1; \\ 2b^2+3b-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1; \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x=1; \\ 11x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}; \\ y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Напомним, что **однородным многочленом степени** n **от двух переменных** x и y называется выражение вида:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x \cdot y^{n-1} + a_n y^n,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — некоторые действительные числа (коэффициенты многочлена). В частности, *однородный многочлен второй степени* имеет вид $a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2$, *однородный многочлен третьей степени* имеет вид $a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 xy^2 + a_3 y^3$.

Система уравнений, имеющая вид

$$\begin{cases} P(x, y) = p; \\ Q(x, y) = q, \end{cases}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные многочлены одинаковой степени, p и q — некоторые действительные числа, называется **однородной системой**.

Если одно из чисел p или q *равно нулю*, система содержит однородное уравнение, решив которое можно найти отношение переменных x и y, а затем с помощью второго уравнения — и сами переменные x, y. Если же p и q *не равны нулю*, то с помощью подходящей линейной комбинации уравнений системы (например, умножив 1-е уравнение на q, а 2-е — на $(-p)$ и сложив полученные уравнения) нужно получить, а затем решить полученное однородное уравнение.

Задача 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0; \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы является однородным уравнением 2-й степени. Разделим его левую часть на y^2 и обозначим $\frac{x}{y} = t$ (заметим, что $y \neq 0$, иначе из первого уравнения следовало бы, что и $x = 0$, тогда как пара $x = 0$, $y = 0$ не удовлетворяет второму уравнению). Получаем квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, решая которое находим

$$\left[\begin{aligned} &t = 2; \\ &t = 3. \end{aligned}\right.$$

Поскольку $t = \dfrac{x}{y}$, то

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x}{y} = 2; \\ &\frac{x}{y} = 3, \end{aligned}\right.$$

откуда
$$\left[\begin{aligned} &x = 2y; \\ &x = 3y. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, исходная система распалась на совокупность двух систем:

1. $\begin{cases} x = 2y; \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y; \\ 3(2y)^2 + 2y \cdot 2y - y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y; \\ 15y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 2,\ y = 1; \\ &x = -2,\ y = -1. \end{aligned}\right.$

2. $\begin{cases} x = 3y; \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y; \\ 3(3y)^2 + 2y \cdot 3y - y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y; \\ 32y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 3 \cdot \sqrt{\frac{15}{32}},\ y = \sqrt{\frac{15}{32}}; \\ &x = -3 \cdot \sqrt{\frac{15}{32}},\ y = -\sqrt{\frac{15}{32}}. \end{aligned}\right.$

Система имеет четыре решения: $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $\left(3 \cdot \sqrt{\frac{15}{32}};\ \sqrt{\frac{15}{32}}\right)$, $\left(-3 \cdot \sqrt{\frac{15}{32}};\ -\sqrt{\frac{15}{32}}\right)$.

Задача 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17; \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

Решение. Получим однородное уравнение, сложив первое уравнение, умноженное на 3, со вторым уравнением, умноженным на 17:

$$3\left(x^2 + 2y^2\right) + 17\left(x^2 - 2xy\right) = 3 \cdot 17 + 17 \cdot (-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 - 34xy + 6y^2 = 0$$

— однородное уравнение 2-й степени. Разделив его левую часть на $2y^2 \neq 0$, получим квадратное уравнение относительно переменной $t = \dfrac{x}{y}$:

$$10t^2 - 17t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{5}; \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{5}; \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}, \end{array}\right.$$

и исходная система равносильна совокупности двух систем:

1. $$\begin{cases} y = 5x; \\ x^2 - 2xy + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x; \\ x^2 - 10x^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x; \\ 9x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ y = \dfrac{5}{\sqrt{3}}; \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ y = -\dfrac{5}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$$

2. $\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x; \\ x^2-2xy+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x; \\ x^2-\dfrac{4}{3}x^2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x; \\ x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3,\ y=2; \\ x=-3,\ y=-2. \end{array}\right.$

Система имеет четыре решения: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ -\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$, $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$.

Задача 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}(1+y)=2x+3y; \\ x^2+2xy=x-y^2. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x^2=2xy^2+3y^3-x^2y; \\ x^2+2xy+y^2=x; \\ y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y(x+y)(3y-x); \\ (x+y)^2=x; \\ y\neq 0. \end{cases}$$

Левые части уравнений этой системы представляют собой однородные многочлены 2-й степени от двух переменных, правые части — соответственно однородные многочлены 3-й и 1-й степени. Поэтому перемножив эти уравнения, получим однородное уравнение 4-й степени: $x^2(x+y)^2=(x+y)(3y-x)yx$. Отметим также, что $x+y\neq 0$, ибо иначе $x=0 \Rightarrow y=0$. Итак, имеем равносильную систему:

$$\begin{cases} x(x+y)=(3y-x)y; \\ (x+y)^2=x; \\ y\neq 0,\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0; \\ (x+y)^2=x; \\ y\neq 0,\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y; \\ x = -3y; \end{array}\right. \\ (x+y)^2 = x; \\ y \neq 0, \ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0,25; \\ y = 0,25; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2,25; \\ y = -0,75. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим так называемые **симметричные системы** (не путать с «симметричными» задачами с параметрами, которые рассматривались с § 2.3). Напомним, что многочлен от двух переменных x и y называется **симметричным**, если он не изменяется при замене x на y и y на x. Если систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} P(x, \ y) = 0; \\ Q(x, \ y) = 0, \end{cases}$$

где P и Q — симметричные многочлены, то эта система называется **симметричной**.

Для решения симметричной системы удобно вводить новые переменные $a = x + y$, $b = xy$.

При решении симметричных систем используются следующие преобразования:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 2b;$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = a\left(a^2 - 3b\right);$$

$$x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = \left(a^2 - 2b\right)^2 - 2b^2.$$

Задача 10. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8; \\ x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 15. \end{cases}$$

Решение. Заметив, что система не изменяется при замене x на y и y на x (что является *признаком ее симметричности*), воспользуемся заменой переменных $a = x + y$, $b = xy$. Тогда

$x^2+y^2=a^2-2b$, $x^3+y^3=a\left(a^2-3b\right)$, $x^2y+xy^2=xy\left(x+y\right)=ab$,

поэтому система принимает вид:

$$\begin{cases} a^2-2b+a=8; \\ a\left(a^2-3b\right)+ab=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b=8-a-a^2; \\ a\left(a^2-2b\right)=15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b=8-a-a^2; \\ a\left(a^2+8-a-a^2\right)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b=8-a-a^2; \\ a^2-8a+15=0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы $a^2-8a+15=0$, получаем

$$\left[\begin{array}{l} a=5; \\ a=3, \end{array}\right.$$

откуда
$$\begin{cases} a=5; \\ b=11 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a=3; \\ b=2. \end{cases}$$

Чтобы найти решения исходной системы, остается решить две системы уравнений:

1. $\begin{cases} x+y=5; \\ xy=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x; \\ x\left(5-x\right)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x; \\ x^2-5x+11=0 \end{cases}$ —

эта система несовместна.

2. $\begin{cases} x+y=3; \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x; \\ x\left(3-x\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x; \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1; \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2; \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$

Задача 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=19; \\ x^4+x^2y^2+y^4=931. \end{cases}$$

Решение. Эта система тоже является симметричной, поэтому ее по-прежнему можно решать с помощью замены $a=x+y$, $b=xy$.

Но поскольку

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)-xy=19;\\ \left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=931,\end{cases}$$

то в нашем случае удобнее будет сделать замену $a=x^2+y^2$, $b=xy$ (т. к. в результате новая система получится более простой).

После замены переменных система примет вид:

$$\begin{cases}a-b=19;\\ a^2-b^2=931\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=19;\\ 19(a+b)=931\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=19;\\ a+b=49\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=34;\\ b=15.\end{cases}$$

Возвращаемся к переменным x и y:

$$\begin{cases}x^2+y^2=34;\\ xy=15.\end{cases}$$

Отнимем от первого уравнения удвоенное второе уравнение:

$$x^2-2xy+y^2=34-2\cdot 15 \Leftrightarrow (x-y)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=2;\\ x-y=-2.\end{array}\right.$$

Получаем совокупность двух систем:

1. $$\begin{cases}x-y=2;\\ xy=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+2;\\ y(y+2)=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+2;\\ y^2+2y-15=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5,\ y=3;\\ x=-3,\ y=-5.\end{array}\right.$$

2. $$\begin{cases}x-y=-2;\\ xy=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y-2;\\ y(y-2)=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y-2;\\ y^2-2y-15=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5,\ y=-3;\\ x=3,\ y=5.\end{array}\right.$$

Таким образом, система имеет четыре решения: $(-5;\ -3)$, $(-3;\ -5)$, $(5;\ 3)$, $(3;\ 5)$.

Для предотвращения путаницы понятий рассмотрим **систему с параметром, симметричную относительно перестановки переменных** (см. также § 2.3).

Задача 12. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x - y^2 - a = 0; \\ x^2 - y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Эта система «симметрична» относительно переменных: если пара $(x_0; y_0)$ — ее решение, то и пара $(y_0; x_0)$ — также решение. Ввиду требования единственности решения необходимо, чтобы $x_0 = y_0$. Отсюда получаем уравнение $x^2 - x + a = 0$, которое должно иметь единственное решение, т. е. его дискриминант должен быть равен нулю: $1 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

Убедимся, что при $a = \frac{1}{4}$ система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x - y^2 - \dfrac{1}{4} = 0; \\ x^2 - y + \dfrac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

Вычтем почленно эти уравнения:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5; \\ y = 0,5 \end{cases}$$

— единственное решение.

Ключевым методом решения систем трех уравнений с тремя переменными является **метод линейной комбинации уравнений системы** с целью получения простого уравнения-следствия, используя которое можно быстро «распутать клубок» уравнений.

Задача 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7; \\ x + 2y + z = 8; \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Решение. Сложим уравнения системы:

$$(2x + x + x) + (y + 2y + y) + (z + z + 2z) = 7 + 8 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x + y + z) = 24 \Leftrightarrow x + y + z = 6.$$

Полученное уравнение вычтем поочередно из первого, второго и третьего уравнений исходной системы:

$$(2x + y + z) - (x + y + z) = 7 - 6 \Leftrightarrow x = 1;$$

$$(x + 2y + z) - (x + y + z) = 8 - 6 \Leftrightarrow y = 2;$$

$$(x + y + 2z) - (x + y + z) = 9 - 6 \Leftrightarrow z = 3.$$

Итак, $(1;\ 2;\ 3)$ — решение системы.

Задача 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0; \\ -x^3 + y^3 + 2z^3 - 2xyz - 2 = 0; \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Сложим первое уравнение со вторым, второе с третьим и вычтем из первого уравнения удвоенное третье:

$$\begin{cases} x^3 = xyz - 3; \\ y^3 = xyz + 3; \\ z^3 = xyz - 2. \end{cases}$$

Теперь почленно перемножим все три уравнения:

$$x^3y^3z^3 = x^3y^3z^3 - 2x^2y^2z^2 - 9xyz + 18 \Rightarrow 2x^2y^2z^2 + 9xyz - 18 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} xyz = -6; \\ xyz = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

1. Пусть $xyz = -6$. Тогда

$$\begin{cases} x^3 = -9; \\ y^3 = -3; \\ z^3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{9}; \\ y = -\sqrt[3]{3}; \\ z = -2. \end{cases}$$

2. Пусть $xyz = \dfrac{3}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x^3 = -\dfrac{3}{2}; \\ y^3 = \dfrac{9}{2}; \\ z^3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}; \\ y = \sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}; \\ z = -\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}. \end{cases}$$

Так же, как и при решении уравнений, выделим в особый класс такие системы, которые не решаются описанными выше методами. Решения такого рода систем (**«граничные задачи»**) получаются путем логических рассуждений, связанных со структурой области определения или множества значений функций, исследованием знака дискриминанта квадратного уравнения.

Задача 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y^2-1)^2 = 4; \\ x^2 + y^2 = x - y; \\ x \le 0. \end{cases}$$

Решение. Система не обладает свойствами симметричности и однородности. В ней нет такого уравнения, из которого удачно выражалась бы одна переменная через другую. Самым простым в ней является неравенство $x \le 0$. Попробуем использовать его для оценки функций из первого уравнения системы.

Если $x \le 0$, то $x-2 \le -2$, а значит, $(x-2)^2 \ge (-2)^2 = 4$. Учитывая также, что $(y^2-1)^2 \ge 0$, заключаем, что равенство $(x-2)^2 + (y^2-1)^2 = 4$ возможно, если и только если

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 4; \\ (y^2-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| = 2; \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 1; \\ y = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

По условию $x \le 0$, следовательно,

$$\begin{cases} x = 0; \\ \left[\begin{array}{l} y = 1; \\ y = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Подстановка этих значений во второе уравнение $x^2 + y^2 = x - y$ показывает, что пара $(0;\ -1)$ — решение данной системы.

Задача 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 7; \\ x + 7y + \cos^2 z = 14. \end{cases}$$

Решение. Данная система содержит 3 переменные и 2 уравнения. Присутствие в ней тригонометрической функции $\cos^2 z$ лишний раз подчеркивает *«граничный» характер системы*. Но начнем с применения *метода прямой подстановки.*

Выразим из первого уравнения одну из переменных, например $y = \dfrac{7}{x}$, и подставим во второе уравнение: $x + 7 \cdot \dfrac{7}{x} + \cos^2 z = 14 \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad x^2 + (\cos^2 z - 14)x + 49 = 0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно x и найдем дискриминант полученного уравнения:

$$D = (\cos^2 z - 14)^2 - 196 = (\cos^2 z - 14 - 14)(\cos^2 z - 14 + 14) =$$

$$= (\cos^2 z - 28) \cdot \cos^2 z.$$

Поскольку $\cos^2 z \geq 0$ и $\cos^2 z - 28 < 0$, то $D \leq 0$. Таким образом, уравнение может иметь решение, только если $D = 0$, что возможно лишь при условии $\cos^2 z = 0$. Отсюда $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Подставив $\cos^2 z = 0$ в уравнение $x^2 + \left(\cos^2 z - 14\right)x + 49 = 0$, получим

$$x^2 - 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x-7)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 7.$$

Тогда $y = \frac{7}{x} = 1$.

Ответ: $\left(7;\ 1;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где n — любое целое число.

Задача 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4 = \sqrt{yz}; \\ y^2 - 16 = 3xz\sqrt{16 - yz}. \end{cases}$$

Решение. Исходя из вида уравнений, попытаемся найти множество значений функции yz, которая встречается и в первом, и во втором уравнении системы. Так как $x^2 + 4 \geq 4$, то из первого уравнения следует, что $\sqrt{yz} \geq 4$, а значит, $yz \geq 16$. С другой стороны, исходя из области определения функции $\sqrt{16 - yz}$, получаем, что $16 - yz \geq 0 \Leftrightarrow yz \leq 16$. Таким образом, $16 \leq yz \leq 16$, т. е. $yz = 16$. Подставим полученное значение в систему:

$$\begin{cases} yz = 16; \\ x^2 + 4 = 4; \\ y^2 - 16 = 3x \cdot z \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = 16; \\ x^2 = 0; \\ y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ \left[\begin{array}{l} y = 4; \\ y = -4; \end{array}\right. \\ yz = 16. \end{cases}$$

Следовательно, данная система имеет два решения: $(0;\ 4;\ 4)$ и $(0;\ -4;\ -4)$.

Задача 18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z)=3-z; \\ y+3y^2=x^2-3x+2; \\ z^2+y^2=6z; \\ z\le 3. \end{cases}$$

Решение. Раскроем скобки в первом уравнении, приведя его к виду $3x^2-2(z+3)x+3(z+1)=0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное и найдем его дискриминант: $D=4(z+3)^2-12\cdot 3(z+1)=4(z^2-3z)$. Отсюда, ввиду $D\ge 0$, $z^2-3z\ge 0 \Rightarrow z\in(-\infty;\ 0]\cup[3;\ +\infty)$.

Третье уравнение приведем к виду $(z-3)^2+y^2=9$. Так как $y^2\ge 0$, то $(z-3)^2\le 9 \Rightarrow |z-3|\le 3 \Rightarrow -3\le z-3\le 3 \Rightarrow z\in[0;\ 6]$.

С учетом того, что $z\le 3$, можно заключить: z может принимать только два значения — 0 или 3. Для каждого из этих значений легко определяются соответствующие значения для переменных y и x. В итоге имеем ответ: $(1;\ 0;\ 0)$, $(2;\ -3;\ 3)$.

Как мы уже знаем, решение системы двух уравнений с двумя неизвестными можно графически интерпретировать как нахождение координат $(x;\ y)$ точек пересечения кривых, являющихся графиками уравнений системы. Поскольку, как правило, точки пересечения кривых можно найти лишь приближенно, то условия задач, в которых предполагается графическое решение данной системы, формулируются обычно в таком виде: «Сколько решений имеет система?» или «При каких значениях параметра имеется столько-то решений?».

Задача 19. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} |x|+|y|=1; \\ x^2+y^2=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}? \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы задает на плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом $R=\frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt{2}}$; первое уравнение определяет контур квадрата (рис. 2.43).

Очевидно, если радиус R окружности принадлежит промежутку $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$, то окружность будет пересекать квадрат в восьми точках. Так как $\frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt{2}}\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$, то наша система имеет ровно 8 решений.

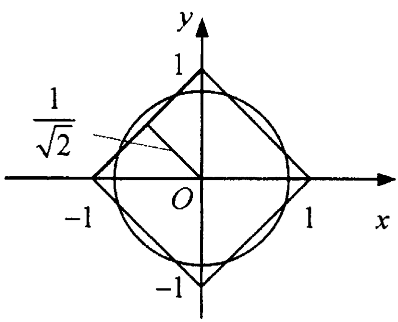


Рис. 2.43

Задача 20. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2-(4a+2)x+4a^2+4a-3=0; \\ \sqrt{x^2+(y+2a)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+2a)^2}=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Выражение $\sqrt{x^2+(y+2a)^2}$ можно интерпретировать как расстояние на координатной плоскости между точками $A(x;\ y)$ и $B(0;\ -2a)$, а выражение $\sqrt{(x+4)^2+(y+2a)^2}$ — как расстояние между точками $A(x;\ y)$ и $C(-4;\ -2a)$. Поэтому решение второго уравнения сводится к поиску всех таких точек A, сумма расстояний от которых до точек B и C равна 4. А так как расстояние между B и C равно 4, то множество всех таких точек составляет отрезок BC и потому задается системой

$$\begin{cases} y = -2a; \\ -4 \le x \le 0. \end{cases}$$

Решив теперь первое уравнение как квадратное, получим два различных корня для переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2a - 1; \\ x = 2a + 3. \end{array}\right.$$

Первый корень удовлетворяет исходной системе уравнений, если и только если $-4 \le x \le 0 \Leftrightarrow -4 \le 2a - 1 \le 0 \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Второй корень удовлетворяет исходной системе уравнений, если и только если $-4 \le 2a + 3 \le 0 \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right]$.

Таким образом, оба корня существуют одновременно только при $a = -\frac{3}{2}$, а при $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ существует лишь один из них.

Ответ: $\left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

§ 2.6. Моделирование текстовых задач

Текстовые задачи важны тем, что прививают навыки построения и анализа математических моделей простейших механических, физических и химических процессов, связанных с движением, работой, растворами, сплавами и т. д. Решение текстовых задач вызывает трудности в силу их нестандартности и разнообразия формулировок.

Здесь мы попытаемся унифицировать подходы к решению текстовых задач с помощью **метода пошаговой формализации** (МПФ) условий задачи.

Суть МПФ состоит в следующем:

- каждый фрагмент (или отдельная фраза) условия текстовой задачи записывается в виде алгебраического выражения;
- по завершении этого процесса выбираются два алгебраических выражения, описывающих одну и ту же величину, и приравниваются друг к другу;
- в результате получается уравнение (если таких пар выражений одна) или система уравнений (если таких пар выражений несколько), которые следует решить для нахождения искомой величины.

Конечно же, МПФ имеет свои специфические особенности, зависящие от типа текстовой задачи. Поэтому мы условно разобьем текстовые задачи на несколько традиционных классов — задачи на проценты, растворы (сплавы), работу, движение, демонстрируя МПФ в каждом из этих классов отдельно. Отметим, что такое разбиение весьма условно, и всегда найдутся задачи, выходящие за его рамки. Тем не менее, большинство текстовых задач все же можно отнести к одному из перечисленных выше классов.

Задача 1. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха в аквариуме увеличился на 60%. Какую часть объема аквариума в процентах занимала вода в конце месяца?

Решение. Применим МПФ. Начнем с первой фразы: «аквариум частично заполнен водой». Формализуем ее так: пусть x — начальный объем воды в аквариуме, y — объем аквариума.

Поскольку речь в задаче также пойдет и о воздухе, то добавим: $y-x$ — начальный объем воздуха в аквариуме.

Следующая фраза «за месяц 40% воды испарилось» формализуется так: $\dfrac{60x}{100}$ — объем воды в аквариуме в конце месяца, $y-\dfrac{60x}{100}$ — объем воздуха в аквариуме в конце месяца.

Следующая фраза «при этом объем воздуха в аквариуме увеличился на 60%» формализуется так: $\frac{160(y-x)}{100}$ — объем воздуха в аквариуме в конце месяца (поскольку $y-x$ — начальный объем воздуха в аквариуме).

Условия задачи завершаются вопросом: «Какую часть объема аквариума в процентах занимала вода в конце месяца?» Поскольку объем воды в аквариуме в конце месяца равен $\frac{60x}{100}$, а объем аквариума равен y, то вопрос задачи формализуется так: требуется найти $\left(\frac{60x}{100}:y\right)\cdot 100=\frac{60x}{y}$.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, означающие одну и ту же величину (объем воздуха в аквариуме в конце месяца) — это $y-\frac{60x}{100}$ и $\frac{160(y-x)}{100}$. Приравняем их и упростим полученное уравнение:

$$y-\frac{60x}{100}=\frac{160(y-x)}{100} \Leftrightarrow 100x=60y \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{5}.$$

Отсюда искомая величина равна $\frac{60x}{y}=60\cdot\frac{3}{5}=36\%$.

Задача 2. Стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы. При огранке алмаз раскололся на две части. Стоимость одной из частей оказалась на 98,56% меньше, чем первоначальная стоимость алмаза. Сколько процентов от первоначальной массы алмаза составляет масса этой части?

Решение. Применим МПФ. Фраза «стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы» формализуется так: пусть x — масса алмаза, тогда cx^2 — его стоимость, где c — коэффициент пропорциональности.

Фраза «при огранке алмаз раскололся на две части» формализуется так: y — масса одной из частей алмаза (пусть это будет первая часть), cy^2 — стоимость этой части алмаза.

Фраза «стоимость оказалась на 98,56% меньше, чем первоначальная стоимость алмаза» формализуется так: $cx^2 \cdot \frac{(100-98,56)}{100}$ — стоимость первой части алмаза.

Завершается условие задачи вопросом: «Сколько процентов от первоначальной массы алмаза составляет масса первой части?», т. е. требуется найти $\frac{y}{x} \cdot 100$.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, означающие одну и ту же величину — стоимость первой части алмаза: cy^2 и $cx^2 \cdot \frac{(100-98,56)}{100}$. Приравняем их и упростим полученное уравнение:

$$cy^2 = cx^2 \cdot \frac{(100-98,56)}{100} \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{1,44}{100} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{1,2}{10}.$$

Отсюда искомая величина $\frac{y}{x} \cdot 100$ равна 12.

Задача 3. Некто оставил в наследство определенную сумму денег, разделив ее между наследниками следующим образом: первый получил 1000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы, затем второй получил 2000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся (после этого) суммы, третий наследник получил 3000 и опять $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы и т. д. В результате оказалось, что вся сумма денег разделена между наследниками поровну. Найти количество наследников и величину завещанного состояния.

Решение. Применим МПФ. Фраза «некто оставил в наследство сумму денег» формализуется так: пусть S — сумма, оставленная k наследникам. Фраза «первый получил 1000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы» формализуется так: первый получил сумму a_1, равную $1000 + (S-1000) \cdot \frac{1}{8}$.

Фраза «затем второй получил 2000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы» формализуется так: второй получил сумму a_2, равную $2000+(S-a_1-2000)\cdot\frac{1}{8}$. Информацию о других наследниках игнорируем, попробовав обойтись только сведениями о том, что все наследники получили наследство поровну. Последнее формализуется так:

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{S}{k};\\ a_2=\dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1000+(S-1000)\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{S}{k};\\ 2000+\left(S-\dfrac{S}{k}-2000\right)\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{8}\cdot1000+\dfrac{S}{8}=\dfrac{S}{k};\\ \dfrac{7}{8}\cdot2000+\dfrac{S}{8}-\dfrac{S}{8k}=\dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{8}(2000-1000)=\dfrac{S}{8k};\\ \dfrac{7}{8}\cdot1000+\dfrac{S}{8}=\dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7000=\dfrac{S}{k};\\ \dfrac{7}{8}\cdot1000+\dfrac{S}{8}=7000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=7;\\ S=49000. \end{cases}$$

Вспомним определение концентрации (процентной концентрации) вещества. Пусть некоторый материал массы (объема) m содержится в растворе (сплаве), масса (объем) которого равна M. Тогда величина $c_A=\frac{m}{M}$ называется **концентрацией материала** в данном растворе (сплаве), а величина $p_A=c_A\cdot100\%$ называется **процентной концентрацией материала** в растворе (сплаве). **Масса (объем)** материала по его концентрации в растворе (сплаве) определяется следующим образом: $m=c_A\cdot M$ или $m=\frac{p_A\cdot M}{100}$.

Задачи на сплавы и растворы можно условно разбить на две группы: задачи, в которых концентрации остаются неизменными; задачи с изменяющейся концентрацией «главного» вещества.

Главный принцип при решении задач второй группы заключается в том, чтобы на каждом шаге МПФ «обновлять» данные трех типов:

- общие объемы растворов (сплавов);
- количества в них главного вещества;
- концентрации главного вещества.

Задача 4. Имеется два сплава, каждый из которых состоит из цинка, меди и олова. Первый сплав содержит 40% олова, второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили третий сплав, в котором 30% цинка. Сколько килограммов олова в третьем сплаве?

Решение. Применим МПФ. Фраза «сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили третий сплав» формализуется так: взято 150 — масса первого сплава, 250 — масса второго сплава; получено 400 — масса третьего сплава.

Фраза «первый сплав содержит 40% олова, второй — 26% меди» формализуется так: $\frac{40 \cdot 150}{100}$ — масса олова в первом сплаве, $\frac{26 \cdot 250}{100}$ — масса меди во втором сплаве.

Фраза «процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково» формализуется так: пусть x — процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах, тогда $\frac{150x}{100}$ — масса цинка в первом сплаве, $\frac{250x}{100}$ — масса цинка во втором сплаве, $\frac{150x}{100}+\frac{250x}{100}$ — масса цинка в третьем сплаве.

Фраза «получили третий сплав, в котором 30% цинка» формализуется так: $\frac{400 \cdot 30}{100}$ — масса цинка в третьем сплаве.

Условие задачи завершается вопросом: «Сколько килограммов олова в третьем сплаве?», который формализуется так (вспомним, что процентное содержание меди и цинка во втором сплаве соответственно равно 26% и $x\%$, а масса олова в первом сплаве равна $\frac{40 \cdot 150}{100}$):

- $100-26-x$ — процентное содержание олова во втором сплаве;
- $\frac{250 \cdot (100-26-x)}{100}$ — масса олова во втором сплаве;
- $\frac{40 \cdot 150}{100}+\frac{250 \cdot (100-26-x)}{100}$ — масса олова в третьем сплаве.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, означающие одну и ту же величину — массу цинка в третьем сплаве: $\frac{150x}{100}+\frac{250x}{100}$ и $\frac{400 \cdot 30}{100}$.

Приравняем их и упростим полученное уравнение:

$$\frac{150x}{100}+\frac{250x}{100}=\frac{400 \cdot 30}{100} \quad \Leftrightarrow \quad x=30.$$

Теперь можно ответить на вопрос задачи: масса олова в третьем сплаве равна

$$\frac{40 \cdot 150}{100}+\frac{250 \cdot (100-26-30)}{100}=170.$$

Задача 5. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготавливают некоторое количество творога, жирность которого составляет 15,5%. При этом остается сыворотка с жирностью 0,5%. Сколько творога можно получить из 1000 кг молока?

Решение. Применим МПФ. Фраза «из молока, жирность которого составляет 5%, изготавливают некоторое количество творога» формализуется так: $\frac{1000 \cdot 5}{100}$ — масса жира в молоке; x — масса получаемого творога.

Фраза «жирность творога составляет 15,5%» формализуется так: $\frac{15,5x}{100}$ — масса жира в твороге.

Фраза «при этом остается сыворотка с жирностью 0,5%» формализуется так:

- $1000-x$ — масса сыворотки, полученной из молока;
- $\frac{(1000-x)\cdot 0,5}{100}$ — масса жира в сыворотке;
- $\frac{15,5x}{100}+\frac{(1000-x)\cdot 0,5}{100}$ — масса жира в твороге и сыворотке.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, равные одной и той же величине — массе жира в молоке:

$$\frac{15,5x}{100}+\frac{(1000-x)\cdot 0,5}{100} \text{ и } \frac{1000\cdot 5}{100}.$$

Приравняем их и упростим полученное уравнение:

$$\frac{15,5x}{100}+\frac{(1000-x)\cdot 0,5}{100}=\frac{1000\cdot 5}{100} \Leftrightarrow 3,1x+(1000-x)\cdot 0,1=1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 3x=900\ \Leftrightarrow\ x=300.$$

Рассмотрим теперь несколько задач, связанных *с изменяющейся концентрацией «главного» вещества*, при решении которых нужно «обновлять» данные по общему объему растворов (сплавов), количеству в них главного вещества и его концентрации.

При этом следует помнить, что на каждом шаге одна из величин — количество «главного» вещества или его концентрация — остается неизменной: в случае неизменности концентрации k новое количество «главного» вещества определяется по формуле $k\cdot V$, где V — объем раствора (сплава), а в случае неизменности количества m «главного» вещества новая его концентрация определяется по формуле $\frac{m}{V}$.

Задача 6. В банке 20 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили, а затем дополнили банку водой. Затем отлили в 2 раза больше, чем в первый раз, и опять дополнили водой. В результате получился 28%-й раствор. Сколько литров кислоты отлили в первый раз?

Решение. «Главное» вещество здесь — соляная кислота. Будем отслеживать и обновлять после каждого шага три величины: объем раствора, количество соляной кислоты в нем и ее концентрацию.

Шаг 1. Фраза «в банке 20 л соляной кислоты» означает, что 20 — объем раствора, 20 — количество кислоты, 1 — концентрация кислоты.

Шаг 2. Фраза «часть кислоты отлили» означает, что концентрация не изменилась, а изменилось количество «главного» вещества: $20-x$ — объем раствора, 1 — концентрация кислоты, $(20-x)\cdot 1$ — количество кислоты.

Шаг 3. Фраза «дополнили банку водой» означает, что не изменилось количество «главного» вещества, а изменилась его концентрация: 20 — объем раствора, $(20-x)\cdot 1$ — количество кислоты, $\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ — концентрация кислоты.

Шаг 4. Фраза «затем отлили в 2 раза больше, чем в первый раз» означает, что концентрация не изменилась, а изменилось количество «главного» вещества: $20-2x$ — объем раствора, $\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ — концентрация кислоты, $(20-2x)\cdot\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ — количество кислоты.

Шаг 5. Фраза «и опять дополнили водой» означает, что не изменилось количество «главного» вещества, а изменилась его концентрация: 20 — объем раствора, $(20-2x)\cdot\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ — количество кислоты, $\frac{(20-2x)\cdot\frac{(20-x)\cdot 1}{20}}{20}$ — концентрация кислоты.

Фраза «в результате получился 28%-й раствор» приводит к уравнению

$$\frac{(20-2x)\cdot(20-x)}{20\cdot 20}=\frac{28}{100} \Leftrightarrow (10-x)(20-x)=2\cdot 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-30x+144=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6; \\ x=24. \end{array}\right.$$

Корень $x=24$ не подходит по смыслу задачи. Поэтому искомый ответ: 6 л.

Задача 7. В двух сосудах находилось соответственно 600 и 150 г растворов соли различной концентрации. Из каждого сосуда взяли одновременно по n граммов раствора. Взятое из первого сосуда вылили во второй, а взятое из второго — в первый. После этого концентрации растворов в обоих сосудах стали одинаковыми. Чему равно n?

Решение. «Главное» вещество здесь — соль. Будем отслеживать и обновлять после каждого шага величины трех типов: объемы растворов, количества соли в них и ее концентрации.

Шаг 1. Фраза «в двух сосудах находилось соответственно 600 и 150 г растворов соли различной концентрации» означает, что:

- 600 — объем первого раствора, x — концентрация соли в первом растворе, $600x$ — количество соли в первом растворе;
- 150 — объем второго раствора, y — концентрация соли во втором растворе, $150y$ — количество соли во втором растворе; $x \neq y$.

Шаг 2. Фраза «из каждого сосуда взяли одновременно по n граммов раствора» означает:

- $600-n$ — осталось первого раствора, x — концентрация соли в первом растворе, $(600-n)x$ — осталось соли в первом растворе, nx — забрали соли из первого раствора;
- $150-n$ — осталось второго раствора, y — концентрация соли во втором растворе, $(150-n)y$ — осталось соли во втором растворе, ny — забрали соли из второго раствора.

Шаг 3. Фраза «взятое из первого сосуда вылили во второй, а взятое из второго — в первый» означает:

- 600 — объем первого раствора, $(600-n)x+ny$ — количество соли в первом растворе, $\frac{(600-n)x+ny}{600}$ — концентрация соли в первом растворе;
- 150 — объем второго раствора, $(150-n)y+nx$ — количество соли во втором растворе, — концентрация соли во втором растворе.

Фраза «после этого концентрации растворов в обоих сосудах стали одинаковыми» приводит к уравнению:

$$\frac{(600-n)x+ny}{600}=\frac{(150-n)y+nx}{150} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (600-n)x+ny=4\cdot((150-n)y+nx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600x-600y=5nx-5ny \Leftrightarrow 120(x-y)=n(x-y) \Leftrightarrow n=120.$$

Процесс пошаговой формализации условий задачи на работу лучше всего начинать с ее вопроса (хотя бывают исключения). Помните, что практически во всех *задачах на работу главными параметрами* для составления уравнений являются *производительности*. Поэтому старайтесь сразу их задействовать, даже если в вопросе задачи речь идет совсем о других параметрах.

Часто возникают ситуации, когда число используемых вами переменных превышает число составленных уравнений. В подобных случаях не стремитесь определить все переменные (тем более, что это невозможно), а ориентируйтесь на то, что требуется найти в задаче.

Задача 8. Заказ по изготовлению деталей выполняется на станках двух типов. За 9 ч выполняют весь заказ 47 станков первого типа и 36 станков второго типа, а за 18 ч выполняют весь заказ 17 станков первого типа и 43 станка второго типа. На сколько процентов время выполнения заказа одним станком первого типа меньше времени выполнения заказа одним станком второго типа?

Решение. МПФ начнем с вопроса задачи: пусть x — время выполнения заказа одним станком первого типа, y — время выполнения заказа одним станком второго типа, $\frac{x}{y}\cdot 100-100$ — искомая величина.

Теперь задействуем производительности: пусть z — объем всего заказа, $\frac{z}{x}$ — производительность станка первого типа, $\frac{z}{y}$ — производительность станка второго типа.

Фраза «за 9 ч выполняют весь заказ 47 станков первого типа и 36 станков второго типа» формализуется так: $9\left(47\cdot\frac{z}{x}+36\cdot\frac{z}{y}\right)$ — объем всего заказа.

Фраза «за 18 ч выполняют весь заказ 17 станков первого типа и 43 станка второго типа» формализуется так: $18\left(17\cdot\frac{z}{x}+43\cdot\frac{z}{y}\right)$ — объем всего заказа.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, равные одной и той же величине — объему всего заказа:

$$9\left(47\cdot\frac{z}{x}+36\cdot\frac{z}{y}\right) \text{ и } 18\left(17\cdot\frac{z}{x}+43\cdot\frac{z}{y}\right).$$

Приравняв их, получим уравнение

$$9\left(47\cdot\frac{z}{x}+36\cdot\frac{z}{y}\right)=18\left(17\cdot\frac{z}{x}+43\cdot\frac{z}{y}\right)\Leftrightarrow\frac{47}{x}+\frac{36}{y}=2\left(\frac{17}{x}+\frac{43}{y}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{13}{x}=\frac{50}{y}\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{y}=\frac{13}{50}.$$

Отсюда находим искомую величину:

$$\frac{x}{y}\cdot 100-100=\frac{13}{50}\cdot 100-100=-74\%.$$

Обратите внимание, что в задаче спрашивается: на сколько процентов время выполнения заказа станком первого типа *меньше* времени выполнения заказа одним станком второго типа? Поэтому ответ: меньше на 74%.

Задача 9. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч, первый, третий и пятый вместе — за 5 ч, первый, третий и четвертый вместе — за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе — за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек, работая вместе?

Решение. Введем производительности: x, y, z, t, u — производительности соответственно первого, второго, третьего, четвертого, пятого рабочих в час.

Вопрос задачи формализуется так: пусть ω — время, за которое выполнят всю работу все 5 человек, работая вместе, тогда $(x+y+z+t+u)\cdot\omega$ — объем всей работы.

Фраза «первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч» формализуется так: $7{,}5\cdot(x+y+z)$ — объем всей работы.

Фраза «первый, третий и пятый, работая вместе, могут выполнить всю работу за 5 ч» формализуется так: $5\cdot(x+z+u)$ — объем всей работы.

Фраза «первый, третий и четвертый, работая вместе, могут выполнить всю работу за 6 ч» формализуется так: $6\cdot(x+z+t)$ — объем всей работы.

Фраза «второй, четвертый и пятый, работая вместе, могут выполнить всю работу за 4 ч» формализуется так: $4\cdot(y+t+u)$ — объем всей работы.

Среди составленных алгебраических выражений имеются 4 пары выражений, равных одной и той же величине — объему выполненной работы. Они приводят к системе уравнений, в которой число переменных больше числа уравнений:

$$\begin{cases} 7,5\cdot(x+y+z)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega; \\ 5\cdot(x+z+u)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega; \\ 6\cdot(x+z+t)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega; \\ 4\cdot(y+t+u)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{7,5}; \\ x+z+u=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{5}; \\ x+z+t=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{6}; \\ y+t+u=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{4}. \end{cases}$$

Умножив обе части последнего уравнения на 2 и сложив почленно затем все уравнения, придем к уравнению:

$$3\cdot(x+y+z+t+u)=(x+y+z+t+u)\cdot\left(\frac{\omega}{7,5}+\frac{\omega}{5}+\frac{\omega}{6}+\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 3=\frac{\omega}{7,5}+\frac{\omega}{5}+\frac{\omega}{6}+\frac{\omega}{2}\ \Leftrightarrow\ 3=\omega.$$

К *задачам на движение* МПФ применяется наиболее эффективно. При этом в каждой задаче надо следить за унификацией (приведением к одному типу) единиц измерения скорости, расстояния, времени, отдавая предпочтение тем единицам измерения, о которых говорится в условии задачи.

Практически в каждой задаче на движение используются две следующие формулы: если расстояние между объектами в момент начала их движения равно S км, а их скорости равны v и w км/ч, то:

- при движении этих объектов навстречу друг другу они встретятся через $\dfrac{S}{v+w}$ ч;

- при движении этих объектов в одном направлении объект с большей скоростью v догонит объект с меньшей скоростью w через $\frac{S}{v-w}$ ч.

При этом в качестве объектов необязательно должны быть движущиеся средства или живые существа.

Задача 10. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и третья свечи имели одинаковую длину, а через 2 ч после этого первая и вторая свечи стали иметь одинаковую длину. За сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья — за 8 ч?

Решение. Применим МПФ. Фраза «три свечи имеют одинаковую длину» и вопрос задачи «за сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья — за 8 ч?» формализуются так: пусть z — начальная длина свечей, x — время сгорания первой свечи, тогда $\frac{z}{x}$, $\frac{z}{12}$, $\frac{z}{8}$ — скорости сгорания первой, второй, третьей свечей соответственно.

Фраза «первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно» формализуется так: $\frac{z}{x}\cdot 1$ — длина, на которую первая свеча была короче двух других свечей к моменту их зажжения.

Фраза «в некоторый момент горения первая и третья свечи имели одинаковую длину» формализуется так: $\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{8}-\frac{z}{x}}$ — время, через которое третья свеча «догонит» по длине первую.

Фраза «через 2 ч после этого первая и вторая свечи стали одинаковой длины» формализуется так: $\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{8}-\frac{z}{x}}+2$ — время, через которое вторая свеча «догонит» по длине первую (с момента зажжения второй).

Но с другой стороны, эта же величина равна $\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{12}-\frac{z}{x}}$. Отсюда

имеем уравнение:

$$\frac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{8}-\frac{z}{x}}+2=\frac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{12}-\frac{z}{x}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{12}-\frac{1}{x}}-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{x}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=16;\\ &x=6.\end{aligned}\right.$$

Значение $x=6$ не подходит по смыслу, поскольку $x>12$. Поэтому искомое число равно 16.

Задача 11. Колонна автомобилей, движущихся равномерно с постоянной скоростью, имеет длину 5 км. Рядом с последним автомобилем едет мотоциклист. По приказу начальника колонны он увеличил скорость, поравнялся с головной машиной и с той же скоростью вернулся в конец колонны. За это время колонна продвинулась вперед на 5 км. Сколько километров проехал мотоциклист?

Решение. Применим МПФ. Фраза «колонна автомобилей, движущихся равномерно с постоянной скоростью, имеет длину 5 км; рядом с последним автомобилем едет мотоциклист; по приказу начальника колонны он увеличил скорость» формализуется так: пусть x — увеличенная скорость мотоциклиста, y — скорость колонны, 5 — длина колонны.

Фраза «мотоциклист поравнялся с головной машиной» формализуется так: $\dfrac{5}{x-y}$ — время, за которое мотоциклист догонит головную машину.

Фраза «мотоциклист вернулся в конец колонны» формализуется так: $\dfrac{5}{x+y}$ — время движения мотоциклиста от начала колонны к ее концу.

Фраза «за это время колонна продвинулась вперед на 5 км» формализуется так:

- $\dfrac{5}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}$ — время, затраченное мотоциклистом на проезд из конца колонны в ее начало и затем из начала — в конец;
- $\dfrac{5}{y}$ — время движения колонны, в течение которого мотоциклист выполнял приказ.

Согласно вопросу задачи «Сколько километров проехал мотоциклист?», $\dfrac{5}{y}\cdot x$ — искомая величина.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, равные одной и той же величине — времени, в течение которого мотоциклист выполнял приказ: $\dfrac{5}{y}$ и $\dfrac{5}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}$. Отсюда получаем уравнение:

$$\frac{5}{x+y}+\frac{5}{x-y}=\frac{5}{y} \Leftrightarrow x^2-2xy-y^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}=1\pm\sqrt{2}.$$

Отсюда искомая величина $\dfrac{5}{y}\cdot x$ равна $5\left(1+\sqrt{2}\right)$ — именно столько километров проехал мотоциклист.

Задача 12. Пешеход, идя вдоль шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет автобус и каждые 3 мин проходит встречный автобус. В обе стороны автобусы отправляются через одинаковые промежутки времени, идут без остановок с постоянной и одинаковой скоростью. Через какие промежутки времени отправляются автобусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее автобуса шел пешеход?

Решение. Начнем с вопроса «Через какие промежутки времени отправляются автобусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее автобуса шел пешеход?»:

- x — скорость пешехода (м/мин);
- y — скорость автобусов (м/мин);
- $\frac{y}{x}$ — искомая величина, означающая, во сколько раз медленнее автобуса шел пешеход;
- t — временной интервал движения автобусов.

Фраза «пешеход, идя вдоль шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет автобус» формализуется так: yt — расстояние между автобусами, $\frac{yt}{y-x}=6$ — интервал времени, через который пешехода догоняют автобусы.

Фраза «каждые 3 мин проходит встречный автобус» формализуется так: $\frac{yt}{y+x}=3$ — интервал времени, через который пешеход встречает идущие навстречу автобусы.

В итоге имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{yt}{y-x}=6; \\ \dfrac{yt}{y+x}=3. \end{cases}$$

Разделив почленно эти уравнения, получим $\frac{y+x}{y-x}=2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ y=3x$. Подставим $3x$ вместо y в первое уравнение: $\frac{3xt}{3x-x}=6 \Rightarrow t=4$.

Итак, скорость автобуса в 3 раза больше скорости пешехода, а интервал движения автобусов равен 4 мин.

Задача 13. Два пассажира начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 40 ступенек, а второй — 60. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

Решение. Фраза «два пассажира начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого» формализуется так:

- x — скорость первого пассажира (ступенек/мин) по неподвижному эскалатору;
- $2x$ — скорость второго пассажира (ступенек/мин) по неподвижному эскалатору;
- y — скорость эскалатора (ступенек/мин);
- z — расстояние, которое надо пройти по неподвижному эскалатору;
- $\dfrac{z}{x+y}$ — время спуска первого пассажира;
- $\dfrac{z}{2x+y}$ — время спуска второго пассажира;
- $\dfrac{z}{x+y}y$ — число ступенек, которые «пройдет» эскалатор за время спуска первого пассажира;
- $\dfrac{z}{2x+y}y$ — число ступенек, которые «пройдет» эскалатор за время спуска второго пассажира.

Фраза «один из них насчитал 40 ступенек» формализуется так: $z-40$ — число ступенек, которые «ушли» за время спуска первого пассажира.

Фраза «второй насчитал 60» формализуется так: $z-60$ — число ступенек, которые «ушли» за время спуска второго пассажира.

Среди составленных алгебраических выражений имеются две пары выражений, одинаковых по смыслу, которые приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{z}{2x+y}\cdot y=z-60;\\[2mm] \dfrac{z}{x+y}\cdot y=z-40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{30(2x+y)}{x}=z;\\[2mm] \dfrac{40(x+y)}{x}=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}60+\dfrac{30y}{x}=z;\\[2mm] 40+\dfrac{40y}{x}=z.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение почленно на 4, второе — на -3, а затем сложим почленно полученные уравнения. В итоге получим: $z=120$.

Задача 14. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий автомобиль, в 30 км от охотничьей базы — между этой базой и домом приятеля. Они тронулись в путь одновременно, причем владелец автомобиля поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца автомобиля, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость автомобиля?

Решение. Начнем с вопроса «Какова скорость автомобиля?»: пусть x — скорость пешехода (км/ч), y — скорость автомобиля (км/ч).

Фраза «Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома» формализуется так: $y\cdot 1$ — общее расстояние, которое проехал автомобиль.

Фраза «Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий автомобиль, в 30 км от охотничьей базы — между этой базой и домом приятеля» формализуется так:

- $\dfrac{y\cdot 1-30}{2}$ — расстояние (км), которое проехал автомобиль до встречи с пешеходом;
- $16-\dfrac{y\cdot 1-30}{2}=\dfrac{62-y}{2}$ — расстояние, пройденное пешеходом до встречи;
- $\dfrac{y\cdot 1-30}{2y}$ — время (ч), которое ехал автомобиль до встречи;
- $\dfrac{62-y}{2x}$ — время, которое шел пешеход до встречи.

Фраза «Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца автомобиля, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода» формализуется так:

- $\frac{11}{x}$ — время (ч) движения пешехода до встречи с момента выхода пешехода из дома;
- $2\frac{2}{3}$ — время движения пешехода до начала движения автомобиля;
- $\frac{11}{x}-2\frac{2}{3}$ — время движения пешехода до встречи с автомобилем с момента начала движения автомобиля;
- $\frac{5}{y}$ — время движения автомобиля до встречи с пешеходом с момента начала движения автомобиля.

Среди составленных алгебраических выражений имеются две пары выражений, одинаковых по смыслу, которые приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y-30}{2y}=\dfrac{62-y}{2x}; \\ \dfrac{11}{x}-2\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x}=\dfrac{y-30}{2y(62-y)}; \\ \dfrac{11}{x}=\dfrac{8y+15}{3y}. \end{cases}$$

Разделив почленно эти уравнения, получим:

$$\frac{1}{11}=\frac{3(y-30)}{(62-y)(8y+15)} \Leftrightarrow y=60 \text{ км/ч}.$$

В задачах на движение с тремя (и более) объектами «прямолинейные» рассуждения приводят к громоздким системам уравнений. Прием, который уменьшает число объектов и, как следствие, упрощает задачу, заключается в рассмотрении *относительных скоростей*: самый медленный объект объявляется неподвижным, а скорости остальных объектов берутся относительно неподвижного. Например, если A и B движутся соответственно со скоростями a и b, причем $a<b$, то скорость B относительно A равна $b-a$.

Задача 15. Автобус, грузовик и легковой автомобиль движутся по шоссе в одном направлении с постоянными скоростями. Когда автобус и грузовик находились в одной точке, легковой автомобиль отставал от них на 24 км. Когда легковой автомобиль догнал грузовик, автобус отставал от них на 12 км. Найти расстояние между грузовиком и автобусом в тот момент, когда легковой автомобиль и автобус находились в одной точке.

Решение. Из условия задачи нетрудно заметить, что самым медленным видом транспорта является автобус. Будем считать его неподвижным. Тогда события, описанные в задаче, наглядно можно отобразить на рис. 2.44, где точка А отображает местоположение автобуса, которое остается неизменным, буквами Г и Л отмечены точки расположения грузовика и легкового автомобиля в разные моменты времени, перечисленные в задаче.

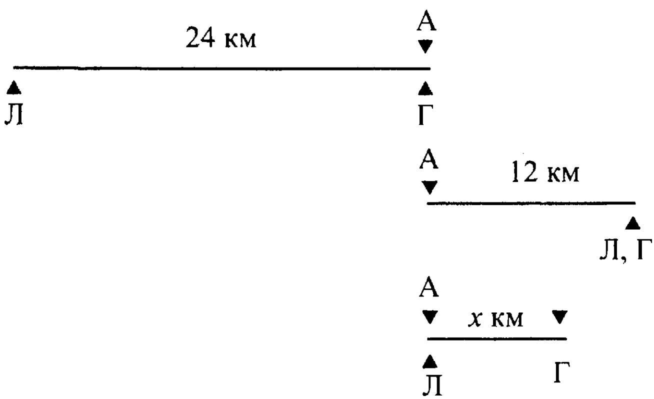


Рис. 2.44

Из рисунка ясно, что грузовик проходит 12 км за то же время, за которое легковой автомобиль проходит 36 км, т. е. относительная скорость грузовика в 3 раза меньше относительной скорости легкового автомобиля. Из этого же рисунка ясно, что грузовик проходит x км за то же время, за которое легковой автомобиль проходит 24 км, откуда $x = \frac{24}{3} = 8$. Итоговый ответ: 8 км.

В предыдущей задаче мы обошлись без введения переменных и, следовательно, без использования МПФ (подобный способ решения будем называть **арифметическим**). С такими задачами учащиеся, например, встречаются в начальных классах, прежде чем знакомятся с понятием алгебраического уравнения. Арифметический способ эффективен там, где элементарные рассуждения позволяют заменить громоздкую систему уравнений.

Задача 16. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 10 км от их дома. Сначала они собирались идти вместе на стадион пешком, но изменили намерение и решили воспользоваться велосипедом, договорившись, что один отправится на велосипеде, а другой одновременно с ним — пешком. Проехав часть пути, первый оставил велосипед, а второй, дойдя до оставленного велосипеда, поехал на нем дальше и догнал первого у входа на стадион. При этом каждый из них пешком шел с той же скоростью, с какой они планировали вначале идти вместе на стадион. Сколько времени выиграли братья по сравнению с первоначальным планом идти весь путь пешком, если каждый из них на велосипеде преодолевал каждый километр на 12 мин быстрее, чем пешком?

Решение. Арифметический способ. Поскольку братья затратили на весь путь одинаковое время, шли пешком с одинаковой скоростью и их скорости на велосипеде также были равны, то пешком они прошли одинаковые расстояния. Поскольку в сумме пешком они прошли 10 км, следовательно, каждый из них прошел пешком 5 км. Поэтому выигрыш во времени составил $5 \cdot 12 = 60$ мин.

Для сравнения решим эту же задачу с помощью МПФ (детали опускаются):

- x — скорость братьев пешком (км/мин);
- y — скорость их на велосипеде (км/мин);
- $\frac{1}{x}$ — время (мин), за которое они проходили 1 км;
- $\frac{1}{y}$ — время, за которое они проезжали 1 км на велосипеде;

- z — расстояние (км), которое первый проехал на велосипеде (второй прошел пешком);
- $10-z$ — расстояние, которое второй проехал на велосипеде (первый прошел пешком);
- $\frac{z}{y}+\frac{10-z}{x}$ — время первого брата в пути;
- $\frac{z}{x}+\frac{10-z}{y}$ — время второго брата в пути.

Отсюда имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=12;\\ \frac{z}{y}+\frac{10-z}{x}=\frac{z}{x}+\frac{10-z}{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=12;\\ (2z-10)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow z=5.$$

Отсюда $5\cdot 12=60$ (мин) — искомая величина.

Задача 17. Имеется 5 ведер с водой. Из первого ведра перелили $1/5$ часть имеющейся в нем воды во второе ведро, затем из второго ведра $1/5$ часть оказавшейся там после переливания из первого ведра воды перелили в третье ведро и т. д. Наконец, из пятого ведра перелили $1/5$ часть оказавшейся в нем после переливания из четвертого ведра воды в первое ведро. После этого в каждом ведре оказалось a л воды. Сколько воды было первоначально в каждом ведре?

Решение. После того как из второго и третьего ведер забрали $1/5$ часть имевшейся в них воды, по условию в них оказалось одинаковое количество воды. Поэтому в моменты, предшествующие забору воды из этих ведер, в них было равное количество воды. Значит, из третьего ведра забрали столько же воды, сколько забрали из второго. Другими словами, в третье ведро из второго долили столько же воды, сколько затем из третьего забрали, т. е. количество воды в третьем ведре в результате переливаний не изменилось (осталось равным a л). Кроме того, после забора из третьего ведра $1/5$ части воды оставшиеся в нем a л составили $4/5$ части от имевшейся после переливания из второго, т. е. сразу после переливания из второго ведра в третьем оказалось $\frac{5}{4}a$ л воды.

Аналогичные рассуждения применимы к четвертому и пятому ведрам, в которых количество воды также осталось равным a л, причем из пятого в первое перелили $1/5$ часть от $\frac{5}{4}a$ л, т. е. $\frac{a}{4}$ л воды.

Следовательно, в первом ведре в момент, предшествующий переливанию из пятого, имелось $\frac{3}{4}a$ л. Эти $\frac{3}{4}a$ л составляли $4/5$ части от того, что было в первом ведре первоначально (вспомним, что из первого ведра сразу забрали $1/5$ часть воды). Следовательно, в первом ведре первоначально было $\frac{15}{16}a$ л. Следовательно, $\frac{3}{16}a$ л воды из первого ведра перелили во второе, и в нем оказалось $\frac{5}{4}a$ л воды. Значит, во втором ведре первоначально было $\frac{5}{4}a-\frac{3}{16}a=\frac{17}{16}a$ л воды. Итак, в ведрах первоначально было $\frac{15}{16}a$, $\frac{17}{16}a$, a, a, a литров воды соответственно.

Как мы видим, задача успешно решена арифметически. Более того, прямолинейное применение МПФ привело бы к достаточно громоздким уравнениям, число которых определялось бы числом n ведер в условии задачи. Приведенное же здесь арифметическое решение легко распространяется на произвольное значение n.

А теперь попробуем распутать арифметическим способом следующую «запутанную» задачу.

Задача 18. Ване сейчас на 6 лет больше, чем было Юре a лет назад (a — неизвестная величина), когда Ване было столько, сколько Юре сейчас. Когда Юре будет столько, сколько Ване сейчас, им вместе будет 60 лет. Сколько лет каждому из них сейчас?

Решение. На рис. 2.45 наглядно изображены события, описанные в условии задачи. Из рисунка ясно, что $2a=6$, поскольку сегодня Ваня старше «Юры из прошлого» на 6 лет. Через $a=3$ года их суммарный возраст составит 60 лет. Так как оба суммарно постареют на $2a=6$ лет (опять см. рис. 2.45), то сейчас им вместе 54 года. И так как Ваня старше Юры на 3 года, то Юре сейчас $\frac{54-3}{2}=25{,}5$ лет, а Ване сегодня $\frac{54-3}{2}+3=28{,}5$.

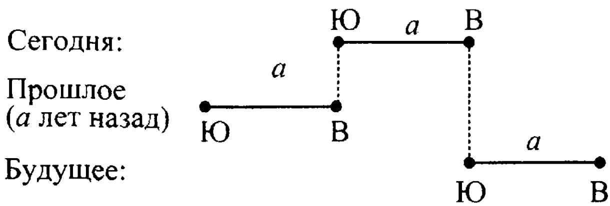


Рис. 2.45

Иногда можно натолкнуться на нетипичную текстовую задачу, которая рассчитана на здравый смысл и не подразумевает ни применения МПФ, ни арифметического способа решения. В качестве примера приведем следующую задачу.

Задача 19. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 110 км, с постоянной скоростью выезжает автобус. Через 30 мин за ним выезжает мотоциклист со скоростью 60 км/ч, который, догнав автобус, возвращается обратно в пункт A с прежней скоростью. Найти максимально возможное целое значение скорости автобуса (в км/ч), при котором автобус прибывает в пункт B раньше, чем мотоциклист возвращается в пункт A.

Решение. В задаче требуется найти максимально возможное значение скорости автобуса (обозначим ее через x), при которой он прибывает в пункт B раньше, чем мотоциклист возвращается в A. Однако ясно, что для выполнения этого требования скорость автобуса можно наращивать неограниченно. Чем же ограничена эта скорость (помимо мощности мотора)? Это ограничение «спрятано» в самом условии задачи, подразумевающем, что мотоциклист догонит автобус еще до прибытия последнего в пункт B. Поэтому максимально возможная скорость автобуса — эта та скорость, при которой автобус будет настигнут мотоциклистом в момент прибытия автобуса в пункт B. А так как с момента начала движения мотоциклиста автобус будет находиться в пути еще $\frac{110 - x \cdot 0{,}5}{x}$ ч, а время движения мотоциклиста из A в B равно $\frac{110}{60}$, то максимальное значение скорость x принимает в случае равенства $\frac{110}{60} = \frac{110 - x \cdot 0{,}5}{x}$, откуда $x = \frac{330}{7} = 47\frac{1}{7}$. Поскольку в задаче требуется найти максимальное целое значение x, то искомым значением будет 47 км/ч.

В ходе применения МПФ могут, помимо уравнений, появляться и неравенства. В этих случаях следует с помощью уравнений и метода прямой подстановки свести число переменных в неравенствах к одной и затем воспользоваться целочисленностью оставшейся переменной, чтобы добыть ее значение из неравенства.

Задача 20. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение. Обозначим через n число листов в альбоме, а через m — первоначальное число марок у школьника.

Фраза «если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома» означает, что $20n < m$.

Фраза «если он наклеит по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым» означает, что $23(n-1) \geq m$.

Фраза «подарили такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке» означает, что у школьника станет $m+21n$ марок, число которых равно 500.

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} m+21n=500; \\ 20n<m; \\ 23(n-1)\ge m. \end{cases}$$

Из уравнения выразим переменную m и исключим ее из неравенств:

$$\begin{cases} m=500-21n; \\ 20n<500-21n; \\ 23(n-1)\ge 500-21n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 41n<500; \\ 44n\ge 523 \end{cases} \Rightarrow \frac{523}{44}\le n<\frac{500}{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11{,}8\ldots\le n<12{,}1\ldots \Rightarrow n=12.$$

Отдельный класс задач составляют *комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии*. В решениях таких задач необходимо избегать наращивания числа переменных. Этого можно достичь, если условие «числа a, b, c, d, ... являются последовательными членами арифметической прогрессии» заменить эквивалентными равенствами $b-a=c-b=d-c=\ldots$, а условие «числа a, b, c, d, ... являются последовательными членами геометрической прогрессии» заменить эквивалентными равенствами $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\ldots$

Задача 21. Три числа, сумма которых равна 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найти большее из этих чисел.

Решение. Обсудим два возможных варианта обозначения искомых чисел.

1. Их можно обозначить x, xq, xq^2, учитывая, что эти числа образуют геометрическую прогрессию.

2. Также их можно обозначить a, $a+3d$, $a+24d$ $(d \neq 0)$, учитывая другое условие задачи.

Поскольку в первом случае мы будем иметь дело с одночленами первой и третьей степени, тогда как во втором случае — только с линейными выражениями, отдадим предпочтение второму варианту.

Итак, сумма искомых чисел a, $a+3d$, $a+24d$ равна 114: $a+(a+3d)+(a+24d)=114$, а сами эти числа являются последовательными членами геометрической прогрессии, что означает справедливость равенства $(a+3d)^2 = a(a+24d)$.

Осталось решить составленную систему уравнений:

$$\begin{cases} 3a+27d=114; \\ (a+3d)^2 = a(a+24d); \\ d \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+9d=38; \\ a^2+6ad+9d^2 = a^2+24ad; \\ d \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+9d=38; \\ 9d(2a-d)=0; \\ d \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+9d=38; \\ d=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2; \\ d=4. \end{cases}$$

Поскольку $d=4>0$, то наибольшим из искомых чисел является последнее число, равное $a+24d=2+24\cdot 4=98$.

Задача 22. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2 (не меняя порядка чисел), то прогрессия станет арифметической, а если после этого последнее число увеличить на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти первоначальные числа.

Решение. Так как исходные три числа образуют геометрическую прогрессию, их можно обозначить x, xq, xq^2. После увеличения второго числа на 2 полученные три числа, согласно условию, составляют арифметическую прогрессию, что эквивалентно равенству $xq+2-x = xq^2-(xq+2)$.

И наконец, после увеличения третьего числа на 9 полученные три числа x, $xq+2$, xq^2+9, согласно условию, будут составлять геометрическую прогрессию, что эквивалентно равенству $\dfrac{xq+2}{x}=\dfrac{xq^2+9}{xq+2}$.

Итак, имеем систему из двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} xq+2-x=xq^2-xq-2; \\ \dfrac{xq+2}{x}=\dfrac{xq^2+9}{xq+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(q^2-2q+1\right)=4; \\ \left(xq+2\right)^2=x^2q^2+9x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{q^2-2q+1}; \\ x\left(4q-9\right)=-4. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x из первого уравнения во второе, получаем:

$$\frac{\left(4q-9\right)\cdot 4}{q^2-2q+1}=-4 \Leftrightarrow q^2+2q-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=-4; \\ q=2. \end{array}\right.$$

Итак, если $q=-4$, то $x=\dfrac{4}{25}$, если $q=2$, то $x=4$. Таким образом, получено два набора чисел: $\{4,8,16\}$ и $\left\{\dfrac{4}{25},-\dfrac{16}{25},\dfrac{64}{25}\right\}$.

Многие текстовые задачи формулируются как *задачи на нахождения наибольшего или наименьшего значений* какой-либо величины, фигурирующей в условии. При этом, если задача сводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения уже хорошо изученной вами функции (например, к квадратному трехчлену), не стоит сразу прибегать к использованию производной для нахождения точек экстремума.

Задача 23. Производительность 1-й бригады — 200 деталей в день, 2-й — $200-x$ деталей в день, 3-й — $200+6x$ деталей в день. Вначале первая и вторая бригады, работая вместе, сделали $\dfrac{1}{6}$ всей работы, а затем все три бригады выполнили оставшуюся часть работы. При каком x вся работа будет выполнена за наименьшее время?

Решение. Всю работу возьмем за 1. Тогда суммарное время работы будет

$$\frac{1}{6(200+200-x)}+\frac{5}{6(200+200-x+200+6x)}=$$

$$=\frac{1}{6(400-x)}+\frac{5}{6(600+5x)}=\frac{2600}{6(400-x)(600+5x)}.$$

Последнее выражение принимает наименьшее значение тогда, когда $y=(400-x)(600+5x)$ принимает наибольшее значение. Но $y=-x^2+1400x+400\cdot 600$ — парабола, вершина которой имеет абсциссу 140. Потому y принимает наибольшее значение при $x_0=140$.

§ 2.7. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $x^3-6x^2-xy+13x+3y+7=0$.

2. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $3xy+16x+13y+61=0$.

3. В классе 13 мальчиков и 16 девочек. Каждый получил хотя бы по одной конфете, причем всем мальчикам досталось поровну конфет и всем девочкам досталось поровну конфет. Оказалось, что существует лишь один способ раздачи (так, чтобы раздать все конфеты). Какое наибольшее число конфет могло быть в данном случае?

4. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 7x+y<7; \\ 7x-y>-7; \\ y-5>0. \end{cases}$$

5. Дано: a и b — натуральные числа, $a \geq b$, $\text{НОД}(a, b) = 22$, $\text{НОК}(a, b) = 4620$. Найти наименьшее возможное значение $a - b$.

6. Среди всех пар (a, b) натуральных чисел a и b, НОД которых равен 13, а НОК равен 78, найти пару с наименьшим значением $a + b$. В ответ записать это значение $a + b$.

7. Сколько существует прямоугольников, у которых длины сторон выражаются целыми числами, а площадь равна периметру?

8. Найти все пары (x, y) натуральных чисел x, y, такие, что $xy^2 + 3y^2 - x = 108$. В ответ записать сумму всех возможных натуральных значений для переменной x.

9. Найти количество натуральных чисел n, удовлетворяющих равенству $n^3 - 5n^2 = 137$.

10. Найти среднее арифметическое всех двузначных чисел, у которых удвоенная сумма цифр равна произведению этих цифр.

11. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает квадрат некоторого натурального числа. Сколько всего таких двузначных чисел?

12. Для каждой пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $(x^2 + y^2)(2x - y - 11) = 2xy$, вычислить сумму $x + y$. В ответ записать наибольшую из этих сумм.

13. Найти все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства $3y - 5x > 16$, $3y - x < 44$, $3x - y > 1$.

Решить уравнение (**14–23**).

14. $(2x-1)^2 + (2x-1)(x+2) - 2(x+2)^2 = 0$.

15. $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$.

16. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$.

17. $(2x-3)(2x-1)(x+1)(x+2) = 36$.

18. $x^2+4x+3=\dfrac{3}{x^2+6x+8}$.

19. $3x^2-6x+7=\dfrac{20}{7x^2-14x+12}$.

20. $2x^4-5x^3-x^2+3x+1=0$.

21. $6x^4-11x^3+9x^2-11x+3=0$.

22. $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2+10x+24\right)=10x^2$.

23. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\dfrac{13}{3}=0$.

Решить неравенство (**24–26**).

24. $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x-3\right)\geq 5$.

25. $\left(x^2+3x\right)(2x+3)-16\cdot\dfrac{2x+3}{x^2+3x}\geq 0$.

26. $x(x+1)(x+2)(x+3)<48$.

Найти сумму корней уравнения (**27–29**).

27. $x+1+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}+\dfrac{x^2+14x+56}{x+7}$.

28. $x^2-3x+2+\dfrac{\left(x^2-9x-10\right)^2}{x^2-3x+2}=\dfrac{36(x+2)^2}{x^2-3x+2}$.

29. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2+\dfrac{x+1}{x}-6\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2=0$.

30. Найти произведение корней уравнения:

$$5x^2(x+1)+x^4=6(x+1)^2.$$

31. Решить уравнение $x^2\sqrt{5}x+4y-4\sqrt{y}+\dfrac{9}{4}=0$ и найти $\sqrt{5}xy$.

32. Решить уравнение $\left(x^2+6x+11\right)\left(21-8y+y^2\right)=10$ и найти $x+y$.

Решить уравнение (**33–35**).

33. $2x^2-8x+23=\dfrac{150}{25x^2-10x+11}$.

34. $12x^2+11+\dfrac{1}{3x^2}+10\left(2x+\dfrac{1}{3x}\right)=0$.

35. $4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0$.

36. Решить уравнение $9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0$ и найти $3x-y$.

37. Решить неравенство: $2x^2+2x+1-\dfrac{15}{x^2+x+1}<0$.

38. Найти произведение корней уравнения: $x^2+\dfrac{8}{x}=4x+4-\dfrac{4}{x^2}$.

39. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}x^2+xy-y^2=4;\\ x^2+y^2-4x-2y+4=0.\end{cases}$$

40. Найти значения a, при которых уравнение $4ax^2+(4a-3)x+a-14=0$ имеет на отрезке $[0;\,1]$ единственный корень.

41. Найти такие значения параметра a, при которых график функции $y=\dfrac{x^2+(a-4)x+4}{x-1}$ имеет с осью абсцисс одну общую точку.

42. При каких значениях a уравнение $x-4=\dfrac{a}{x}$ имеет два различных корня?

43. Найти минимальное целое a, при котором сумма кубов корней уравнения $x^2+(a+2)x+3a+1=0$ меньше $5a-2$.

44. При каких значениях параметра a уравнение $(a+1)x^2+(3a+1)x-2(a+1)=0$ имеет два целых корня?

45. Найти такие a, при которых все корни уравнения $(a+3)x^2+2(a-2)x+a-4=0$ отрицательные. В ответ записать сумму целых значений a, удовлетворяющих неравенству $|a|\le 6$.

46. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2+ax-1=0$ меньше 3?

47. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2+x+a=0$ больше a?

48. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2-2ax+a^2-a=0$ больше -2, но меньше 6?

49. Найти все значения параметра m, при которых корни уравнения $x^2-2(m-1)x+2m+1=0$ имеют разные знаки и оба по модулю меньше 4.

50. Найти все значения параметра a, при которых любое решение неравенства $1\le x\le 2$ является решением неравенства $x^2-ax+1<0$.

51. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-2x-a^2+1=0$ лежат между корнями x_1 и x_2 уравнения $x^2-2(a+1)x-a(a-1)=0$?

52. Найти все такие значения a, при которых неравенство $x^2+ax+a^2+6a<0$ верно для любого x из промежутка $(1;\,2)$.

53. Найти все такие значения a, при которых все решения неравенства $ax^2+(1-a^2)x-a>0$ принадлежат промежутку $[-2;\,2]$.

54. При каком наибольшем целом k оба корня уравнения $x^2-2kx+k^2-1=0$ заключены строго между числами -2 и 4?

55. Найти наибольшее целое отрицательное значение параметра k, при котором уравнение $\dfrac{2}{2x-k}+\dfrac{1}{kx-2}=0$ имеет положительное решение?

56. При каких a оба корня уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежат отрезку $[0;\,3]$?

57. При каких значениях a наибольший корень уравнения $x^2+4x-(a-1)(a-5)=0$ принадлежит промежутку $[0;1)$?

58. При каких значениях a уравнение $x^2-(a-2)x-2-3a=0$ имеет корни x_1 и x_2, такие, что $x_1<0$ и $x_2>0$, $|x_1|>|x_2|$?

59. Составить приведенное квадратное уравнение, произведение корней x_1 и x_2 которого равно 5, если $\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}=\frac{8-a^2}{17-2a^2}$, $a\neq\pm\sqrt{\frac{17}{2}}$. Найти все a, при которых среднее арифметическое корней составленного уравнения меньше одного из корней на 2.

60. Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение

$$\left(3x-a^2+ab-b^2\right)^2+\left(2x^2-a^2-ab\right)^2+x^2+9=6x$$

имеет хотя бы одно решение x.

61. Найти все значения a, при которых любое решение неравенства $ax^2-x+1-a<0$ принадлежит промежутку $(0;1)$.

62. Найти наибольшее отрицательное целое a и наименьшее положительное целое a, при которых неравенство $\frac{ax-a(1-a)}{a^2-ax-1}>0$ выполняется для любых значений x, не превосходящих по модулю 1.

63. Решить уравнение $\left|x-\sqrt{x}-3\right|+\left|\sqrt{x}+7-x\right|=6$.

Решить неравенство (**64–65**).

64. $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{\left|x^2-7x+6\right|-\left|x^2-x-2\right|}\geq 0.$

65. $\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|+\left|2x+1\right|-5}{\sqrt{4x^3+3x^2+4x+3}}\leq 0.$

66. Решить уравнение $5\sqrt{1+|x^2-1|}=3+|3-5x|$.

67. Решить неравенство $\dfrac{10-2|x|}{|x^2+9x+11|-3}\le 1$.

68. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+3-|x+2|)(a+x^2+4x)=0$: 1) имеет ровно три корня; 2) ровно два корня.

69. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2x-|x^3|+a=0$ имеет единственное решение, и решить это уравнение для всех найденных значений a.

70. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|ax^2+3|=|2ax|+|3a|$ имеет хотя бы одно действительное решение.

Решить уравнение (71–77):

71. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$.

72. $|4-x^2|-|x^2-9|=5$.

73. $x^2+|x^5+3|+|x^3-1|=x-|x+1|$.

74. $\dfrac{|3x+27|-|25-2x|-5x-2}{\sqrt{x+8}}=0$.

75. $\sqrt{-11-x}\cdot(|2x+15|+|3x+17|+|4x+11|-74)=0$.

76. $\dfrac{|2x+1|-|2x-3|-4}{\sqrt{x^2-5x-6}}=0$.

77. $|x^3-3x^2+2x|+|x^3+x^2-x-1|=|2x^3-2x^2+x-1|$.

78. Найти число корней уравнения $|x^2-1|+|x|+|2x+3|+6=4x$.

79. Найти сумму корней уравнения $|x-2|(|x|+|x-3|)=5(x-2)$.

80. Найти сумму целых корней уравнения

$$|(x-8)(x^2+4x+3)|=|x-8|(-x^2-4x-3).$$

81. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный) $\dfrac{|4x-13|+x^2-22|x|+121}{x-9}=|x-6|$.

82. Найти произведение большего корня на количество различных корней уравнения $\dfrac{|x^2-5x+6|}{1-x}=x^2-6x+9$.

83. Найти область значений функции $y=|x^2-5x+4|+|x^2-2x|$, заданной на отрезке $[-2;\ 6]$.

84. Решить неравенство $\dfrac{2}{x|x-1|}\le -1$.

85. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $(3-x)|9-x|=a$ имеет три различных корня.

Найти сумму корней уравнения (**86–87**).

86. $\dfrac{|7x-53|+x^2-24|x|+144}{x-10}=|x-4|$.

87. $|14x-|8x+31||=4x+11$.

Найти сумму целых корней уравнения (**88–89**).

88. $|(x+9)(x^2-4x+3)|=|x+9|(-x^2+4x-3)$.

89. $\dfrac{|3x+27|-|25-5x|-8x-2}{\sqrt{x+8}}=0$.

90. Найти сумму целых значений a, при которых уравнение $|x^2-x-6|=a$ имеет четыре различных корня.

91. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} |x-2|+|y+1|=4\sqrt{2}; \\ (x-2)^2+(y+1)^2=16? \end{cases}$$

92. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y + |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

93. Найти все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \left|b - x^2\right|; \\ y = a(x - b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

94. Найти все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = \left|b + y^2\right|; \\ y = a\left(x - b^2\right) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

95. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \le 6x - 4y - 13; \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \le 8y - 10x + 4a - 40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

96. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(x^2 - xy + y^2\right)\left(|x - y| - 6\right) \ge 0; \\ x(x + 2) + y(y - 2) = a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

97. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 \le 8|x| + 8|y|; \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

98. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} \left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 - 36\right) \geq 0; \\ |x - 2 + y| + |x - 2 - y| \leq a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решить неравенство (**99–109**).

99. $\sqrt{\dfrac{3-4x}{5+4x}} + \dfrac{\sqrt{5+4x}}{2\sqrt{3-4x}-2} \geq 0.$

100. $\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}.$

101. $\dfrac{1}{\sqrt{|x+1|-2}} \leq \dfrac{1}{x+9}.$

102. $\dfrac{x\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{x^2-4x+5}} \leq 1.$

103. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2+2x-3}} \geq \dfrac{1}{4-x}.$

104. $\dfrac{\sqrt{8x^3-6x+2}}{2x+1} \leq \sqrt{2x+3}.$

105. $\sqrt{9-\sqrt{76-12x^3}} < 3-x.$

106. $\sqrt{\dfrac{x^2+9x-162}{x-2}} > 9-|x|.$

107. $\sqrt{\dfrac{3x^3-22x^2+40x}{x-4}} \geq 3x-10.$

108. $\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+x-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+x-4\right)}{\sqrt{4+4x-x^2-x^3}} \leq 0.$

109. $\dfrac{5}{6-3\sqrt{6-x-x^2}} - \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{1+|x+1|}.$

110. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение?

111. Найти сумму корней уравнения

$x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2+3x-24} = 36.$

Решить уравнение (**112–114**).

112. $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}}-\sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}}=2.$

113. $\sqrt{x^2-3x+7}=3x+(x-3)^2-22.$

114. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{(x-1)^2}=4\sqrt[3]{x^2-1}.$

115. Найти область определения функции $y=\sqrt{(8-x^2)\sqrt{2x-8}}.$

Решить неравенство (**116–117**).

116. $1+\frac{3}{\sqrt{x+4}}\geq\frac{\sqrt{x+4}+5}{\sqrt{x+4}-2}.$

117. $\sqrt[7]{x^2+3x-10}\cdot\sqrt[6]{2x^2+5x+2}\geq 0.$

Найти сумму целых решений неравенства (**118–119**).

118. $(x^2-x-12)\sqrt{-x^2-2x+8}\leq 0.$

119. $\frac{(x+2)^9(-x-10)^{12}}{\sqrt{49-x^2}(9-x)(x-4)}\geq 0.$

120. Решить неравенство $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0.$

121. Найти значение выражения $x_1(x_1+1)$, где x_1 — корень уравнения $\sqrt[3]{6+\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=3.$

122. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-4}=1-\sqrt{x+1}.$

123. Найти значение выражения $n\cdot S$, где n — количество, а S — сумма корней уравнения

$$x^2+2x-9-2\sqrt{x^2+2x}+4\sqrt[4]{x^2+2x}=6\left(2\sqrt[4]{x^2+2x}-1\right).$$

Решить уравнение (**124–133**).

124. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}.$

125. $x=\left(\sqrt{4-x}+2\right)\left(x^2-2x-13-\sqrt{4-x}\right).$

126. $\sqrt[8]{x}+\sqrt{x+36}=6-x.$ **127.** $\sqrt{x-2}=4-x^2.$

128. $\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{2x}=1.$ **129.** $x^2+x+\sqrt{x-2}=6.$

130. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}=21-x^4.$

131. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}=4-2x.$

132. $3+\sqrt{4x-x^2+5}=\sqrt{10x-x^2-24}+\sqrt{10x-x^2-21}.$

133. $2\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{4x-x^2-3}=2+\sqrt{6x-x^2-8}.$

134. Найти произведение корней уравнения $\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{29-25x+4x^2}=6x-4-x^2.$

Найти сумму корней уравнения (**135–136**).

135. $x^2+x+12-2\sqrt{x+12}=0.$ **136.** $\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{8-2x}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{8-2x}}.$

Решить уравнение (**137–142**).

137. $\sqrt{2x^2-14x+24}-4x=4\sqrt{8-2x}-x\sqrt{3-x}.$

138. $\sqrt{4+(x-1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}=5x.$

139. $\sqrt[3]{45+x}-\sqrt[3]{x-16}=1.$ **140.** $x^3+4=5\sqrt[3]{5x-4}.$

141. $4x^3+1=5\sqrt[3]{\frac{5x-1}{4}}.$ **142.** $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1.$

Решить неравенство (**143–144**).

143. $2x^3+3x+\sqrt{3x^3+2x+4}\le 8.$ **144.** $\sqrt[5]{x-5}+\sqrt{x-2}>9-\frac{x^3}{36}.$

145. Найти сумму наименьшего и наибольшего значений выражения $\sqrt{6+x-x^2}$ на отрезке $\left[-\frac{3}{2};1\right]$.

146. Найти увеличенную в 7 раз сумму всех корней уравнения $\sqrt{9x-46}-\sqrt{2x-8}=\sqrt{x+6}.$

147. Найти увеличенную в 5 раз сумму корней уравнения $\sqrt{4+2x\sqrt{4-x^2}}=6-2x$.

148. Найти сумму корней уравнения $x^2-\dfrac{6}{7\sqrt{x^2+2x}}=1\dfrac{36}{49}-2x$.

149. Найти число, принадлежащее множеству значений функции $y=\sqrt{-144x^2-48x-4}-4$.

150. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{x}\sqrt{x+7}-\sqrt{7}\sqrt{x+4}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\sqrt{2x+8}.$$

151. Найти все значения параметра b, при которых для любого значения параметра a система

$$\begin{cases} ax+y=z+b; \\ 4x+ay=z^2 \end{cases}$$

имеет решение.

152. Найти значение x_0+y_0, если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы

$$\begin{cases} 4x+y=25-4\sqrt{xy}; \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2. \end{cases}$$

Решить системы уравнений (**153–173**).

153. $\begin{cases} 2x^2-3xy+3y^2=80; \\ x^2+xy-2y^2=-56. \end{cases}$

154. $\begin{cases} y+2=(3-x)^3; \\ (2z-y)(y+2)=9+4y; \\ x^2+z^2=4x; \\ z\ge 0. \end{cases}$

155. $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0; \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$

156. $\begin{cases} \sqrt{4x+y+2}-\sqrt{x+y}=2; \\ 5x+2y=8. \end{cases}$

157. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3; \\ 2x+y=7. \end{cases}$

158. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1; \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5. \end{cases}$

159. $\begin{cases} x^2+3=\sqrt{yz}; \\ y^2-9=3xz\sqrt{9-yz}. \end{cases}$

160. $\begin{cases} xy=8; \\ x+2y+\sin 3z=7. \end{cases}$

161. $\begin{cases} x+y=7; \\ xy-z^2=1. \end{cases}$

162. $\begin{cases} (x-2)^2+(y^2-36)^2=4; \\ x^2+y^2+6y=x; \\ x\le 0. \end{cases}$

163. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1; \\ x^4+x^2y^2+y^4=1. \end{cases}$

164. $\begin{cases} x^2y^2(x^2+y^2)=468; \\ x^3+y^3+xy(x+y)=13. \end{cases}$

165. $\begin{cases} 1+xy=\dfrac{x^2y^2}{2x-y}+\dfrac{2x-y}{xy}; \\ \dfrac{2x-y}{xy}\sqrt{2x-y}=4-3xy. \end{cases}$

166. $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=7; \\ \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\dfrac{1}{7}(y^2-2x^2+2x+3). \end{cases}$

167. $\begin{cases} (y-x)(x^2+y^2)=15; \\ (y+z)(y^2+z^2)=-13; \\ (z-x)(x^2+z^2)=-20. \end{cases}$

168. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-8y+16}=5; \\ 4x^2-y^2=5. \end{cases}$

169. $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=2; \\ \dfrac{xyz}{y+z}=1,2; \\ \dfrac{xyz}{x+z}=1,5. \end{cases}$

170. $\begin{cases} y^2+z^2=7x^3; \\ y-z=3x; \\ z-x=y-2. \end{cases}$

171. $\begin{cases} x^3+y^3=7; \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$

172. $\begin{cases} 3x-\sqrt{xy}+2y=29; \\ 2x+\sqrt{xy}-y=20. \end{cases}$

173. $\begin{cases} xy(x-1)(y-1)=72; \\ (x+1)(y+1)=20. \end{cases}$

174. Найти наименьшее целое a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} -3x+ay=1; \\ 2ax+3y=8 \end{cases}$$

имеет решение при условии, что $x<0$, $y>0$.

175. При каком значении a пары чисел $(1;2)$, $(2;4)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} (a-3)x+ay=a^2-1; \\ (a+3)x+(a-3)y=(a-1)^2\,? \end{cases}$$

176. Найти a, при котором система

$$\begin{cases} ax+(a+2)y=2; \\ x+ay=2a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

177. Найти a, при котором система

$$\begin{cases} 2ax + 2y = 3a^2 - 5a + 2; \\ x + ay = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

178. Если $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3x - 4y} + \sqrt{3x + 4y} = 5; \\ \sqrt{9x^2 - 16y^2} = 4, \end{cases}$$

то чему равно $6(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)$?

179. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{4} = 2y - |x - 4|; \\ x^2 = xy - 16. \end{cases}$$

В ответ записать произведение xy.

180. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 7x - 2ay = 5; \\ (4 - 3a)x + 4ay = 7 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решить систему уравнений (**181–198**).

181. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} - 2xy = 16; \\ \dfrac{y^3}{x} + 3xy = 25. \end{cases}$

182. $\begin{cases} 2 + 6y = \dfrac{x}{y} - \sqrt{x - 2y}; \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 2y}} = x + 3y - 2. \end{cases}$

183. $\begin{cases} y^7 + y^6 - 6x^2 = 0; \\ y^5 + \dfrac{x^3}{y^3} = x^2 + xy^2. \end{cases}$

184. $\begin{cases} (2x - y)^2 = 4 + z^2; \\ (z - y)^2 = 2 + 4x^2; \\ (z + 2x)^2 = 3 + y^2. \end{cases}$

185. $\begin{cases} 9x^4+4x^2y=-3; \\ 9x^2y^2+4y^3=-27. \end{cases}$

186. $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2y^5}=4\left(y^2-x^2\right); \\ 5\sqrt[3]{x^4y}=x^2+y^2. \end{cases}$

187. $\begin{cases} xy+2x+3y=2; \\ 2x^2y+3xy^2+12x+18y=16. \end{cases}$

188. $\begin{cases} 2y^2=x^4+x; \\ y=\dfrac{2x}{y}-5x^2. \end{cases}$

189. $\begin{cases} x+\sqrt{\dfrac{x}{x+y}}=\dfrac{42}{x+y}; \\ xy-x=16. \end{cases}$

190. $\begin{cases} x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0; \\ x^2-y^2-7=0. \end{cases}$

191. $\begin{cases} x^2-y^2=2x+4y-3z; \\ y^2-z^2=x-3y+4z; \\ z^2-x^2=-3x+y-5z. \end{cases}$

192. $\begin{cases} 2x^2=yz+2x; \\ 2y^2=xz+2y; \\ 2z^2=xy+2z. \end{cases}$

193. $\begin{cases} \sqrt{x^2-2y}=3y-x; \\ \dfrac{81y^2}{4}+x^3=2x+1. \end{cases}$

194. $\begin{cases} 4y^2-15xy+14x^2+12y-24x=0; \\ \sqrt{x\left(12-7x+4y\right)}+\sqrt{x^2+8x+32}=6. \end{cases}$

195. $\begin{cases} \dfrac{5x}{y}-\dfrac{9y}{x}+10=\dfrac{6}{xy}; \\ \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+4=\dfrac{9}{xy}. \end{cases}$

196. $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=2x-4y+3; \\ \sqrt{3x-6y}=2-xy. \end{cases}$

197. $\begin{cases} 2x^3+3xy+3y^2=16; \\ x^3-x^2+xy+2y^2=8. \end{cases}$

198. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2; \\ 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0. \end{cases}$

199. Найти все значения параметра b, для каждого из которых найдется число a, такое, что система уравнений

$$\begin{cases} x = |y - b| + \dfrac{3}{b}; \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет решения.

200. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4 - y}} = 0; \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

201. В арифметической прогрессии первый член $a_1 = -53$, разность $d = 8$. Найти такой член a_n этой прогрессии, для которого величина $|a_n - 478|$ минимальна.

202. Найти сумму тех членов арифметической прогрессии $\{8,\ 12,\ 16,\ ...,\ 2004,\ 2008\}$, которые являются членами геометрической прогрессии $\{1,\ 4,\ 16,\ ...\}$.

203. Сколько чисел одновременно являются членами двух арифметических прогрессий $\{2,\ 5,\ 8,\ ...,\ 1994\}$ и $\{7, 12, 17, ..., 1992\}$?

204. Сколько чисел, кратных 11, одновременно являются членами двух арифметических прогрессий (a_n) и (b_n), если $a_1 = 5,\ a_2 = 8,\ b_1 = 3,\ b_2 = 7$ и в каждой из них по 1993 члена?

205. В растворе было 40 г соли, затем в него добавили 200 г воды, и раствор стал 10%-м. Какова была первоначальная концентрация соли в растворе?

206. Бригада планировала выловить 1800 ц рыбы. В течение 1/3 запланированного срока она недовыполняла ежедневное плановое задание на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше плановой дневной нормы. Плановое задание было выполнено на один день раньше запланированного срока. Сколько рыбы планировалось вылавливать в день?

207. От пристани одновременно вниз по течению отправились катер и плот. Катер прошел 96 км и повернул назад, вернувшись на пристань через 14 ч. Катер встретил плот на обратном пути в 24 км от пристани. Найти скорость катера (в км/ч) в стоящей воде и скорость течения реки (в км/ч).

208. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый достигнет пункта B?

209. Два поезда выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии 60 км от середины AB. Если бы первый вышел на 2 ч позже второго, то они встретились бы на середине AB. Если бы наоборот — второй вышел на 2 ч позже первого, то они встретились бы на четверти расстояния от B. Найти расстояние AB.

210. Из пункта A в пункт B выехали одновременно два автомобиля. Скорость второго больше скорости первого на 10 км/ч. Через 0,5 ч из A за ними выехал третий автомобиль со скоростью 60 км/ч, который догнал первый и через 1,5 ч после этого — второй. Найти скорости первых двух автомобилей.

211. Расстояние между городами A и B равно 60 км. Два поезда выехали одновременно: один из A в B, другой — из B в A. Первый, проехав 20 км, стоял 0,5 ч, затем отправился дальше и через 4 мин встретил поезд, идущий из B. Определить скорости поездов, если известно, что оба они прибыли в пункты назначения одновременно.

212. Поезд идет по расписанию из A в B 15 ч. Проехав некоторую часть пути, поезд снизил скорость в 5 раз, и поэтому прибыл в B с опозданием на 11 ч. Если бы поезд до снижения скорости проехал на 150 км больше, то опоздание составило бы 1 ч. Найти расстояние между A и B.

213. Три мотоциклиста проезжают с постоянными, но различными скоростями один и тот же участок дороги AB. Сначала пункт A проехал первый мотоциклист, а 5 секунд спустя в том же направлении — второй и третий. Через некоторое время первого мотоциклиста обогнал третий, и еще через 10 секунд его обогнал второй. За сколько секунд первый мотоциклист проедет расстояние AB, если второй проехал это расстояние за 1 мин, а третий — за 40 секунд?

214. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 4 ч после встречи велосипедист, ехавший из A, прибыл в B, а через 9 ч после встречи велосипедист, ехавший из B, прибыл в A. Сколько часов был в пути каждый велосипедист?

215. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

216. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти его.

217. В куске сплава массой 6 кг содержится медь. В куске другого сплава массой 8 кг содержится медь в ином процентном отношении, нежели в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть, а от второго — часть, вдвое большую по массе, чем от первого. Каждую из отдельных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

218. Сплав состоит из олова, меди и цинка. Если от этого сплава отделить 20 г и сплавить их с 2 г олова, то во вновь получившемся сплаве масса меди будет равна массе олова. Если же отделить от первоначального сплава 30 г и прибавить 9 г цинка, то в этом новом сплаве масса олова будет равна массе цинка. Найти в процентах состав первоначального сплава.

219. Сосуд вместимостью 8 л наполнен смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% вместимости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода оказалось 9%. Какое количество смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

220. В банке было куплено 10 фунтов, 10 крон, 10 франков, 10 марок. Стоимость покупки без франков составляет 38 902 руб., без крон — 47 809 руб., без марок — 40 125 руб., без фунтов — 24 721 руб. Сколько стоила единица каждой валюты?

221. В конкурсе красоты каждая из участниц должна обязательно участвовать в двух номинациях из предложенных трех. В номинации A участвовало 25 девушек, в номинации B — 12 девушек, в номинации C — 23 девушки. Сколько девушек участвовало в номинациях A и B одновременно?

222. На складе имеется некоторое число бочек двух образцов общей вместимостью 7000 л. Если бы все бочки были первого образца, то вместимость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если бы все бочки были второго образца, то вместимость уменьшилась бы на 4000 л. Вычислить вместимость всех бочек каждого образца в отдельности.

223. Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 ч дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если бы их было еще на 6 человек больше и каждый работал бы еще на 1 ч в день дольше, то эта работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

224. Для наполнения водой бассейна были поставлены два насоса. Один первый насос может наполнить бассейн на 8 ч скорее, чем один второй. Сначала был открыт только второй насос на время, равное удвоенному количеству времени, которое потребовалось бы для наполнения бассейна при одновременном действии обоих насосов. Затем открыли также первый насос, и через 1,5 ч после того, как был открыт первый насос, бассейн наполнился водой. За сколько часов каждый из насосов, работая порознь, может наполнить бассейн?

225. Несколько студентов решили купить магнитофон ценой от 170 до 195 руб. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 руб. больше. Сколько стоил магнитофон?

226. Для перевозки груза из одного места в другое было затребовано некоторое количество грузовиков одинаковой вместимости. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие же машины. Масса перевезенного груза была не менее 55 т, но не превосходила 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

227. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1:3, то температура смеси будет равна 49 градусов, а если 2:5, то 48 градусов. Найти температуру воды в каждом сосуде.

228. В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый содержится всего 30 л спирта. В первый сосуд доливают доверху воду и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде в итоге оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

229. Из пункта A в пункт B вышел пешеход и одновременно навстречу ему из B выехал велосипедист. Когда расстояние между ними сократилось в 4 раза, вдогонку пешеходу выехал мотоциклист, который и догнал его в момент встречи с велосипедистом. Продолжая движение, мотоциклист прибыл в B тогда же, когда велосипедист прибыл в A. Во сколько раз мотоциклист ехал быстрее велосипедиста?

230. Из двух городов одновременно вышли навстречу друг другу двое и шли до встречи. Если бы первый вышел на час раньше, а второй на полчаса позже намеченного времени, то встреча произошла бы на 18 мин раньше, чем это было в действительности. Если бы первый вышел на полчаса позже, а второй на час раньше намеченного времени, то они встретились бы в 5,6 км от места, где встреча произошла на самом деле. Найти скорости путников.

231. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают 1/50 часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 3%. Определить исходное процентное содержание соли.

232. Из пункта A по одной дороге выезжает одновременно две машины, а через час вслед за ними третья. Еще через час расстояние между третьей и первой машинами уменьшилось в 1,5 раза, а между третьей и второй — в 2 раза. Во сколько раз скорость первой машины больше скорости второй, если известно, что третья машина не обгоняла первую и вторую?

233. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились в 4 км от B. Продолжая движение без остановки и достигнув соответственно пунктов B и A, туристы сразу же повернули обратно. На обратном пути они снова встретились, но уже в 2 км от пункта A. Эта встреча произошла через 2 часа после первой. Найти расстояние AB.

234. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер, пройдя 96 км, повернул обратно и вернулся в A через 14 ч. Найти скорость катера в стоячей воде, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

235. Шестизначное число начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести на последнее место, сохранив порядок остальных, то вновь полученное число будет втрое больше первого. Найти первое число.

236. В пятизначном целом числе известно, что первая цифра равна 4. Найти это число, если корень 6-й степени из него есть целое число.

237. Из двух городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали с постоянными скоростями два автомобиля. Первый автомобиль приехал в B через 4 ч после встречи, а второй — в A через 9 ч после встречи. За какое время первый автомобиль проезжает путь от A до B?

238. Два сосуда равных объемов до краев заполнены раствором кислоты одинаковой концентрации. Из первого сосуда отлили 1 л раствора и долили 1 л воды. Потом эту же процедуру повторили еще раз. Затем из второго сосуда отлили 4 л раствора и долили 4 л воды. Потом эту же процедуру повторили еще раз. В результате концентрация кислоты в первом сосуде стала в 1,21 раз больше, чем во втором. Найти объем сосуда (в литрах).

239. В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т железной руды. В течение нескольких последующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последних 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

240. Первый член арифметической прогрессии равен 24. Известно, что первый, пятый и одиннадцатый члены этой прогрессии составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

241. Сумма первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов отнять по 1, а к третьему члену прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии.

242. Три целых числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической. Если после этого последний член увеличить на 64, прогрессия снова станет геометрической. Найти первоначальные числа.

243. По двум перпендикулярным прямым, которые пересекаются в точке O, движутся две точки по направлению к O со скоростями 1 и 2 м/с соответственно. Достигнув точки O, они продолжают движение. В начальный момент времени расстояние от первой точки до O было 5 м, а расстояние от второй точки до O было 20 м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между точками будет минимальным?

244. 31 декабря бизнесмен взял в банке 993 000 руб. в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10%), а затем бизнесмен переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы бизнесмен выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

245. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей.

ГЛАВА 3. Тригонометрия

§ 3.1. Преобразования тригонометрических выражений

При решении широкого круга задач, связанных с преобразованием тригонометрических выражений, можно успешно использовать несколько общих правил, приемов и трюков. Правила позволяют разработать алгоритм упрощения (вычисления) тригонометрического выражения, тогда как приемы и трюки описывают «техническую реализацию» отдельных шагов этого алгоритма.

Правило 1. Если данное тригонометрическое выражение содержит углы вида $\pi \pm \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ (а также углы, приводящиеся к ним посредством добавления или удаления периода $2\pi n$ — для синуса и косинуса, и πn — для тангенса и котангенса), то упрощение этого выражения всегда начинайте с *правила приведения*. Только не переусердствуйте в попытках использовать правила приведения для углов вида $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\pi}{8} \pm \alpha$ и т. д.

Правило 2. Если выражение содержит тангенсы и/или котангенсы вместе с синусами и/или косинусами (будем называть такие выражения *смешанными*), то по соответствующим формулам *преобразуйте тангенсы и котангенсы в синусы и косинусы*. При этом переход можно осуществить как без изменения углов (по формулам $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$), так и с их удвоением (по формулам

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}).$$

Выбор способа перехода определяется спецификой задачи. Иногда встречаются ситуации, когда в смешанном выражении удобнее «уйти» (с помощью формул $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$) от синусов и косинусов — в этом случае все аргументы синусов и косинусов в смешанном выражении должны вдвое превосходить аргументы тангенсов и котангенсов.

Правило 3. Если выражение содержит тригонометрические функции во второй или более высокой четной степени, то *нужно понизить степени этих функций* либо по формулам

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

либо используя подходящие *формулы сокращенного умножения*.

Правило 4. Если на каком-то этапе решения вы не знаете, что делать дальше, то попробуйте следовать принципам «видишь сумму (разность) — преобразуй в произведение» или «видишь произведение — преобразуй в сумму (разность)» с помощью соответствующих формул преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение и наоборот.

Правило 5. Если требуется найти какую-либо тригонометрическую функцию аргумента α при условии, что задано значение другой функции этого же аргумента α, то воспользуйтесь формулами

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

при этом учитывайте четверть, которой принадлежит угол α.

Правило 6. Его можно условно назвать «принципом родственных углов». Оно связано с *уменьшением количества различных углов* в тригонометрическом выражении с помощью *правил приведения*. Так, если углы α и β связаны одним из равенств $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha \pm \beta = \pi$, $\alpha \pm \beta = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha \pm \beta = 2\pi$, то любая тригонометрическая функция угла α (или β) может быть преобразована в тригонометрическую функцию угла β (или α).

Посмотрим теперь, как, сочетая правила 1–6, можно подобрать ключ к решению следующих задач.

Задача 1. Найти значение выражения

$$A = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \left(\mathrm{tg}^2\alpha - 1\right) \cdot \mathrm{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right)}.$$

Решение. В первую очередь преобразуем $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ в соответствии с *правилом 1* по формулам приведения: $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\alpha$. Далее заметим, что углы $\left(\frac{5\pi}{4} \pm \alpha\right)$ после удвоения преобразуются к виду $2\left(\frac{5\pi}{4} \pm \alpha\right) = \frac{5\pi}{2} \pm 2\alpha$, а значит, упрощаются по правилам приведения. К тому же, поскольку выражение A — смешанное, то по *правилу 2* следует перейти от $\mathrm{tg}^2\alpha$ и $\mathrm{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)$ к синусам и косинусам с удвоением аргументов. По *правилу 3* необходимо также понизить степени функций $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right)$. Руководствуясь приведенными соображениями, запишем:

$$A=\frac{\cos^2\alpha\cdot\left(\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}=$$

$$=-\frac{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cdot\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}-1\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}}{\frac{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}}=$$

$$=-\frac{\left(1+\cos 2\alpha\right)\left(-\frac{2\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}}{1+\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2 2\alpha}{\left(1+\sin 2\alpha\right)\left(1-\sin 2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=2.$$

Задача 2. Вычислить $A=\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 60°\cdot\sin 80°$.

Решение. Сразу подставим табличное значение $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Дальше будем действовать в соответствии с *правилом 4* «видишь произведение — преобразуй в сумму»:

$$A=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 20°\cdot\sin 40°\right)\cdot\sin 80°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 20°-\cos 60°\right)\cdot\sin 80°=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos 20°-\frac{1}{2}\right)\cdot\sin 80°=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos 20°\cdot\sin 80°-\frac{1}{2}\cdot\sin 80°\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}(\sin 60°+\sin 100°)-\frac{1}{2}\sin 80°\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(180°-80°\right)-\sin 80°\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 80°-\sin 80°\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{16}.$$

Задача 3. Найти значение $A=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=2$.

Решение. $A=\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$. Можно было бы продолжить упрощение выражения в таком же духе: $A=-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=-\cos 2\alpha$. Но в этом случае полученный угол 2α и угол $\dfrac{\alpha}{2}$, котангенс которого известен, различаются в 4 раза, что вызывает сложности в преобразовании функции $\cos 2\alpha$ к функции $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Поэтому поступим по-другому: «выровняем» углы, перейдя от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ к $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ по формулам $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Тогда выражение A принимает вид:

$$A=\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2-\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\left(\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2-\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2=$$

$$=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}=0,28.$$

Задача 4. Найти $A=\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$ при условии, что $\cos\alpha=-\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\,\pi\right)$, $\beta\in\left(\pi;\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. Запишем A в виде $A=\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\beta}$.

Вычислим $\operatorname{tg}\alpha$, зная $\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{50}{49} - 1 = \frac{1}{49} \quad\Rightarrow\quad |\operatorname{tg}\alpha| = \frac{1}{7}.$$

Поскольку $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$.

Найдем $\operatorname{tg}2\beta$, используя формулу $\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$. Зная, что $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, вычислим $\operatorname{tg}\beta$:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2\beta = \left(\sqrt{10}\right)^2 - 1 = 9 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{9} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3},$$

поскольку $\beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\operatorname{tg}2\beta = \dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{4}$.

Окончательно получаем: $A = \dfrac{-\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}} = \dfrac{17}{31}$.

Задача 5. Найти значение выражения

$$A = \frac{\cos 4^\circ - \cos 6^\circ - \cos 8^\circ + \cos 10^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 7^\circ}.$$

Решение. Чтобы получить общие множители в числителе и знаменателе, разложим на множители числитель, поступая в соответствии с *правилом 4* «видишь разность — преобразуй в произведение»:

$$\left(\cos 4^\circ - \cos 6^\circ\right) - \left(\cos 8^\circ - \cos 10^\circ\right) = 2\sin 1^\circ \cdot \sin 5^\circ - 2\sin 1^\circ \cdot \sin 9^\circ =$$
$$= 2\sin 1^\circ \cdot \left(\sin 5^\circ - \sin 9^\circ\right) = 2\sin 1^\circ \cdot 2\cos 7^\circ \cdot \sin\left(-2^\circ\right) =$$
$$= -4\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 7^\circ.$$

В результате исходное выражение принимает вид:

$$A = \frac{-4\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 7^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 7^\circ} = \frac{-4\sin 2^\circ}{\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ} = \frac{-4\sin 2^\circ}{\frac{1}{2}\sin 2^\circ} = -8.$$

Задача 6. Упростить выражение

$$A=\sin^2(45^\circ+x)-\sin^2(30^\circ-x)-\sin 15^\circ\cdot\cos(15^\circ+2x).$$

Решение. В соответствии с *правилом 3* понизим степени первого и второго слагаемого, в третьем же слагаемом преобразуем произведение в сумму, как указывает *правило 4*:

$$A=\frac{1-\cos(90^\circ+2x)}{2}-\frac{1-\cos(60^\circ-2x)}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\sin 2x+\sin(30^\circ+2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sin 2x-1+\cos(60^\circ-2x)+\sin 2x-\sin(30^\circ+2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin 2x+\cos(60^\circ-2x)-\sin(30^\circ+2x)\right).$$

По правилам приведения:

$$\sin(30^\circ+2x)=\cos\left(90^\circ-(30^\circ+2x)\right)=\cos(60^\circ-2x).$$

Таким образом, $A=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x=\sin 2x$.

Задача 7. Вычислить: $A=\frac{\mathrm{tg}37^\circ30'+\mathrm{ctg}37^\circ30'}{\sin 165^\circ}$.

Решение. Поскольку $\sin 165^\circ=\sin(90^\circ+75^\circ)=\cos 75^\circ$, то в соответствии с *правилом 2* перейдем от тангенсов и котангенсов аргумента $37^\circ30'=\frac{1}{2}\cdot 75^\circ$ к синусам и косинусам аргумента 75° по формулам: $\mathrm{tg}37^\circ30'=\frac{\sin 75^\circ}{1+\cos 75^\circ}$, $\mathrm{ctg}37^\circ30'=\frac{\sin 75^\circ}{1-\cos 75^\circ}$. Тогда A примет вид:

$$A=\frac{\dfrac{\sin 75^\circ}{1+\cos 75^\circ}+\dfrac{\sin 75^\circ}{1-\cos 75^\circ}}{\cos 75^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 75^\circ(1-\cos 75^\circ)+\sin 75^\circ(1+\cos 75^\circ)}{(1+\cos 75^\circ)(1-\cos 75^\circ)\cos 75^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 75^\circ\left(1-\cos 75^\circ+1+\cos 75^\circ\right)}{\left(1-\cos^2 75^\circ\right)\cos 75^\circ}=\frac{2\sin 75^\circ}{\sin^2 75^\circ\cdot\cos 75^\circ}=$$

$$=\frac{2}{\sin 75^\circ\cdot\cos 75^\circ}=\frac{4}{\sin 150^\circ}=\frac{4}{\sin\left(180^\circ-30^\circ\right)}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8.$$

Задача 8. Найти значение выражения

$$A=-2\sqrt{2}\sin 10^\circ\left(\sin 145^\circ-\frac{\sin 125^\circ}{\operatorname{tg}10^\circ}\right).$$

Решение. Как советует *правило 2*, выразим $\operatorname{tg}10^\circ$ через синусы и косинусы по формуле $\operatorname{tg}10^\circ=\dfrac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$, а также заметим пару родственных углов 125° и 145°: так как $145^\circ=270^\circ-125^\circ$, то $\sin 145^\circ=\sin\left(270^\circ-125^\circ\right)=-\cos 145^\circ$.

Подставив полученные значения в исходное выражение, получим

$$A=-2\sqrt{2}\sin 10^\circ\left(\sin 145^\circ-\frac{-\cos 145^\circ}{\sin 10^\circ}\cdot\cos 10^\circ\right)=$$

$$=-2\sqrt{2}\left(\sin 10^\circ\cdot\sin 145^\circ+\cos 10^\circ\cdot\cos 145^\circ\right)=$$

$$=-2\sqrt{2}\cos 135^\circ=2\sqrt{2}\cos 45^\circ=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2.$$

Рассмотрим теперь несколько приемов для упрощения и вычисления тригонометрических выражений.

Приемом 1 является использование *формул гармонического колебания*, позволяющих в выражениях вида $a\cos x\pm b\sin x$, где $a>0$, $b>0$, заменить две тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$ одной функцией аргумента $x\pm\varphi$:

$$a\cos x\pm b\sin x=\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi\pm x), & \text{где } \varphi=\arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\\ \sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi\mp x), & \text{где } \varphi=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

Эти формулы иногда называют также *формулами вспомогательного угла* φ.

В нескольких частных случаях формулы гармонического колебания проще и полезнее выводить, нежели использовать приведенный выше готовый шаблон. Потренируемся вместе:

$$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin 45^\circ \cos x \pm \cos 45^\circ \sin x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(45^\circ \pm x\right) = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ \cos x \pm \sin 45^\circ \sin x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(45^\circ \mp x\right);$$

$$\cos x \pm \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) =$$

$$= 2\left(\sin 30^\circ \cos x \pm \cos 30^\circ \sin x\right) =$$

$$= 2\sin\left(30^\circ \pm x\right) = 2\left(\cos 60^\circ \cos x \pm \sin 60^\circ \sin x\right) = 2\cos\left(60^\circ \mp x\right);$$

$$\sqrt{3}\cos x \pm \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \pm \frac{1}{2}\sin x\right) =$$

$$= 2\left(\sin 60^\circ \cos x \pm \cos 60^\circ \sin x\right) =$$

$$= 2\sin\left(60^\circ \pm x\right) = 2\left(\cos 30^\circ \cos x \pm \sin 30^\circ \sin x\right) = 2\cos\left(30^\circ \mp x\right).$$

Прием 2 можно условно назвать «принципом родственных углов». Он связан с уменьшением количества различных углов в тригонометрическом выражении с помощью правил приведения. Так, если углы α и β связаны одним из равенств $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha \pm \beta = \pi$, $\alpha \pm \beta = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha \pm \beta = 2\pi$, то любая тригонометрическая функция угла α (или β) может быть преобразована в тригонометрическую функцию угла β (или α).

В задачах на вычисление значений тригонометрических функций углов $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{12}$ (или приводящихся к ним по формулам приведения) удобно использовать следующие равенства (**прием 3**):

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1;\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+1;$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=2-\sqrt{3};\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}.$$

Задача 9. Найти значение выражения

$$A=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}-2\cos\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}.$$

Решение. Заметив, что $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$, воспользуемся формулами приведения:

$$A=\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}+2\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}\left(\sqrt{2}+2\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right).$$

Так как $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}},$$

то $$A=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)=\sqrt{2}.$$

Задача 10. Найти значение выражения $A=\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Решение. Приведем выражение к общему знаменателю, а затем используем для преобразования числителя формулу гармонического колебания:

$$A=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{2\left(\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=4\frac{\sin\left(30^\circ-10^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=4.$$

Задача 11. Найти множество значений функции

$$y=10\cos^2 x+6\sin^2 x+7\sin 2x+8\cos 2x+9.$$

Решение. Сначала «выровняем» аргументы тригонометрических функций, понизив степени синуса и косинуса, а затем, после приведения подобных членов, применим формулу вспомогательного угла φ:

$$y=10\frac{1+\cos 2x}{2}+6\frac{1-\cos 2x}{2}+7\sin 2x+8\cos 2x+9=$$

$$=5+5\cos 2x+3-3\cos 2x+7\sin 2x+8\cos 2x+9=$$

$$=10\cos 2x+7\sin 2x+17=\sqrt{10^2+7^2}\cdot\sin\left(2x+\varphi\right)+17=$$

$$=\sqrt{149}\cdot\sin\left(2x+\varphi\right)+17,$$

где $\varphi=\arcsin\frac{10}{\sqrt{149}}$.

Так как $\sin(2x+\varphi)$ изменяется от -1 до 1 при $x \in (-\infty; +\infty)$, то функция $y=\sqrt{149}\cdot\sin(2x+\varphi)+17$ изменяется от $-\sqrt{149}+17$ до $\sqrt{149}+17$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Задача 12. Найти все значения параметра b, для каждого из которых существует число a из промежутка $[-\pi; 0]$, такое, что уравнение $x^2+(2\sin a-\cos a)x-b=0$ имеет решение.

Решение. Данное квадратное уравнение имеет решение, если и только если его дискриминант неотрицателен, т. е. $D=(2\sin a-\cos a)^2+4b\ge 0$. Преобразуем выражение в скобках с помощью формулы вспомогательного угла φ:

$$2\sin a-\cos a=\sqrt{5}\sin(a-\varphi),$$

где
$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \\ \sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Тогда $D\ge 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{4}\sin^2(a-\varphi)\le b.$

Так как a пробегает все значения от $-\pi$ до 0, то $a-\varphi$ пробегает все значения от $-\pi-\varphi$ до $-\varphi$, среди которых есть число $-\dfrac{\pi}{2}$. При $a-\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ выражение $-\dfrac{5}{4}\sin^2(a-\varphi)$ достигает своего минимума, равного $-\dfrac{5}{4}$.

Итак, при $b<-\dfrac{5}{4}$ дискриминант D отрицателен для любых a, а при $b\ge-\dfrac{5}{4}$ найдется значение $a=-\dfrac{\pi}{2}+\varphi$, обеспечивающее неотрицательность дискриминанта D.

Ответ: $\left[-\dfrac{5}{4};+\infty\right)$.

Основным **приемом**, используемым для преобразования выражений с обратными тригонометрическими функциями, является *введение новой переменной*, обозначающей обратную тригонометрическую функцию, а затем с помощью определения этой функции — переход от нее к соответствующей ей «прямой» функции (от арксинуса — к синусу, от арккосинуса — к косинусу, от арктангенса — к тангенсу, от арккотангенса к котангенсу). При этом используются равенства $\arcsin(-\alpha)=-\arcsin\alpha$, $\arccos(-\alpha)=\pi-\arccos\alpha$, $\operatorname{arctg}(-\alpha)=$ $=-\operatorname{arctg}\alpha$, $\operatorname{arcctg}(-\alpha)=\pi-\operatorname{arcctg}\alpha$. Описанный прием избавляет от необходимости заучивания дополнительного блока формул, связанных с обратными тригонометрическими функциями.

Задача 13. Арккосинусу какого числа равно число $\pi-\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right)$?

Решение. Сначала упростим данное выражение:

$$\pi-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)=\pi-\left(\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right)=\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}.$$

Пусть $\alpha=\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{3}$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Теперь задача сводится к нахождению такого x, для которого $\cos\alpha=x$.

Так как $1+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, то

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\frac{9}{16}\;\Rightarrow\;|\cos\alpha|=\frac{4}{5}\;\Rightarrow\;\cos\alpha=\frac{4}{5}\;\Rightarrow\;x=\cos\alpha=\frac{4}{5}.$$

Задача 14. Вычислить $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}670^\circ)$.

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}670^\circ)$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}670^\circ$. Задача сводится к нахождению такого угла α, который удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}670^\circ; \\ 0^\circ < \alpha < 180^\circ. \end{cases}$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}670^\circ = \operatorname{tg}(670^\circ - 4\cdot 180^\circ) = \operatorname{tg}(-50^\circ) = \operatorname{ctg}(90^\circ - (-50^\circ)) = \operatorname{ctg}140^\circ,$$

то $\alpha = 140^\circ$, а значит, $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}670^\circ) = 140^\circ$.

Задача 15. Вычислить $\arccos(\cos 11)$.

Решение. Пусть $\alpha = \arccos(\cos 11)$, тогда $\cos\alpha = \cos 11$, и задача сводится к нахождению такого угла α, который удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos 11; \\ \alpha \in [0;\, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha - \cos 11 = 0; \\ \alpha \in [0;\, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{\alpha - 11}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha + 11}{2} = 0; \\ \alpha \in [0;\, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} \alpha = 11 + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}; \\ \alpha = -11 + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}; \end{array}\right. \\ \alpha \in [0;\, \pi]. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1. $0 \le 11 + 2\pi n \le \pi \Leftrightarrow -\dfrac{11}{2\pi} \le n \le \dfrac{\pi - 11}{2\pi} \Leftrightarrow -\dfrac{11}{2\pi} \le n \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{11}{2\pi}.$

   Поскольку $-\dfrac{11}{2\pi} \approx -\dfrac{11}{6{,}28} \approx -1{,}75$, то

   $$\begin{cases} -1{,}75 \le n \le 0{,}5 - 1{,}75; \\ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \varnothing.$$

2. $0 \le -11 + 2\pi n \le \pi \Leftrightarrow \dfrac{11}{2\pi} \le n \le \dfrac{\pi + 11}{2\pi} \Leftrightarrow 1{,}75 \le n \le 0{,}5 + 1{,}75.$

   Имеется единственное целое решение этого неравенства — это $k = 2$. Тогда искомый угол равен $\alpha = -11 + 4\pi$.

Задача 16. Чему равен угол $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$?

Решение. Пусть $\alpha=\operatorname{arctg}2$, $\beta=\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=3$, $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Вычислим $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot3}=\frac{5}{-5}=-1.$$

Поскольку α, $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha+\beta\in(0;\pi)$. Единственным углом из этого промежутка, имеющим тангенс, равный -1, является угол $\frac{3\pi}{4}$. Таким образом, $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{3\pi}{4}$.

В некоторых задачах с обратными тригонометрическими функциями следующие формулы **значений тригонометрических функций от арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса** способны значительно ускорить решение:

$$\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2};$$

$$\sin(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=\cos(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x)=\cos(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x)=\operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x)=x,\quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=\frac{1}{x}.$$

Задача 17. Найти все такие значения x, которые удовлетворяют равенству $\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2x}+\arccos 2x=\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2x}=\frac{\pi}{2}-\arccos 2x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2x}=\arcsin 2x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2x}\right)=\operatorname{ctg}(\arcsin 2x);\\ 0<\arcsin 2x\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1-x}{2x}=\sqrt{\frac{1}{4x^2}-1};\\ 0<2x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(1-x)^2}{4x^2}=\frac{1}{4x^2}-1;\\ 0<x<\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{2}{5}.$$

Приемы, применяемые к узким классам тригонометрических выражений специального вида, будем называть **трюками**.

Первый трюк применяется к произведению косинусов вида $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdots\cos 2^k\alpha$, аргументы которых составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. И заключается он в умножении и делении этого произведения на синус наименьшего аргумента, т. е. на $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdots\cos 2^k\alpha=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdots\cos 2^k\alpha}{\sin\alpha}.$$

А дальше, $k+1$ раз последовательно применяя формулы $\sin\beta\cdot\cos\beta=\frac{\sin 2\beta}{2}$, приходим к выражению $\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\cdot\sin\alpha}$. Этот трюк назовем **гармошкой**.

Второй трюк применяется к сумме синусов вида $\sin\alpha+\sin(\alpha+d)+\ldots+\sin(\alpha+kd)$ или к сумме косинусов вида $\cos\alpha+\cos(\alpha+d)+\ldots+\cos(\alpha+kd)$, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию с произвольной разностью d. И заключается он в умножении и делении этой суммы на $\sin\frac{d}{2}$:

$$\frac{\sin\frac{d}{2}\cdot\sin\alpha+\sin\frac{d}{2}\cdot\sin(\alpha+d)+\ldots+\sin\frac{d}{2}\cdot\sin(\alpha+kd)}{\sin\frac{d}{2}}$$

или

$$\frac{\sin\frac{d}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{d}{2}\cdot\cos(\alpha+d)+\ldots+\sin\frac{d}{2}\cdot\cos(\alpha+kd)}{\sin\frac{d}{2}}.$$

А дальше посредством преобразования всех произведений в суммы (разности) приходим к выражению $\dfrac{\cos\left(\frac{d}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{(2k+1)d}{2}+\alpha\right)}{2\sin\frac{d}{2}}$ или к выражению $\dfrac{\sin\left(\frac{d}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{(2k+1)d}{2}+\alpha\right)}{2\sin\frac{d}{2}}$. Этот трюк мы назовем **домино.**

Задача 18. Вычислить $A=\cos 260°\cdot\sin 130°\cdot\cos 160°$.

Решение. Действующий в этой ситуации по принципу «видишь произведение — преобразуй в сумму», в конце концов, при правильных вычислениях придет к верному ответу. Но замечая, что

$$\cos 160°=\cos(180°-20°)=-\cos 20°,$$

$$\sin 130°=\sin(90°+40°)=\cos 40°,$$

$$\cos 260°=\cos(180°+80°)=-\cos 80°,$$

а значит, $A=\cos 20°\cdot\cos(2\cdot 20°)\cdot\cos(4\cdot 20°)$, воспользуемся трюком «гармошка»:

$$A=\frac{\sin 20°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°}{\sin 20°}=\frac{\sin\left(2^3\cdot 20°\right)}{2^3\cdot\sin 20°}=\frac{\sin 160°}{8\sin 20°}=$$

$$=\frac{\sin(180°-20°)}{8\sin 20°}=\frac{\sin 20°}{8\sin 20°}=\frac{1}{8}.$$

Задача 19. Вычислить $A=\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}$.

Решение. Действующий в этой ситуации по принципу «видишь разность — преобразуй в произведение» приведет выражение к виду $A=2\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}$ и остановится, не сумев вычислить значения полученных функций.

Мы же применим к выражению A трюк «домино», записав предварительно выражение A в подходящем виде как сумму синусов: $A=\sin\frac{3\pi}{10}+\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$, аргументы здесь составляют арифметическую прогрессию с разностью $d=\frac{3\pi}{10}-\left(-\frac{\pi}{10}\right)=\frac{2\pi}{5}$. Тогда

$$A=\frac{\sin\frac{3\pi}{10}+\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{5\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\cos\frac{3\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}.$$

Задача 20. Вычислить $A = \mathrm{tg}^2 36° \cdot \mathrm{tg}^2 72°$.

Решение. Вначале понизим степени тангенсов, переходя от них к косинусам двойных углов: $A = \frac{1-\cos 72°}{1+\cos 72°} \cdot \frac{1-\cos 144°}{1+\cos 144°}$.

Далее в числителе и знаменателе раскроем скобки:

$$A = \frac{1-\cos 72° - \cos 144° + \cos 72° \cdot \cos 144°}{1+\cos 72° + \cos 144° + \cos 72° \cdot \cos 144°} =$$

$$= \frac{1-(\cos 72° + \cos 144°) + \cos 72° \cdot \cos 144°}{1+(\cos 72° + \cos 144°) + \cos 72° \cdot \cos 144°}.$$

К произведению $\cos 72° \cdot \cos 144°$ применим теперь трюк «гармошка», а к сумме $\cos 72° + \cos 144°$ — трюк «домино»:

$$\cos 72° \cdot \cos 144° = \frac{\sin 72° \cdot \cos 72° \cdot \cos 144°}{\sin 72°} = \frac{\sin(2^2 \cdot 72°)}{2^2 \cdot \sin 72°} =$$

$$= \frac{\sin 288°}{4\sin 72°} = \frac{\sin(360° - 72°)}{4\sin 72°} = -\frac{\sin 72°}{4\sin 72°} = -\frac{1}{4};$$

$$\frac{\cos 72° + \cos 144°}{\sin\frac{144°-72°}{2}} \cdot \sin\frac{144°-72°}{2} =$$

$$= \frac{\sin 36° \cdot \cos 72° + \sin 36° \cdot \cos 144°}{\sin 36°} =$$

$$= \frac{-\sin 36° + \sin 108° - \sin 108° + \sin 180°}{2\sin 36°} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $A = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$.

Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то для любой функции F сложная функция $F(f(x))$ является периодической с периодом T. При этом, если T_0 — наименьший положительный период функции $f(x)$, то T_0 не обязательно будет наименьшим положительным периодом функции $F(f(x))$. Наименьший положительный период функции $\cos x$ равен 2π, а функции $\cos^2 x$ — равен π.

Если T_0 — наименьший положительный период функции $f(x)$, то функция $a \cdot f(cx+d)+b$ имеет наименьший положительный период $\frac{T_0}{|c|}$.

Если отношение наименьших положительных периодов периодических функций f и g есть *число рациональное*, то их сумма и разность $f \pm g$ также являются *периодическими функциями*. Если же отношение наименьших положительных периодов функций f и g есть *иррациональное число*, то функции $f \pm g$ и $f \cdot g$ — *непериодические*.

Задача 21. Определить, является ли функция $f(x) = \sin x + \sin \pi x$ периодической, и в случае положительного ответа найти ее период

Решение. Так как наименьший положительный период функции $\sin x$ равен 2π, а функции $\sin \pi x$ равен 2, то отношение этих периодов $\frac{2\pi}{2} = \pi$ есть число иррациональное. Следовательно, функция f — непериодическая.

Задача 22. Найти наименьший положительный период функции $y = \cos 2x + \operatorname{tg}\frac{2x}{3} - 2\cos^4 x$.

Решение. Для упрощения вида исходной функции дважды понизим степень последнего слагаемого:

$$-2\cos^4 x = (-2)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = (-2)\cdot\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = -\frac{3}{4} - \cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Тогда функция y принимает вид:

$$y=\cos 2x+\operatorname{tg}\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}-\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 4x=\operatorname{tg}\frac{2x}{3}-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{3}{4}.$$

Наименьший положительный период функции $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}$ равен $\pi:\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{2}$, наименьший положительный период функции $-\frac{1}{4}\cos 4x$ равен $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, и все периоды этой функции имеют вид $k\cdot\frac{\pi}{2}$, где $k\in Z$. И поскольку постоянные функции (в нашем случае последнее слагаемое $-\frac{3}{4}$) имеют своим периодом любое действительное число, то $\frac{3\pi}{2}$ является периодом функции $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{3}{4}$.

Доказательство того факта, что $\frac{3\pi}{2}$ является наименьшим положительным периодом функции $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{3}{4}$, оставляем творческому читателю.

§ 3.2. Тригонометрические уравнения и неравенства

В основе решения практически любого тригонометрического уравнения лежит идея его *сведения к одному (или нескольким) простейшим уравнениям*. В стандартных уравнениях эта идея реализуется двумя путями:

- «выравниванием» с помощью тригонометрических формул аргументов всех функций (т. е. приведением их к одному и тому же аргументу) и последующим переходом к какой-либо одной функции этого аргумента;

- разложением на множители левой части уравнения (при условии, что его правая часть равна нулю).

Для реализации этих подходов используются технологии предыдущего параграфа. При этом не следует домножать или делить обе части уравнения на выражения, зависящие от переменной, поскольку это может нарушить равносильность преобразований. А в тригонометрии избавляться от посторонних корней, равно как и восстанавливать потерянные корни, — проблематичное занятие. Именно поэтому не стоит применять здесь трюки, о которых говорилось в предыдущем параграфе: при решении уравнений им всегда найдется безопасная альтернатива.

Задача 1. Решить уравнение

$$4\cos^2 x = 2 + \frac{1}{2}\cos 2x\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin 2x}\right).$$

Решение. «Выровняем» аргументы тригонометрических функций, понизив степень косинуса в левой части уравнения. В правой части уравнения раскроем скобки:

$$\begin{cases} 2 + 2\cos 2x = 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2\sin 2x}; \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos 2x \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x; \\ \cos 2x \neq 0, \quad \sin 2x \neq 0. \end{cases}$$

Отметим, что в этой системе условия $\sin 2x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ можно опустить, ибо если предположить, что $\sin 2x = 0$ (соответственно $\cos 2x = 0$), то из уравнения $2\cos 2x \cdot \sin 2x = $ $= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$ сразу же следует, что $\cos 2x = 0$ (соответственно $\sin 2x = 0$), что невозможно.

Итак, продолжим:

$$2\cos 2x \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 4x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

(слева в уравнении применена формула синуса двойного угла, справа — формула вспомогательного угла). Далее,

$$\sin 4x-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin\frac{2x-\frac{\pi}{6}}{2}\cdot\cos\frac{6x+\frac{\pi}{6}}{2}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll}\dfrac{2x-\frac{\pi}{6}}{2}=\pi k, & k\in\mathbf{Z};\\ \dfrac{6x+\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{\pi}{12}+\pi k, & k\in\mathbf{Z};\\ x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Задача 2. Решить уравнение $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$.

Решение. Так как $\sqrt{2}=2\sin\frac{\pi}{4}$, то данное уравнение можно записать в виде:

$$\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x \Leftrightarrow \sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Приведем все аргументы к виду $x+\frac{\pi}{4}$, записав для этого $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Получим следующее уравнение:

$$\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0; \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \\ \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}$, поскольку уравнение $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2$ не имеет решений.

Кроме метода приведения данного тригонометрического уравнения к простейшему уравнению существуют также особые методы решения специальных типов тригонометрических уравнений (однородные, симметричные и т. д.).

Тригонометрическое уравнение называется **однородным степени** n, если его можно представить в виде $P(y, z)=0$, где $P(y, z)$ — однородный многочлен степени n от двух переменных $y=\sin x$ и $z=\cos x$. Для решения однородного уравнения степени n достаточно разделить каждое слагаемое в уравнении $P(\sin x, \cos x)=0$ на $\cos^n x$ и ввести новую переменную $t=\operatorname{tg} x$, получив тем самым в левой части многочлен степени n от одной переменной t.

Тригонометрическое уравнение называется **симметричным**, если его можно представить в виде $P(y, z)=0$, где $P(y, z)$ — некоторый многочлен от двух переменных $y=\sin x\pm\cos x$ и $z=\sin x\cdot\cos x$. Для решения симметричного уравнения следует ввести новую переменную $t=\sin x\pm\cos x$ и выразить $\sin x\cdot\cos x$ через t:

$\pm 2\sin x\cdot\cos x=(\sin x\pm\cos x)^2-1=t^2-1$.

Задача 3. Решить уравнение $\sin^2 x - \cos 2x = 3 - 2\sin 2x$.

Решение. Приведем данное уравнение к однородному уравнению второй степени. Для этого запишем:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x,\ 3 = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 4\sin x \cos x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$$

(это однородное уравнение 2-й степени).

Разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$ (заметим, что если бы $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что невозможно):

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin x}{\cos x} + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg} x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathrm{tg} x - 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg} x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Задача 4. Решить уравнение $5\sin 2x - 11(\sin x + \cos x) + 7 = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно симметричному уравнению $10\sin x \cos x - 11(\sin x + \cos x) + 7 = 0$. Введем новую переменную $t = \sin x + \cos x$. Поскольку $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right)$, то уравнение примет вид

$$5\left(t^2 - 1\right) - 11t + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5t^2 - 11t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 2; \\ t = \dfrac{1}{5} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 2; \\ \sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение решений не имеет, т. к. $\sin x \leq 1$ и $\cos x \leq 1$, а значит,

$$\sin x + \cos x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = 1; \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

что невозможно.

Остается решить уравнение $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Применив к его левой части формулу вспомогательного аргумента, получим уравнение

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{5\sqrt{2}} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Задача 5. Решить уравнение $\cos x + |\sin x| + \cos 2x = \sin 4x$.

Решение. $\cos x + |\sin x| = 2\sin 2x \cos 2x - \cos 2x \Leftrightarrow$

$$\cos x + |\sin x| = (4\sin x \cos x - 1)(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Рассмотрим два случая.

1. $\begin{cases} \sin x \geq 0; \\ \cos x + \sin x = (4\sin x\cos x - 1)(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x). \end{cases}$

Эта система, в свою очередь, требует рассмотрения двух случаев.

- $\begin{cases} \sin x \geq 0; \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0; \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$

- $\begin{cases} \sin x \geq 0; \\ 1 = (4\sin x\cos x - 1)(\cos x - \sin x). \end{cases}$

  Уравнение в этой системе является симметричным. Поэтому прибегнем к замене $t = \cos x - \sin x$. Тогда уравнение запишется в виде $1 = (1 - 2t^2)t$ или $2t^3 - t + 1 = 0$. Очевиден корень этого уравнения $t = -1$. Применив схему Горнера, получим

$$(t+1)(2t^2 - 2t + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1.$$

Итак:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0; \\ \cos x - \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0; \\ \sin x > \cos x; \\ (\sin x - \cos x)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0; \\ \sin x > \cos x; \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0; \\ \sin x > \cos x; \\ x = \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi m, \ \ m \in \mathbf{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \ \ l \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

2. $\begin{cases} \sin x < 0; \\ \cos x - \sin x = (4\sin x \cos x - 1)(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x). \end{cases}$

Эта система также требует рассмотрения двух случаев.

- $\begin{cases} \sin x < 0; \\ \cos x - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$
- $\begin{cases} \sin x < 0; \\ 1 = (4\sin x \cos x - 1)(\cos x + \sin x). \end{cases}$

  Уравнение в системе является симметричным, поэтому прибегнем к замене $t = \cos x + \sin x$. Тогда уравнение запишется в виде: $2t^3 - 3t - 1 = 0$. Очевиден корень $t = -1$ этого уравнения. Применив схему Горнера, получим $(t+1)(2t^2 - 2t - 1) = 0$. Если $t = -1$, то

$$\begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin x + \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin x < -\cos x; \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin x < -\cos x; \\ x = \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ \ m \in \mathbf{Z}.$$

  Если $2t^2 - 2t - 1 = 0$, то $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, и, следовательно,

$$\begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin x + \cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Так как $\sin x < 0$, то $\sin x + \cos x < 1$. Поэтому остается только одна возможность: $\sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Итак:

$$\begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin x \le -\cos x; \\ (\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin x \le -\cos x; \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \le -\cos x; \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}; \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \ l \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \ m \in \mathbf{Z},$$

т. к. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) > -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ и потому вторая серия решений отпадает.

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ \pi + 2\pi n, \ \frac{\pi}{2} + \pi n, \ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

В некоторых случаях при решении тригонометрических уравнений возникает необходимость нахождения пересечения двух серий углов. Например:

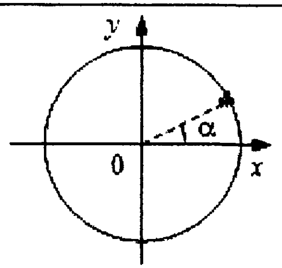
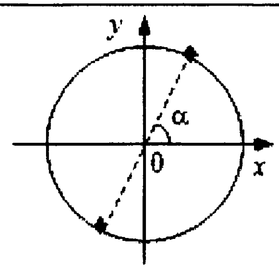
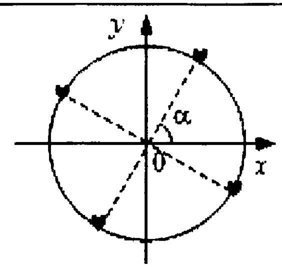
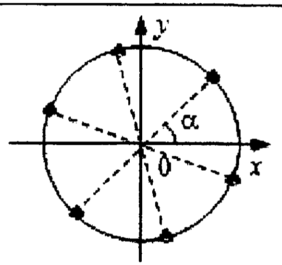
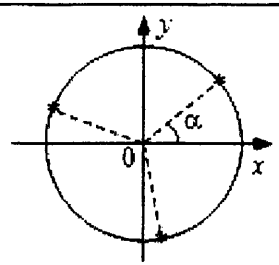
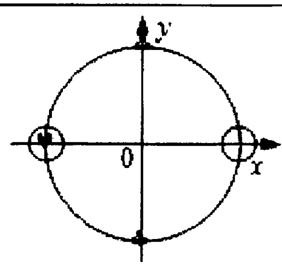
- при ограничениях на области определения функций, когда уравнение сводится к равносильным системам, содержащим простейшие уравнения и неравенства вида $\sin x \neq a$ или $\cos x \neq a$;
- в граничных задачах, когда уравнение сводится к решению системы из двух простейших уравнений.

Существует три способа нахождения пересечения множеств углов $\pi(a + bn)$ и $\pi(c + dk)$, где a, b, c, d — фиксированные рациональные числа, n, k — переменные, принимающие целочисленные значения.

Первый способ: изображение множеств углов на единичной окружности с последующим визуальным определением общих точек. Этот способ эффективен только для некоторых серий углов, некоторые из которых приводятся ниже.

Пусть α — острый угол, т. е. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Изобразим на единичной окружности множества $\{\alpha+2\pi k\}$, $\{\alpha+\pi k\}$, $\left\{\alpha+\frac{\pi}{2}k\right\}$, $\left\{\alpha+\frac{\pi}{3}k\right\}$, $\left\{\alpha+\frac{2}{3}\pi k\right\}$, $k\in\mathbf{Z}$ (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Углы $\alpha+2\pi k$ отмечены на окружности символом ♣	Углы $\alpha+\pi k$ отмечены на окружности символом ♦	Углы $\alpha+\frac{\pi}{2}k$ отмечены на окружности символом ♥
 	 	
Углы $\alpha+\frac{\pi}{3}k$ отмечены на окружности символом ♠	Углы $\alpha+\frac{2}{3}\pi k$ отмечены на окружности символом *	Углы $\frac{\pi}{2}+\pi n$ обозначены символом ♣, углы $\pi+2\pi k$ — символом ♥, углы πm — символом ○
 	 	

Второй способ удобен, когда нанесение серий углов на единичную окружность затруднительно, но в условии задачи задан промежуток, из которого необходимо выбрать корни уравнения. В подобных случаях можно отдельно «отловить» углы каждой серии из этого промежутка (решив соответствующие двойные неравенства) и, сопоставив их, найти затем пересечение полученных множеств. Этот способ эффективен только при небольшой длине заданного промежутка.

И, наконец, третий, самый универсальный способ нахождения пересечения двух множеств углов $\pi(a+bn)$ и $\pi(c+dk)$, который сводится к уже описанному в *главе 2* алгоритму решения диофантового линейного уравнения с двумя переменными.

Пусть, например, требуется найти пересечение серий углов $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi n}{5}$. В соответствии с алгоритмом составляем уравнение $\frac{\pi k}{3}=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi n}{5}$. Сокращая это уравнение на π и домножая на 15, приводим его к виду $-12n+5k=3$. Так как $\text{НОД}(12, 5)=1$, то продолжим поиск пересечения. Очевидно, пара чисел $n_0=1$, $k_0=3$ — его частное решение. Поэтому общее решение данного уравнения имеет вид: $n=1+5t$, $k=3+12t$, $t\in\mathbf{Z}$.

Если же нужно найти пересечение серий углов $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ и $\frac{5}{6}(\pi+4\pi k)$, то равенство $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{5}{6}(\pi+4\pi k)$ равносильно $6n-40k=7$. Поскольку $\text{НОД}(6, 40)=2>1$, то искомое пересечение углов является пустым множеством.

Задача 6. Решить уравнение $\cos 3x\cdot\operatorname{tg}x=0$.

Решение. Данное уравнение можно записать в виде $\frac{\cos 3x\cdot\sin x}{\cos x}=0$, откуда следует, что оно равносильно системе

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&\cos 3x = 0;\\&\sin x = 0;\end{aligned}\right.\\ \cos x \neq 0,\end{cases}$$

которая, в свою очередь, распадается на две системы:

$$\begin{cases}\sin x = 0;\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$\begin{cases}\cos 3x = 0;\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z};\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.\end{cases}$$

Изобразим серии углов $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ и $\frac{\pi}{2} + \pi k$, n, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.1).

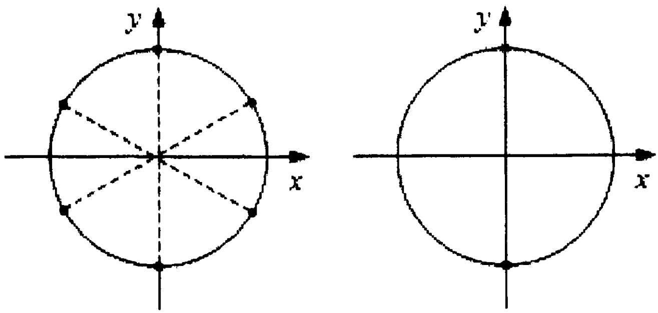


Рис. 3.1

После исключения углов второй серии из множества углов первой серии получим решение второй системы: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi l$, $l \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.2).

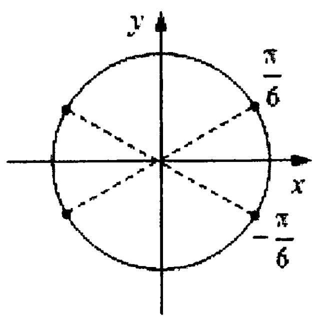


Рис. 3.2

Окончательный ответ:

$$\left[\begin{aligned}&x = \pi k, && k \in \mathbf{Z};\\ &x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi l, && l \in \mathbf{Z}.\end{aligned}\right.$$

Задача 7. Найти сумму корней уравнения $\sin(\pi\sin x) = -1$, принадлежащих промежутку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Данное уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением, равносильным уравнению

$$\pi\sin x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2} + 2n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Поскольку $|\sin x| \le 1$, то

$$\left|-\frac{1}{2} + 2n\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le 2n - \frac{1}{2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} \le n \le \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad n = 0.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, откуда

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Чтобы найти целые k, при которых корни уравнения принадлежат промежутку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$, решим двойное неравенство $-\pi \le (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k \le \dfrac{\pi}{2}$. Разделив все части неравенства на π и умножив на 6, получим: $-6 \le (-1)^{k+1} + 6k \le 3$. Очевидно, что последнее неравенство выполняется только при $k = 0$ и $k = -1$. Значит, данному отрезку принадлежат два корня уравнения $x = (-1)^1 \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi \cdot 0 = -\dfrac{\pi}{6}$ и $x = (-1)^0 \cdot \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$. Сумма этих корней равна $-\pi$.

Задача 8. Найти все корни уравнения $\cos 6x + \sin\dfrac{5x}{2} = 2$, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 10\pi\right]$.

Решение. Поскольку $\cos 6x \le 1$, $\sin\frac{5x}{2} \le 1$ при любых значениях x, то сумма $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$ может быть равна 2, если и только если

$$\begin{cases} \cos 6x = 1; \\ \sin\frac{5x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3}, & k \in \mathbf{Z}; \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, необходимо найти пересечение двух серий углов $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}$, для чего следует найти целые решения уравнения $\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}$ с помощью алгоритма решения диофантового линейного уравнения с двумя переменными: $\frac{1}{3}k = \frac{1}{5} + \frac{4n}{5} \Leftrightarrow -12 + 5k = 3$. Очевидно, что числа $k_0 = 3$, $n_0 = 1$ являются его решениями. Тогда $k = 3 + 12t$, $t \in \mathbf{Z}$, а значит, $x = \frac{\pi}{3}(3 + 12t) = \pi + 4\pi t,\ t \in \mathbf{Z},$ — решения исходного уравнения.

Найдем теперь целые значения t, при которых $x \in \left[\frac{\pi}{2}; 10\pi\right]$:

$$\frac{\pi}{2} \le \pi + 4\pi t \le 10\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 1 + 4t \le 10 \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \le t \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \in \{0;\ 1;\ 2\} \Rightarrow x \in \{\pi;\ 5\pi;\ 9\pi\}.$$

Задача 9. Найти все корни уравнения $2\cos 4x - 1 = (2\cos 4x + 1)\operatorname{tg} 2x$, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$.

Решение. Перейдем в этом уравнении к функции $\operatorname{tg} 2x$, используя формулу $\cos 4x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x}$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2 2x}{1+\mathrm{tg}^2 2x}-1=\left(2\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2 2x}{1+\mathrm{tg}^2 2x}+1\right)\mathrm{tg}2x.$$

Сделав в последнем уравнении замену $y=\mathrm{tg}2x$, получим

$$2\frac{1-y^2}{1+y^2}-1=\left(2\frac{1-y^2}{1+y^2}+1\right)y \;\Leftrightarrow\; y^3-3y^2-3y+1=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(y^3+1\right)-\left(3y^2+3y\right)=0 \;\Leftrightarrow\; (y+1)\left(y^2-y+1\right)-3y(y+1)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (y+1)\left(y^2-4y+1\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} y=-1; \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}2x=-1; \\ \mathrm{tg}2x=2\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Вспомним о дополнительном условии $x\in\left(-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right)$, из которого следует $2x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$. Для таких значений аргумента $|\mathrm{tg}2x|<1$. Но $\mathrm{tg}2x=-1$ и $\mathrm{tg}2x=2+\sqrt{3}$ не удовлетворяют неравенству $|\mathrm{tg}2x|<1$. Поэтому остается лишь уравнение $\mathrm{tg}2x=2-\sqrt{3}$, откуда

$$2x=\mathrm{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)+\frac{\pi n}{2},\; n\in\mathbf{Z}.$$

Но $\mathrm{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{12}$, а значит, $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\; n\in\mathbf{Z}$.

Найдем все корни, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right)$:

$$-\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}<\frac{\pi}{8} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{8}<\frac{1}{24}+\frac{n}{2}<\frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}<n<\frac{1}{6} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; n=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{24}.$$

Итак, уравнение имеет единственный корень $x=\frac{\pi}{24}\in\left(-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right)$.

Задача 10. Решить уравнение $\operatorname{tg} 2x - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin 3x} - \operatorname{ctg} x.$

Решение.

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 3x} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\cos 2x \cdot \sin x} = \frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x \cdot \sin 3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \cdot \cos x = \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin x \cdot \cos 2x; \\ \sin 3x \neq 0; \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

(так как $\sin x = 0$ означает $\sin 3x = 0$, то ограничение $\sin x \neq 0$ можно исключить). Далее:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 4x = \sin 5x + \sin x - \sin x + \sin 3x; \\ \sin 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x + \sin 4x = \sin 3x + \sin 5x; \\ \sin 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \cdot \cos x = \sin 4x \cdot \cos x; \\ \sin 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1. $$\begin{cases} \cos x = 0; \\ \sin 3x \neq 0; \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \\ \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 3\pi n\right) \neq 0; \\ \cos(\pi + 2\pi n) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

2. $$\begin{cases} \sin 3x - \sin 4x = 0; \\ \sin 3x \neq 0; \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения следует, что неравенство $\sin 3x \neq 0$ можно заменить неравенством $\sin 4x \neq 0$, из которого, в свою очередь, следует, что $\cos 2x \neq 0$ (так как $\sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin 2x \cdot \cos 2x \neq 0$). Поэтому переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} \sin 3x - \sin 4x = 0; \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{7x}{2} = 0; \\ \sin 4x \neq 0. \end{cases}$$

Условие $\sin 4x \neq 0$ гарантирует неравенство $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Поэтому остается только решить систему:

$$\begin{cases} \cos\frac{7x}{2} = 0; \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}, & n \in \mathbf{Z}; \\ x \neq \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Решим уравнение $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7} = \frac{\pi k}{2}$ в целых числах:

$$7k - 4n = 2 \Rightarrow n = 3 + 7t, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда $\quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad n \neq 3 + 7t, \quad t \in \mathbf{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi m, \ \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}, \ n \neq 7k + 3, \ n, k \in \mathbf{Z}.$

Иррациональные тригонометрические уравнения сводятся, как правило, к системе тригонометрического уравнения без радикалов и простейшего тригонометрического неравенства. В подобных случаях старайтесь привести все функции, содержащиеся в уравнении, к тому аргументу, относительно которого решается тригонометрическое неравенство. Тогда после нахождения корней уравнения останется только проверить (либо на тригонометрическом круге, либо аналитически), удовлетворяют ли найденные корни неравенству.

Предварительно приведем справочную информацию по решению простейших тригонометрических неравенств.

Пусть $|a| < 1$, $\alpha = \arcsin a$. Тогда:

- $\sin x > a \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + 2\pi n < x < \pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.3);
- $\sin x < a \quad \Leftrightarrow \quad -\pi - \alpha + 2\pi n < x < \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.4).

Пусть $|a| < 1$, $\alpha = \arccos a$. Тогда:

- $\cos x > a \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha + 2\pi n < x < \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.5);
- $\cos x < a \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + 2\pi n < x < 2\pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.6).

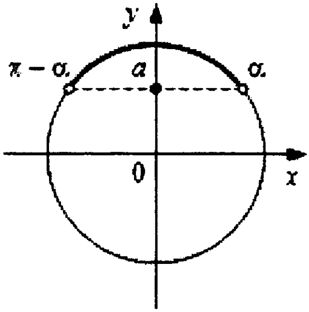


Рис. 3.3

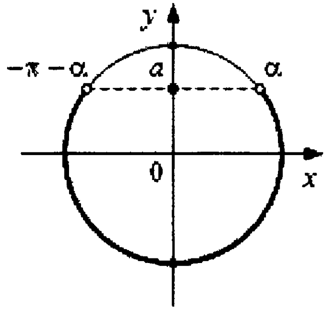


Рис. 3.4

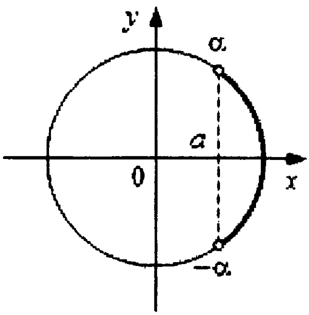


Рис. 3.5

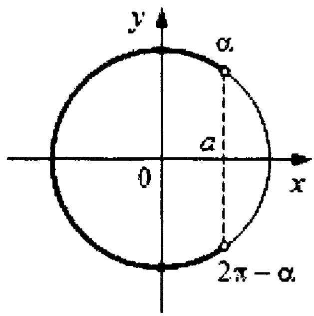


Рис. 3.6

Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} a$. Тогда:

- $\operatorname{tg} x > a \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.7);
- $\operatorname{tg} x < a \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x < \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.8).

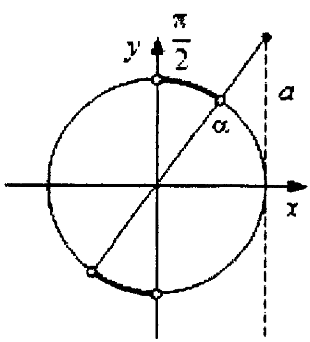


Рис. 3.7

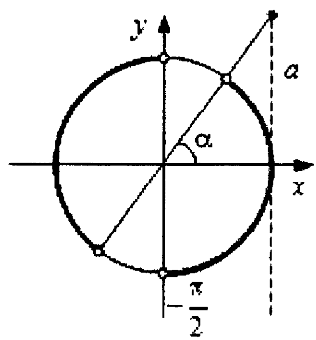


Рис. 3.8

Пусть $\alpha = \operatorname{arcctg} a$. Тогда:

- $\operatorname{ctg} x > a \quad \Leftrightarrow \quad \pi n < x < \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.9);
- $\operatorname{ctg} x < a \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ (рис. 3.10).

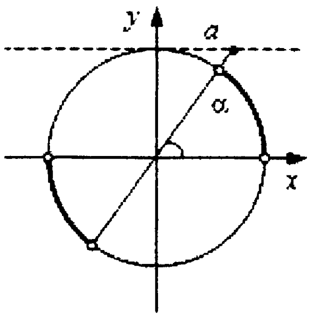


Рис. 3.9

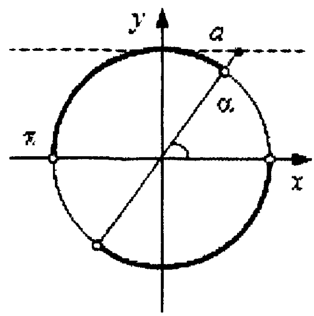


Рис. 3.10

Задача 11. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2\sin^2 2011 + \cos^2 2011}}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\sin x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|.$$

Приведем все функции к аргументу $\frac{x}{2}$: $2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$. Поскольку правая часть уравнения неотрицательна, то уравнение будет иметь решения, если и только если его левая часть неотрицательна, т. е. $2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} \ge 0$. А это неравенство равносильно неравенству $\cos\frac{x}{2} \ge 0$, поскольку $\sin^2\frac{x}{2} > 0$ (если бы

$\sin^2\frac{x}{2}=0$, то из уравнения $2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ следовало бы $\cos\frac{x}{2}=0$, что невозможно).

Таким образом, исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}; \\ \cos\dfrac{x}{2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}\left(4\sin^2\dfrac{x}{2}-1\right)=0; \\ \cos\dfrac{x}{2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2}=0; \\ \begin{cases} 4\sin^2\dfrac{x}{2}-1=0; \\ \cos\dfrac{x}{2}\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}; \\ \begin{cases} \sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{4}; \\ \cos\dfrac{x}{2}\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Преодолевая искушение понизить степень в уравнении с синусом, предпочтем в уравнении сохранить тот же аргумент $\frac{x}{2}$, что и в неравенстве:

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{1}{2}; \\ \cos\dfrac{x}{2}\ge 0. \end{cases}$$

Изобразим углы $\frac{x}{2}$, являющиеся решением уравнений $\sin\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{2}$, на единичной окружности (рис. 3.11).

С учетом решений неравенства $\cos\frac{x}{2}\ge 0$ (они отмечены жирной линией на единичной окружности) получаем искомые решения системы:

$$\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Окончательный ответ:

$$\left[\begin{array}{ll} x=\pi+2\pi k, & k\in\mathbf{Z};\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, & n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

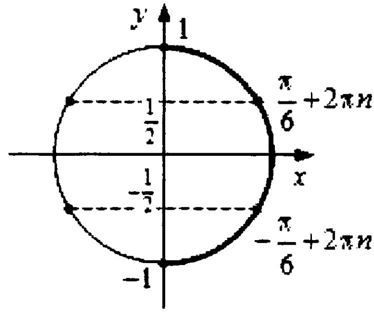


Рис. 3.11

Задача 12. Решить уравнение $\sqrt{\cos 2x-\cos 3x}=\sqrt{2}\sin x$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x-\cos 3x=2\sin^2 x;\\ \sin x\ge 0.\end{cases}$$

Выразив все функции, присутствующие в уравнении, через $\cos x$, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases}2\cos^2 x-1-4\cos^3 x+3\cos x=2\left(1-\cos^2 x\right);\\ \sin x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\cos^3 x-4\cos^2 x-3\cos x+3=0;\\ \sin x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\cos^2 x(\cos x-1)-3(\cos x-1)=0;\\ \sin x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\cos x-1)\left(4\cos^2 x-3\right)=0;\\ \sin x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=1;\\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{array}\right.\\ \sin x\ge 0.\end{cases}$$

Изобразим на единичной окружности решения уравнений $\cos x=1$, $\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и неравенства $\sin x\ge 0$ (его решения отмечены жирной линией). Как следует из рис. 3.12, решениями системы, а значит, и исходного уравнения, являются следующие углы:

$$x = 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z};$$

$$x = 2\pi x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$x = 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

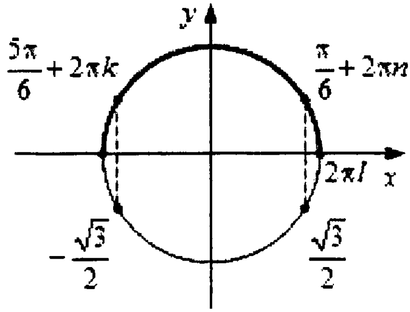


Рис. 3.12

Задача 13. Решить уравнение $\sqrt{4+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x} + 2\sin x = 0$.

Решение.

$$\sqrt{4+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x} = -2\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ 4+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 4\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ 4\cos^2 x + \dfrac{\sqrt{3}\cos x}{\sin x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \cos x\left(4\cos x \cdot \sin x + \sqrt{3}\right) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1. $\begin{cases} \sin x < 0; \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

2. $\begin{cases} \sin x < 0; \\ 4\cos x \cdot \sin x + \sqrt{3} = 0. \end{cases}$

Покажем две стратегии решения этой системы.

Первая стратегия очевидна:

$$\begin{cases} \sin x < 0; \\ \sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \left[\begin{array}{l} 2x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi n; \\ 2x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m. \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим решения уравнения из системы на круге (рис. 3.13).

С учетом $\sin x < 0$ получаем: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbf{Z}$.

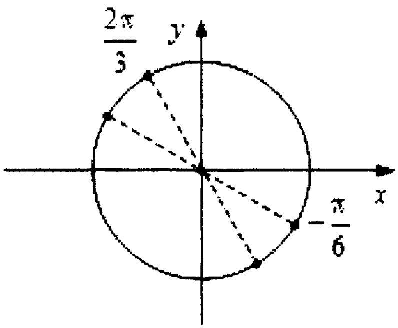


Рис. 3.13

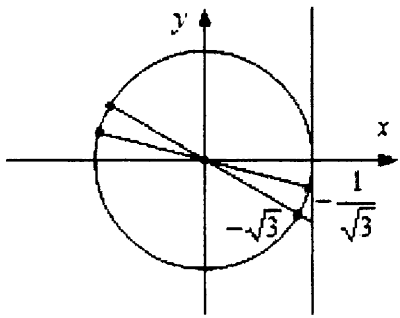


Рис. 3.14

Вторая стратегия заключается в сохранении аргумента x в уравнении, продиктованном неравенством $\sin x < 0$:

$$\begin{cases} \sin x < 0; \\ 4\sin x \cdot \cos x + \sqrt{3}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x + 4\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0; \\ \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}; \\ \mathrm{tg}\, x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим решения уравнения из системы на круге (рис. 3.14). С учетом $\sin x < 0$, получаем

$$x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ x = -\mathrm{arctg}\sqrt{3} + 2\pi l = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Задача 14. Решить уравнение

$$\sin 3x \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение. Уравнение можно переписать в равносильном виде:

$$\sin 3x\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin 3x.$$

1. Так как $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$, то неравенство $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\geq 0$ равносильно неравенству $\cos 2x \geq 0$ при условии, что $\sin 2x \neq -1$. Поэтому случай $\sin 3x = 0$ будем рассматривать при условии, что

$$\begin{cases}\cos 2x \geq 0;\\ \sin 2x \neq -1.\end{cases}$$

Итак, $\sin 3x = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. Изобразим эти решения на тригонометрическом круге для аргумента $2x$ (рис. 3.15).

Как видно из рис. 3.15, возможно только $2x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ или $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

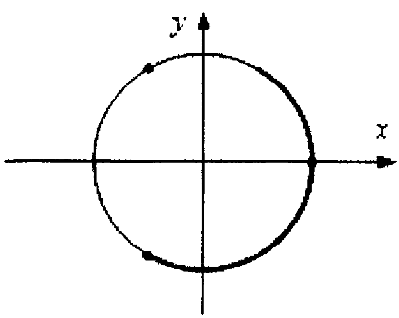


Рис. 3.15

2. Перейдем к рассмотрению уравнения $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le 0;\\ \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le 0;\\ \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0;\\ 1=4\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).\end{array}\right.\end{cases}$$

- $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$

- $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le 0;\\ 1=4\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le 0;\\ 1=2\cos 2x\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 0;\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Изобразим решения уравнения и решения неравенства на тригонометрическом круге (рис. 3.16).

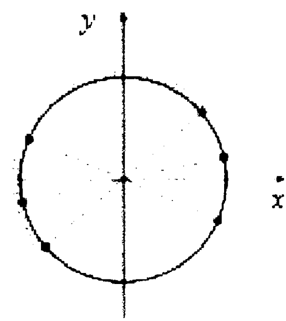


Рис. 3.16

Отсюда видно, какие значения из множества $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, попадают в заштрихованную область, соответствующую неравенству $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 0$, — это будут $\pm\frac{\pi}{6}+\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

Задача 15. Решить уравнение $\sqrt{1+7\sin^2 x}=2\cos x-\sqrt{3}\sin x$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}2\cos x-\sqrt{3}\sin x\ge 0\\ 1+7\sin^2 x=\left(2\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos x\ge\sqrt{3}\sin x;\\ \cos^2 x+8\sin^2 x=\left(2\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)^2.\end{cases}$$

Уравнение в системе является однородным. Поэтому разделим обе его части на $\cos^2 x$:

$$1+8\operatorname{tg}^2 x=\left(2-\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)^2\Leftrightarrow 5\operatorname{tg}^2 x+4\sqrt{3}\operatorname{tg}x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-\sqrt{3};\\ \operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{5}.\end{array}\right.$$

«Подключим» теперь неравенство $2\cos x\ge\sqrt{3}\sin x$, рассмотрев отдельно два случая.

1. Пусть $\cos x>0$. Тогда $\operatorname{tg}x\le\frac{2}{\sqrt{3}}$ и, следовательно,

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-\sqrt{3};\\ \operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{5};\end{array}\right.\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n, & n\in\mathbf{Z};\\ x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+2\pi k, & k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

2. Пусть $\cos x < 0$. Тогда $\operatorname{tg} x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, что исключает решения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Задача 16. Решить уравнение

$$\cos x\sqrt{1 + \sin x - 2\cos x} = \cos x - \sin x.$$

Решение. Непосредственно проверяем, что $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ не является решениями данного уравнения. Поэтому разделим обе его части на $\cos x$:

$$\sqrt{1 + \sin x - 2\cos x} = 1 - \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ 1 + \sin x - 2\cos x = (1 - \operatorname{tg} x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ 1 + \sin x - 2\cos x = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) - 2\operatorname{tg} x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ 1 + \sin x - 2\cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{2\sin x}{\cos x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ \sin x\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^3 x - 2\sin x\cos x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ (\sin x - 2\cos x)\left(\cos^2 x - \sin x\right) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ \sin x - 2\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

2. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ \cos^2 x - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 1; \\ \sin x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Изобразим решения неравенства и уравнения из системы на тригонометрическом круге (рис. 3.17).

Из рис. 3.17 видно, что все решения уравнения $\sin x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg} x \le 1$, т. к. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

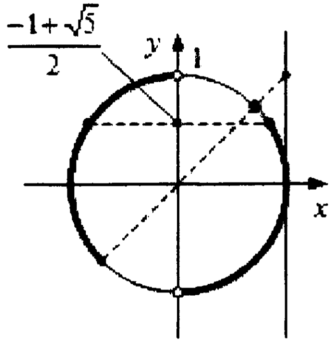


Рис. 3.17

В предыдущих главах мы уже встречались с граничными задачами, решение которых основано на установлении нижних и/или верхних числовых границ входящих в них выражений. В тригонометрии нижние и верхние числовые границы описываются следующими неравенствами:

- $-1 \le \sin^n x \le 1, \quad -1 \le \cos^n x \le 1$ при любых x и $n \ge 0$;
- $\sin^m x + \cos^k x \le 1$ при любом x и любых $m \ge 2$, $k \ge 2$, причем $\sin^m x + \cos^k x = 1$ равносильно системе
$$\begin{cases} \sin^m x = \sin^2 x; \\ \cos^k x = \cos^2 x; \end{cases}$$
- $|a\cos x \pm b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ при любых x, a, b.

Не забывайте и здесь про классическое неравенство $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \ge 2$ и четность некоторых тригонометрических функций.

Задача 17. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^6 x = 2 - \sin^8 x$.

Решение. Так как $\sin^4 x + \cos^6 x \le 1$ и $2 - \sin^8 x \ge 1$ при всех x, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^6 x = 1; \\ 2 - \sin^8 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x; \\ \cos^6 x = \cos^2 x; \Leftrightarrow \\ \sin^8 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = 1; \\ \cos^2 x\left(1 - \cos^4 x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = 1; \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ |\cos x| = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |\sin x| = 1; \\ \cos x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} |\sin x| = 1; \\ |\cos x| = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = 1; \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Задача 18. Решить уравнение $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.

Решение. Так как $|\cos 4x + (-\cos 2x)| \le 2$, то $(\cos 4x + (-\cos 2x))^2 \le 4$, при этом правая часть уравнения $5 + \sin 3x \ge 4$ при всех x. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4; \\ 5 + \sin 3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos 4x - \cos 2x| = 2; \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\sin 3x \cdot \sin x| = 1; \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(-1) \cdot \sin x| = 1; \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = 1; \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}; \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3}, \ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Изобразим и найдем пересечение полученных серий углов (рис. 3.18).

Корнями уравнения будут углы $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$.

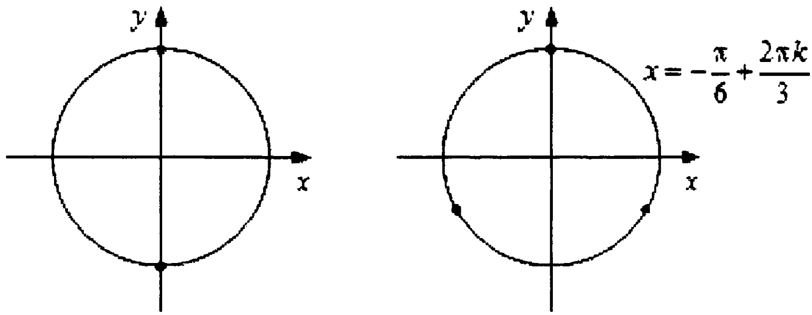


Рис. 3.18

Задача 19. Решить уравнение

$$1-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=12x^2-4\pi x+\frac{\pi^2}{3}+2.$$

Решение. Используя равенство $1-2\sin^2 x=\cos 2x$, данное уравнение запишем в виде

$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=\frac{36x^2-12\pi x+\pi^2}{3}+2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=\frac{(6x-\pi)^2}{3}+2.$$

Поскольку при всех x выполняются неравенства

$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x\le\sqrt{1+3}=2,\quad \frac{(6x-\pi)^2}{3}+2\ge 2,$$

то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2;\\ \dfrac{(6x-\pi)^2}{3}+2=2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2;\\ x=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3} = 2; \\ x = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

Задача 20. Решить уравнение $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\cdot\sin 3x = 2$.

Решение. Поскольку при всех x выполняются неравенства $\left|\sin x + \sqrt{3}\cos x\right| \le 2$ и $\left|\sin 3x\right| \le 1$, то равенство $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\cdot\sin 3x = 2$ возможно только в двух следующих случаях:

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2; \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = -2; \\ \sin 3x = -1. \end{cases}$$

1. Рассмотрим первую систему:

$$\begin{cases} 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2; \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbf{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}, \qquad n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Изобразим и найдем пересечение полученных серий углов (рис. 3.19).

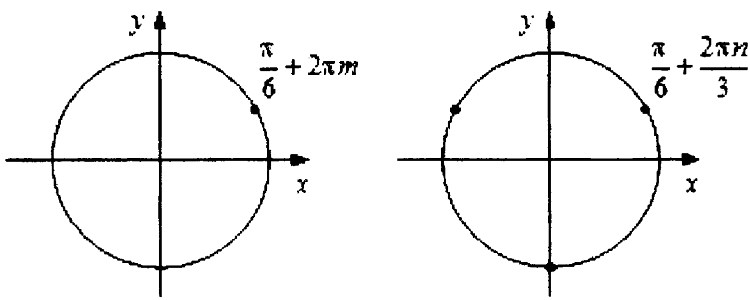


Рис. 3.19

Очевидно, что пересечением этих серий являются углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \ m \in \mathbf{Z}$.

2. Аналогично решается вторая система:

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1; \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}; \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \ m \in \mathbf{Z}; \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Задача 21. Найти сумму всех целых решений неравенства

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2} + \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)^{-1} < x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}} + \frac{1}{x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}}}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}} + \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)^{-1} < x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}} + \frac{1}{x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \left(x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}} + \frac{1}{x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}}}\right)\left(\cos^2\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\right).$$

Из неравенства $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$ следует, что $\cos^2\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}} \geq 2$ при всех x, для которых $\frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, и $x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}} + \frac{1}{x \cdot 3^{\sqrt{64-x^2}}} \geq 2$ при всех $x > 0$, для которых $64 - x^2 \geq 0$.

Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0; \\ 64 - x^2 \ge 0; \\ \dfrac{\pi x}{2} \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 8; \\ x \ne 1 + 2n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Искомыми целыми решениями будут числа $\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$, сумма которых равна 20.

Задача 22. Найти сумму корней уравнения $\cos^6(2\pi x) - 2\sin^3(\pi x) = 3$, принадлежащих отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Решение. Так как при всех x выполняется неравенство $\cos^6(2\pi x) + 2\sin^3(-\pi x) \le 3$, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos^6(2\pi x) = 1; \\ 2\sin^3(-\pi x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos(2\pi x)| = 1; \\ \sin(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x = \pi n, & n \in \mathbf{Z}; \\ \pi x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \dfrac{\pi n}{2}, & n \in \mathbf{Z}; \\ \pi x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} + 2k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Для нахождения корней из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$ составим и решим двойное неравенство:

$$-\frac{\pi}{2} \le -\frac{1}{2} + 2k \le \pi \quad \Leftrightarrow \quad -\pi \le -1 + 4k \le 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-\pi}{4} \le k \le \frac{1+2\pi}{4}.$$

Так как $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, то $-1 < \dfrac{1-\pi}{4} < 0$; $1 < \dfrac{1+2\pi}{4} < 2$, а значит, $0 \le k \le 1$, $k \in \{0;\ 1\}$, и искомыми корнями будут числа $x = -\dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{3}{2}$, сумма которых равна 1.

Задача 23. Решить уравнение

$$\left(5\sin x+12\cos x\right)\left(100+48\cos x-13\cos 2x\right)=1757.$$

Решение. Преобразуем выражение в первой скобке:

$$5\sin x+12\cos x=13\left(\frac{5}{13}\sin x+\frac{12}{13}\cos x\right)=13\sin\left(x+\varphi\right),$$

где $\varphi=\arccos\frac{5}{13}$.

Теперь преобразуем выражение во второй скобке:

$$100+48\cos x-13\cos 2x=100+48\cos x-13\left(2\cos^2 x-1\right)=$$

$$=-26t^2+48t+113,$$

где $t=\cos x$. Вершина параболы $y=-26t^2+48t+113$ имеет координаты $\left(\frac{24}{26},\frac{1757}{13}\right)$. Поэтому $-26\cos^2 x+48\cos x+113\le\frac{1757}{13}$ для всех x.

Итак, установлено, что левая часть исходного уравнения не превосходит $13\cdot\frac{1757}{13}=1757$, причем равенство числу 1757 возможно только в случае

$$\begin{cases}\sin\left(x+\varphi\right)=1;\\ \cos x=\dfrac{12}{13}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n-\arccos\dfrac{5}{13}, & n\in\mathbf{Z};\\ x=\pm\arccos\dfrac{12}{13}+2\pi k, & k\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n=\arccos\frac{12}{13}+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Задача 24. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x-\sqrt{3}\cos y=\dfrac{5}{2};\\ \sin y+\sqrt{2}\cos x=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Решение. Вычтем почленно уравнения системы:

$$\begin{cases} -\left(\sin y+\sqrt{3}\cos y\right)+\left(\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x\right)=4; \\ \sin y+\sqrt{2}\cos x=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\left(\sin y\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos y\right)+2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=4; \\ \sin y+\sqrt{2}\cos x=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right)=2; \\ \sin y+\sqrt{2}\cos x=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1; \\ \sin\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1; \\ \sin y+\sqrt{2}\cos x=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \\ y=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbf{Z}; \\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \\ y=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \dfrac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Задача 25. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi\sin^2 x+\pi}{4\sin^6 x+1}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4\sin^6 x+1}\right)=0.$$

Решение. Уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\sin^2 x+\pi}{4\sin^6 x+1}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4\sin^6 x+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\sin^2 x+\pi}{4\sin^6 x+1}=\frac{\pi}{4\sin^6 x+1}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}+\frac{2\sin^2 x}{4\sin^6 x+1}=n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Рассмотрим более пристально выражение $\frac{2\sin^2 x}{4\sin^6 x+1}$, которое можно записать в виде:

$$\frac{1}{2\sin^4 x+\frac{1}{2\sin^2 x}}=\frac{1}{2\sin^4 x-2\sin^2 x+\left(2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{-2\sin^2 x\cos^2 x+\left(2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}\right)-\frac{\sin^2 2x}{2}}.$$

Так как $2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}\geq 2$ (сумма двух положительных взаимно обратных величин), то $2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}-\frac{\sin^2 2x}{2}\geq\frac{3}{2}$, а значит, $0\leq\frac{2\sin^2 x}{4\sin^6 x+1}\leq\frac{2}{3}$. Однако выражение $\frac{1}{3}+\frac{2\sin^2 x}{4\sin^6 x+1}$ должно быть целым, что возможно только при $\frac{2\sin^2 x}{4\sin^6 x+1}=\frac{2}{3}$. Это равенство, в свою очередь, выполняется, если и только если

$$2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}-\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin^2 x+\frac{1}{2\sin^2 x}=2;\\ \sin^2 2x=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}2\sin^2 x=1;\\ 4\sin^2 x\cos^2 x=1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\sin^2 x=\frac{1}{2};\\ \cos^2 x=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$$

Задача 26. Решить уравнение $9+\cos 12x=\dfrac{10\cos 6x}{\sin 5x}-8\operatorname{ctg}^2 5x.$

Решение. Обратим внимание на числовые коэффициенты в слагаемых: 9, 1, 10, -8 и представим 9 в виде $8+1$. Тогда получим уравнение:

$$\left(8+8\operatorname{ctg}^2 5x\right)+(1+\cos 12x)=\frac{10\cos 6x}{\sin 5x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8}{\sin^2 5x}+2\cos^2 6x=\frac{10\cos 6x}{\sin 5x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 8+2\cos^2 6x\cdot\sin^2 5x=10\cos 6x\cdot\sin 5x.$$

Сделаем замену переменной:

$$t=\cos 6x\cdot\sin 5x \Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1; \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 5x\cdot\cos 6x=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin x+\sin 11x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=-1; \\ \sin 11x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}; \\ \sin\left(-\dfrac{11\pi}{2}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.$

Задача 27. Найти все значения x, при каждом из которых оба выражения $f(x)=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi\cos x}{4}\right)+\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi\cos x}{4}\right)$ и $g(x)=\dfrac{\sqrt{28+3x-x^2}+2x+2}{1+x}$ определены, причем меньшее из значений выражений не превосходит 2.

Решение. Вначале найдем все x, при которых определены обе функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi\cos x}{4}\neq\dfrac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbf{Z}; \\ x\neq-1; \\ 28+3x-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\neq 2n, \quad n\in\mathbf{Z}; \\ x\neq-1; \\ x\in[-4;\ 7]. \end{cases}$$

Так как $|\cos x| \le 1$, то $\cos x \ne 2n \Leftrightarrow \cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Итак, обе функции определены при $x \in \left[-4; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 7\right]$.

Далее:

$$f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{4}\right) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{4}\right)} \ge 2$$

для всех x из области определения. Так как $g(x) = \frac{\sqrt{28 + 3x - x^2}}{x + 1} + 2$, то $g(x) > 2$ при $x \in (-1; 7)$, $g(x) = 2$ при $x = 7$ или $x = -4$, $g(x) < 2$ при $x \in (-4; -1)$.

В итоге: $\min\{f(x), g(x)\} < 2$ если $x \in (-4; -1)$ и $x \ne -\frac{\pi}{2}$, и в этом случае требования задачи выполняются; $\min\{f(x), g(x)\} = 2$ при $x = -4$ или $x = 7$, и опять-таки, требования задачи выполнены. Осталось рассмотреть ситуацию, когда $x \in \left(-1; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 7\right)$. В этом случае $\min\{f(x), g(x)\} \ge 2$, причем ввиду $g(x) > 2$ равенство достигается только при условии $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{4}\right) = 1$, что, в свою очередь, равносильно условию $\frac{\pi\cos x}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\cos x = \pm 1 + 4m$, $m \in \mathbf{Z}$, $\Leftrightarrow \cos x = \pm 1$ $\Leftrightarrow$ $x = \pi l$, $l \in \mathbf{Z}$. Но $\pi l \in (-1; 7)$ только при $l = 0$, 1, 2. Отсюда получаем искомый ответ:

$$\left[-4; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \cup \{0, \pi, 2\pi, 7\}.$$

В решении тригонометрических уравнений с параметрами используются те же идеи, которые, уже рассматривались в *главе 2*. Поэтому здесь приведем только три типичных уравнения, использующих соответственно *аналитический*, *графический* и *симметричный методы*, описанные при решении алгебраических уравнений и систем уравнений.

Задача 28. При каких a уравнение $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-a-3=0$ имеет решение?

Решение. Положим, $y=\cos^2 x$. Тогда $0\le y\le 1$. Поэтому исходное уравнение имеет решения, если и только если решения имеет система

$$\begin{cases} y^2-(a+2)y-a-3=0; \\ 0\le y\le 1. \end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{cases} y=\dfrac{a+2\pm\sqrt{(a+2)^2+4(a+3)}}{2}; \\ 0\le y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a+2\pm\sqrt{(a+4)^2}}{2}; \\ 0\le y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{a+2\pm(a+4)}{2}; \\ 0\le y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=a+3; \\ y=-1; \end{array}\right. \\ 0\le y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a+3; \\ 0\le y\le 1. \end{cases}$$

Последняя система имеет решение, если и только если $0\le a+3\le 1$, откуда $a\in[-3;-2]$.

Задача 29. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(\cos x)^{\frac{2}{5}}+2\cdot(\sin x)^{\frac{2}{5}}=a$ имеет единственное решение на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\, 0\right]$.

Решение. Сделаем замену переменной: $t=\sqrt[5]{\cos^2 x}$. Тогда задачу можно переформулировать так: найти a, при которых система

$$\begin{cases} 2\sqrt[5]{1-t^5} = a-t; \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Изобразим график функции $y = 2\sqrt[5]{1-t^5}$ и найдем граничные положения прямых $y = a-t$, при которых пересечение с кривой $g(x) = 2\sqrt[5]{1-t^5}$ будет только в одной точке (рис. 3.20).

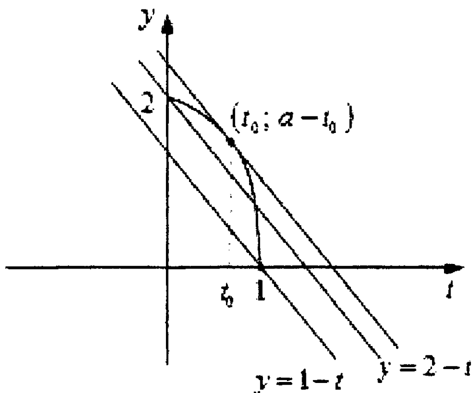


Рис. 3.20

Как видно из рисунка, единственное пересечение будет только в случаях, когда: 1) прямые $y = a-t$ лежат между прямыми $y = 1-t$ и $y = 2-t$; 2) $y = a-t$ совпадет с касательной к графику функции $g(x)$. Очевидно, в первом случае $a \in [1; 2)$. Рассмотрим вторую ситуацию.

Найдем точку касания $(t_0; a-t_0)$:

$$\begin{cases} g'(t_0) = -1; \\ g(t_0) = a-t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2t_0^4}{\sqrt[5]{\left(1-t_0^5\right)^4}} = -1; \\ 2\sqrt[5]{1-t_0^5} = a-t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{2}t_0 = \sqrt[5]{1-t_0^5}; \\ 2\sqrt[5]{1-t_0^5} = a-t_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt[4]{32}\right)^{\frac{1}{5}}}; \\ \sqrt[4]{2^5}t_0 = a - t_0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1+\sqrt[4]{32}}{\left(1+\sqrt[4]{32}\right)^{\frac{1}{5}}} = \left(1+\sqrt[4]{32}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

Ответ: $[1;\ 2)\cup\left\{\left(1+\sqrt[4]{32}\right)^{\frac{4}{5}}\right\}$.

Задача 30. Найти a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} (|x|+1)a = y+\cos x; \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Воспользуемся четностью функций $\cos x$, $\sin^2 x$, $|x|$: если предположить, что пара $(x_0;\ y_0)$ является решением данной системы, то и пара $(-x_0;\ y_0)$ также будет ее решением, поскольку

$$\begin{cases} (|-x_0|+1)a = y_0+\cos(-x_0); \\ \sin^2(-x_0) + y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x_0|+1)a = y_0+\cos x_0; \\ \sin^2 x_0 + y_0^2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, система может иметь единственное решение только в случае $x_0 = -x_0$, т. е. при $x_0 = 0$. Подставим это значение в систему:

$$\begin{cases} (0+1)a = y+\cos 0; \\ \sin^2 0 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y+1; \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y+1; \\ \left[\begin{array}{l} y = 1; \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2; \\ a = 0. \end{array}\right.$$

Итак, «кандидатами» на ответ будут значения 2 и 0. Проверим, сколько решений будет иметь исходная система уравнений при каждом из этих значений a.

1. $a = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = y+\cos x; \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -\cos x; \\ 1 = 1. \end{cases}$

Таким образом при $a = 0$ система имеет бесконечно много решений вида $(x';\ -\cos x')$.

2. $a=2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2|x|+2=y+\cos x; \\ \sin^2 x+y^2=1. \end{cases}$

Из второго уравнения следует, что $0 \le y^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1$. Но тогда $-2 \le y+\cos x \le 2$ ввиду $-1 \le \cos x \le 1$.

Левая часть первого уравнения не может быть меньше 2, поскольку $2|x|+2 \ge 0+2$. Поэтому равенство $2|x|+2=y+\cos x$ возможно только в случае

$$\begin{cases} 2|x|+2=2; \\ y+\cos x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0; \\ y=1. \end{cases}$$

Таким образом, пара $(0;\,1)$ — единственное решение исходной системы уравнений при $a=2$. Это значение и будет искомым ответом.

При использовании основных формул тригонометрии для решения уравнений необходимо учитывать различие областей определения левой и правой частей некоторых из этих формул. Некорректное применение таких формул может привести либо к потере корней, либо к появлению посторонних корней. Чтобы подобное не произошло, следует использовать приведенные далее равносильные соотношения.

При использовании формулы $\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}=\operatorname{tg}(x+y)$ к решаемому уравнению (неравенству) нужно добавить систему ограничений: $x \ne \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ y \ne \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ n,\ k \in \mathbf{Z}$.

Обозначим заменяемый «фрагмент» уравнения буквой u. Тогда предыдущие рассуждения можно записать в виде следующих равносильных соотношений:

$$u=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u=\operatorname{tg}(x+y); \\ x \ne \dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \\ y \ne \dfrac{\pi}{2}+\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Аналогично:

$$u = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = \operatorname{tg}(x - y); \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

При использовании формулы $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ нужно проверить, не являются ли решениями исходного уравнения (неравенства) значения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, которые могли быть потеряны в результате применения этой формулы. Если обозначить заменяемый «фрагмент» $\sin 2x = u$, то предыдущие рассуждения можно записать в виде следующих равносильных соотношений:

$$u = \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Аналогично:

$$u = \cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

$$u = \operatorname{tg} 2x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

$$u = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

$$u = \mathrm{ctg}x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Задача 31. Решить уравнение $\dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x}{1 - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}2x} = \sqrt{3}$.

Решение.

$$\frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x}{1 - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}3x = \sqrt{3}; \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \\ 2x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi l}{3}, \quad l \in \mathbf{Z}; \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Найдем такие целые l, при которых пересечение двух множеств углов $\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi l}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$ не пусто. Итак,

$$\frac{\pi}{9} + \frac{\pi l}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \Leftrightarrow \quad 6l - 18n = 7.$$

Так как $\text{НОД}(6, 18) = 6 > 1$, то это уравнение не имеет решений.

Аналогично: $\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi l}{3} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 12l - 18k = 5$, и это уравнение также не имеет решений.

Итак,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi l}{3}, \; l \in \mathbf{Z}; \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}; \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi l}{3}, \quad l \in \mathbf{Z}$$

— решения исходного уравнения.

Задача 32. Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 5x$.

Решение.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 5x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin 5x = 1; \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5}; \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, \quad n, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Найдем такие k, при которых $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5} = \dfrac{\pi n}{2}$. Это уравнение перепишем в виде $5n - 4k = 1$. Частное решение этого уравнения: $n_0 = 1$, $k_0 = 1$. Отсюда $k = 1 + 5t, \quad t \in \mathbf{Z}$. Итак,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5}; \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5}; \\ k \neq 1 + 5t, \quad t, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Задача 33. Решить уравнение $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = 4 \operatorname{ctg} x$.

Решение. Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$. Однако в этом случае возможна потеря решений $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$. Поэтому необходимо проверить, не являются ли углы $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ решениями исходного уравнения:

$$\operatorname{tg} 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 4 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}(\pi + 2\pi n) + \sin(\pi + 2\pi n) = 4 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \pi + \sin \pi = 4 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 + 0 = 0.$$

Итак, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$, — решения исходного уравнения.

Далее

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{4}{\operatorname{tg}x} \Leftrightarrow \operatorname{tg}x\left(\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)=\frac{2}{\operatorname{tg}x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^4 x}=\frac{1}{\operatorname{tg}x} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x-1=0;\\ \operatorname{tg}x\neq 0;\\ \operatorname{tg}^4 x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow |\operatorname{tg}x|=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\pi t,\quad t\in\mathbf{Z}.$$

Окончательный ответ:

$$\left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z},\\ x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}+\pi t, & t\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

§ 3.3. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить (**1–4**).

1. $63\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}-\operatorname{arcctg}5\right)$. **2.** $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\arccos 0,6\right)$.

3. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$. **4.** $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$.

Упростить выражение (**5–6**).

5. $\cos^{-6}x-\operatorname{tg}^6 x-3\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^{-2}x$.

6. $\dfrac{\sin 10,5x}{\sin 3,5x}-2\cos 7x$.

7. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, α и $\beta\in(0°;\,90°)$.

8. Найти $3\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha\cdot\cos\beta=-\frac{1}{2}$, $\alpha-\beta=\frac{7\pi}{2}$.

Найти числовые значения выражения (**9–26**).

9. $\operatorname{tg}9°+\operatorname{tg}15°-\operatorname{tg}27°-\operatorname{ctg}27°+\operatorname{ctg}9°+\operatorname{ctg}15°$.

10. $\cos^2\left(\frac{\alpha+\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{4\pi+\alpha}{2}\right)+\cos^4\left(\frac{\alpha-6\pi}{2}\right)$.

11. $\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}$.

12. $\operatorname{ctg}^2 36°\cdot\operatorname{tg}^2 18°$.

13. $2\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\cos^2\frac{\pi}{10}$.

14. $\dfrac{1}{\sin 170°}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 100°}$.

15. $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$.

16. $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}$.

17. $\sin 5°\cdot\sin 15°\cdot\sin 25°\cdots\sin 75°\cdot\sin 85°$.

18. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}$.

19. $\sin 18°-\cos 36°$.

20. $\dfrac{1}{\sin 126°}-\dfrac{1}{\sin 18°}$.

21. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-8))$.

22. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$.

23. $\arcsin(\sin 6)$.

24. $\arccos(\cos 16)$.

25. $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

26. $\arcsin(\cos 680°)$.

27. Найти такое x, что $9\arcsin x\cdot\arccos x=-\pi^2$.

Найти множества значений функции (**28–30**).

28. $y = 3\sin 2x - 4\cos 2x - 7$.

29. $y = \sin 2x - 4\sin^2 x - 2\cos^2 x - 6\cos 2x + 5$.

30. $y = 2\cos^2 x + 3\sin x + 1$.

Найти наименьший положительный период (**31–32**).

31. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{5} - 17\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + 10$. **32.** $y = 2\sin^2 \dfrac{4}{3}x - 7\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4} + 5\right)$.

33. Найти множество значений функции $y = \arcsin\left(x^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

34. Найти область определения функции $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2 + x - 2}$.

35. Найти такие значения x, при которых выполняется равенство $\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{x} + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

36. Найти все значения параметра b, для каждого из которых существует число a из промежутка $a \in [0; \pi]$ такое, что уравнение $x^2 + (\sin a + 3\cos a)x + b = 0$ имеет решение.

Решить уравнение (**37–48**).

37. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$.

38. $2\cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0$.

39. $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$.

40. $\cos 2x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$.

41. $6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$.

42. $\dfrac{\cos(x - 60°)}{\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 0$.

43. $\sqrt{2}\cos 2x = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}.$

44. $\cos 2x = \cos^2\frac{3x}{2}.$

45. $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0.$

46. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$

47. $\sin 2x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0.$

48. $\frac{1}{3}\cos^2 x(\operatorname{ctg} x - 1) = \cos x(\sin x + \cos x) - 1.$

49. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$.

50. Найти число корней уравнения $2 + 2\cos(180° - 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$ на промежутке $[0°; 180°]$.

51. Найти корень уравнения $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 x - \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} + \frac{5}{6} = 0$ на промежутке $[-50°; 0°]$.

52. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3-x}\right) = x^2 - 2x + 2.$

53. Найти сумму корней уравнения $\sin 3x + \cos 8x = 2$ из промежутка $[-90°; 540°]$.

Решить уравнение (**54–63**).

54. $\sqrt{\sin 3x - \sin x + 2} = \sqrt{2}\sin 2x.$

55. $\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 3x} = \sin 2x.$

56. $\sin^{10} 3x + \cos^{10} 3x = 4 \cdot \frac{\sin^6 3x + \cos^6 3x}{4\cos^2 6x + \sin^2 6x}$.

57. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(1 + \operatorname{tg}^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4.$

58. $\frac{1}{\cos^4 x}+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x.$

59. $\sin^6 x\cdot\cos x+\cos^6 x\cdot\sin x=\sin 2x.$

60. $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right).$

61. $2\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg}x+2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+3=0.$

62. $\sin^9 x+\cos^6 x=1.$

63. $\left(\sin x+2\cos 6x\right)^2=\cos 6x+10.$

64. Найти сумму корней уравнения $\sqrt{\pi^2-x^2}\left(4\sin 2x+6-9\sin x-9\cos x\right)=0$.

65. Найти число корней уравнения $\operatorname{tg}-\sqrt{\sin x}=0$, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ 2\pi]$.

66. Найти минимальный положительный корень уравнения $\sqrt{14\sin x-2\cos 2x}+\sqrt{8}\cos x=0$.

67. Найти число корней уравнения $\sqrt{6}\sin x+\sqrt{5-\cos x}=0$, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

68. Найти максимальный отрицательный корень уравнения $\cos 3x+\cos\left(\frac{5x}{2}\right)=2$.

69. Найти сумму корней уравнения $\cos^2\pi x-\left|x^2-5x+4\right|=1$.

70. Найти корни уравнения $\sqrt{1+\cos 6x}\cdot\sin\frac{x}{2}=\sqrt{8}\sin\frac{11\pi}{6}$, принадлежащие промежутку $(0°;\ 540°]$.

71. Найти удвоенное значение суммы корней уравнения $3\sin\pi x-x^2-3x-5{,}25=0$.

72. Найти сумму корней уравнения $\left(14\left(1-\cos x\right)-\sin^2 x\right)\sqrt{\operatorname{ctg}x}=0$, принадлежащих отрезку $[0°;\ 360°]$.

73. Решить уравнение $\dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+1}=y^2-4y+5$.

74. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy=-1; \\ \arcsin x+\arccos y=\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Решить уравнение (**75**–**87**).

75. $\sin x-\cos x=\sqrt{1-\operatorname{tg} x}$.

76. $\operatorname{tg}^2 x=\sqrt{\left(1-2\operatorname{ctg}^2 x\right)^2}$.

77. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}$.

78. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x=4|\sin x|$.

79. $\sin x+|\cos x|+\sin 4x=\cos 2x$.

80. $\dfrac{\sin 3x\cos 5x+|\sin 5x\cos 3x|}{\sin 2x}=2\cos 2x$.

81. $\sin x\sqrt{1-\cos x-2\sin x}=\sin x+\cos x$.

82. $(3\sin x+4\cos x)(20+12\sin x+5\cos 2x)=143$.

83. $\sin 3x\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

84. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi\cos^2 x+\pi}{4\cos^6 x+1}\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4\cos^6 x+1}\right)=0$.

85. $3+\cos 6x=\dfrac{2\sin 3x}{\cos 4x}-4\operatorname{tg}^2 4x$.

86. $\sqrt{8\operatorname{tg} x+22\operatorname{ctg} x}=-\sqrt{15}(\sin x+\cos x)$.

87. $\sqrt{3+4\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x$.

Решить неравенство (**88–92**).

88. $|\sin x| > |\cos x|$.

89. $1 - \sin x + \cos x < 0$.

90. $\dfrac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1$.

91. $\sin 4x + \cos 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x > 1$.

92. $|\cos x| > \operatorname{ctg} x$.

93. Найти a, при котором уравнение $7\cos 2x - 7|x| - (x^4 + 1)^7 - 7|x| + 2 = a$ имеет нечетное число решений.

94. Найти a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

95. Найти a, при которых уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 4x$ не имеет решений.

96. При каких a уравнение $\sin^4 x + (a-6)\sin^2 x - 4(a-2) = 0$ имеет решения?

97. Найти сумму целых a, при которых уравнение $8 - \cos^2 2x - 6\sin 2x = 3a$ имеет решение.

98. При каких a уравнение $\sin x = a^2 - 2a$ имеет единственное решение на промежутке $[0;\ 2\pi]$?

99. Найти наибольшее отрицательное a, при котором уравнение $(a^2 + 2)\sin^2 x + 4a\sin x \cdot \cos x = a^2 + 3$ имеет решение.

100. Найти сумму натуральных значений a, при которых уравнение $a \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin 2x + 9$ не имеет решений.

101. Найти целые a, при которых уравнение $8(\sin^8 x + \cos^8 x) + a\cos^2 2x + 3a - 7 = 0$ имеет решения.

102. Найти наименьшее значение a, при котором уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ имеет решения.

103. Найти a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} a - \cos x = y, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

104. Найти сумму целых a, при которых уравнение $\sin^4 x + (a-6)\sin^2 x - 4(a-2) = 0$ имеет решения.

105. Найти количество корней уравнения $\mathrm{tg}5x - \mathrm{ctg}5x = \dfrac{2\cos^2 10x}{\sin 10x}$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.

106. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{1}{2}(\cos x)^{\frac{2}{3}} + (\sin x)^{\frac{2}{3}} = a$ имеет единственное решение на промежутке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

107. Найти сумму целых значений a, при которых уравнение $\sin^2 2x + \sin 2x \cdot \sin 6x = \dfrac{a}{8}\sin 8x$ имеет решение на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{16}\right)$.

108. Найти сумму целых значений $a \in (-10; 10)$, при которых уравнение $(a-4)\cos 3x - 3\cos 6x = 3$ имеет три различных решения на промежутке $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

109. Найти количество корней уравнения $\cos 3x \cdot \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$, принадлежащих отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; 3\pi\right]$.

110. Найти количество корней уравнения $\cos 4x \cdot \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$, принадлежащих отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; 3\pi\right]$.

111. Найти все значения параметра a, для каждого из которых неравенство $2a - 4 + a\left(3 - \sin^2 x\right)^2 + \cos^2 x < 0$ выполняется для всех значений x.

112. Найти все значения параметра a, для каждого из которых найдется число b, такое, что система уравнений

$$\begin{cases} y = 15\cos(x-b) - 8\sin(x-b); \\ x^2 + y^2 + 2a(a+y-x) = 49 \end{cases}$$

имеет решения.

ГЛАВА 4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

§ 4.1. Логарифмические выражения

Во многих задачах вычисление значения некоторого логарифмического выражения предполагает предварительное конструирование его из одного или двух логарифмов, которые удобно назвать *«атомами»*.

Вначале рассмотрим *«одноатомные» задачи*. В них требуется вычислить значение логарифмического выражения A при заданном значении некоторого «атома» $\log_n m$. В отдельных задачах такого типа «атом» в условии не указан, что предполагает самостоятельный выбор «атома», исходя из вида логарифмов в A. При этом знать числовое значение «атома» $\log_n m$ не нужно — важно только, чтобы числа n и m позволяли легко реализовать третий шаг приведенного далее алгоритма.

Итак, общий алгоритм решения «одноатомных» задач следующий:

1. Если «атом» можно представить в виде $\log_{n^k} m^r$, то запишите его как $\frac{r}{k}\log_n m$.

2. Приведите все логарифмы из выражения A к одному основанию n.

3. Все числа, стоящие под знаками логарифмов, выразите через m и n с помощью операций умножения, деления и возведения в степень.

4. С помощью формул распаковки выразите все логарифмы через «атом» $\log_n m$.

5. Упростите полученное выражение.

Задача 1. Найти $\log_{81} 3{,}6$, если $\log_{0,4} 27 = a$.

Решение. Так как $\log_{0,4} 27 = 3\log_{0,4} 3 = a$, то в качестве «атома» берем $\log_n m = \log_{0,4} 3 = \frac{a}{3}$. Поскольку в данном случае $n = 0{,}4$, $m = 3$, то приведем искомый логарифм к основанию 0,4: $\log_{81} 3{,}6 = \frac{\log_{0,4} 3{,}6}{\log_{0,4} 81}$.

Теперь выразим числа 3,6 и 81 через числа $n = 0{,}4$ и $m = 3$ с помощью операций умножения, деления и возведения в степень: $3{,}6 = 0{,}4 \cdot 3^2$, $81 = 3^4$. Отсюда

$$\log_{0,4} 3{,}6 = \log_{0,4}\left(0{,}4 \cdot 3^2\right) = \log_{0,4} 0{,}4 + \log_{0,4} 3^2 = 1 + 2\log_{0,4} 3 = 1 + \frac{2}{3}a;$$

$$\log_{0,4} 81 = \log_{0,4} 3^4 = 4\log_{0,4} 3 = \frac{4}{3}a.$$

В итоге имеем: $\log_{81} 3{,}6 = \dfrac{1 + \frac{2}{3}a}{\frac{4}{3}a} = \dfrac{3 + 2a}{4a}$.

Задача 2. Вычислить

$$A = \log_{\sqrt[3]{ab}}\left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}}\right) - \frac{2}{\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\sqrt[3]{ab}\right)} + 5\log_b \sqrt[5]{b},$$

если $\log_a b = 7$.

Решение. Заданный «атом» $\log_a b$ определяет ход преобразования выражения A в соответствии с алгоритмом решения «одноатомных» задач:

$$\log_{\sqrt[3]{ab}}\left(\frac{b}{\sqrt[3]{a}}\right) = \frac{\log_a \frac{b}{\sqrt[3]{a}}}{\log_a \sqrt[3]{ab}} = \frac{\log_a b - \frac{1}{3}\log_a a}{\frac{1}{3}(\log_a a + \log_a b)} = \frac{7 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(1 + 7)} = \frac{5}{2};$$

$$\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\sqrt[3]{ab}\right) = \frac{\log_a \sqrt[3]{ab}}{\log_a \sqrt[3]{a}} = \frac{\frac{1}{3}(\log_a a + \log_a b)}{\frac{1}{3}\log_a a} = 1 + 7 = 8;$$

$$\log_b \sqrt[5]{b} = \frac{1}{5}\log_b b = \frac{1}{5}.$$

В итоге имеем: $$A = \frac{5}{2} - \frac{2}{8} + 1 = 3{,}25.$$

Задача 3. Вычислить
$A = \log_{12} 18 \cdot \log_{24} 54 + 5\left(\log_{12} 18 - \log_{24} 54\right)$.

Решение. В условии этой задачи «атом» не указан. Тем не менее, ее удобно решить как «одноатомную задачу», если в качестве «атома» выбрать $a = \log_3 2$, поскольку через числа 3 и 2 с помощью операций умножения и деления легко выражаются числа 12, 18, 54, 24.

Итак, в соответствии с алгоритмом решения «одноатомных» задач имеем:

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_3\left(3^2 \cdot 2\right)}{\log_3\left(3 \cdot 2^2\right)} = \frac{2 + \log_3 2}{1 + 2\log_3 2} = \frac{2+a}{1+2a};$$

$$\log_{24} 54 = \frac{\log_3\left(3^3 \cdot 2\right)}{\log_3\left(3 \cdot 2^3\right)} = \frac{3 + \log_3 2}{1 + 3\log_3 2} = \frac{3+a}{1+3a}.$$

В итоге получаем:

$$A = \frac{2+a}{1+2a} \cdot \frac{3+a}{1+3a} + 5\left(\frac{2+a}{1+2a} - \frac{3+a}{1+3a}\right) =$$

$$= \frac{a^2 + 5a + 6}{(1+2a)(1+3a)} + \frac{5\left(a^2 - 1\right)}{(1+2a)(1+3a)} = \frac{6a^2 + 5a + 1}{(1+2a)(1+3a)} = 1.$$

Задача 4. Найти значение выражения

$$A = \left(\log_3 4 + 9\log_4 3 + 6\right)\left(\log_3 4 - 3\log_{108} 4\right)\log_4 3 - \log_3 4.$$

Решение. Выберем в качестве «атома» $t = \log_3 4$.

Тогда $\log_4 3 = \dfrac{1}{\log_3 4} = \dfrac{1}{t}$, $\log_{108} 4 = \dfrac{\log_3 4}{\log_3 108} = \dfrac{t}{\log_3\left(3^3 \cdot 4\right)} = \dfrac{t}{3+t}$

и исходное выражение A принимает вид:

$$A=\left(t+\frac{9}{t}+6\right)\left(t-\frac{3t}{3+t}\right)\cdot\frac{1}{t}-t=\frac{t^2+6t+9}{t}\cdot\frac{3t+t^2-3t}{3+t}\cdot\frac{1}{t}-t=$$

$$=\frac{(t+3)^2}{t}\cdot\frac{t^2}{t+3}\cdot\frac{1}{t}-t=t+3-t=3.$$

Помимо «одноатомных» задач встречаются также задачи, которые логично назвать *«двухатомными»*. В них требуется выразить логарифм $\log_u v$, где u, v — заданные числа, через два «атома» a и b, представленные в виде логарифмов $a=\log_n k$ и $b=\log_n r$ (или $b=\log_r n$), где n, k, r — известные натуральные числа.

Общий алгоритм решения таких задач следующий:

1. Представьте искомый логарифм в виде $\dfrac{\log_n v}{\log_n u}$.

2. С помощью операций умножения, деления и возведения в степень выразите числа v и u через числа n, k, r.

3. С помощью формул распаковки выразите логарифмы $\log_n v$ и $\log_n u$ через логарифмы $\log_n k$ и $\log_n r$, а затем получите искомое представление для $\log_u v=\dfrac{\log_n v}{\log_n u}$.

Задача 5. Вычислить $\log_5 7{,}5$, если $a=\log_2 3$, $b=\lg 2$.

Решение. Из вида «атомов» $\log_2 3$ и $\log_{10} 2$ ясно, что $n=2$, $k=3$, $r=10$. Поэтому приведем искомый логарифм к основанию 2: $\log_5 7{,}5=\dfrac{\log_2 7{,}5}{\log_2 5}$.

Теперь выразим числа 7,5 и 5 через числа 2, 3, 10 с помощью операций умножения, деления и возведения в степень: $7{,}5=\dfrac{15}{2}=\dfrac{3\cdot 10}{2^2}$, $5=\dfrac{10}{2}$.

Отсюда

$$\log_2 7{,}5 = \log_2\left(\frac{3\cdot 10}{2^2}\right) = \log_2 3 + \log_2 10 - \log_2 2^2 = a + \frac{1}{b} - 2;$$

$$\log_2 5 = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 10 - \log_2 2 = \frac{1}{b} - 1.$$

В итоге имеем: $\log_2 7{,}5 = \dfrac{a + \frac{1}{b} - 1}{\frac{1}{b} - 1} = \dfrac{ab - b + 1}{1 - b}.$

Задача 6. Вычислить $\log_{175} 56$, если $a = \log_{14} 7$, $b = \log_{14} 5$.

Решение. Из вида «атомов» $\log_{14} 7$ и $\log_{14} 5$ ясно, что $n = 14$, $k = 7$, $r = 5$. Поэтому приведем искомый логарифм к основанию 14: $\log_{175} 56 = \dfrac{\log_{14} 56}{\log_{14} 175}.$

Теперь выразим числа 56 и 175 через числа 14, 7, 5 с помощью операций умножения, деления и возведения в степень: $56 = 7\cdot 8 = 7\cdot\left(\frac{14}{7}\right)^3$, $175 = 7\cdot 5^2$. Отсюда

$$\log_{14} 56 = \log_{14}\left(7\cdot\left(\frac{14}{7}\right)^3\right) = \log_{14} 7 + 3\log_{14}\frac{14}{7} =$$

$$= -2\log_{14} 7 + 3 = -2a + 3;$$

$$\log_{14} 175 = \log_{14}\left(7\cdot 5^2\right) = \log_{14} 7 + 2\log_{14} 5 = a + 2b.$$

В итоге имеем: $\log_{175} 56 = \dfrac{-2a + 3}{a + 2b}.$

Рассмотрим теперь несколько задач на *логарифмы с применением тригонометрии*. Успех решения их в немалой степени зависит от уровня владения основными приемами тригонометрических преобразований и знания свойств тригонометрических функций.

Задача 7. Найти значение выражения

$$A=\log_7 \operatorname{ctg} 28^\circ+\log_7 \operatorname{ctg} 30^\circ+\log_7 \operatorname{ctg} 32^\circ+\ldots+$$
$$+\log_7 \operatorname{ctg} 62^\circ+\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[4]{7}.$$

Решение. Вычислим последний из логарифмов и упакуем остальные:

$$A=\log_7(\operatorname{ctg} 28^\circ\cdot\operatorname{ctg} 30^\circ\cdot\operatorname{ctg} 32^\circ\cdots\operatorname{ctg} 62^\circ)+\log_{7^{-1}} 7^{\frac{1}{4}}.$$

Поскольку $\operatorname{ctg} 62^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ-28^\circ)=\operatorname{tg} 28^\circ$, аналогично $\operatorname{ctg} 60^\circ=\operatorname{tg} 30^\circ$, $\operatorname{ctg} 58^\circ=\operatorname{tg} 32^\circ$, ..., $\operatorname{ctg} 46^\circ=\operatorname{tg} 44^\circ$, то выражение A можно записать в виде

$$A=\log_7((\operatorname{ctg} 28^\circ\cdot\operatorname{tg} 28^\circ)(\operatorname{ctg} 30^\circ\cdot\operatorname{tg} 30^\circ)\times$$
$$\times(\operatorname{ctg} 32^\circ\cdot\operatorname{ctg} 32^\circ)\cdots(\operatorname{ctg} 44^\circ\cdot\operatorname{tg} 44^\circ))-\frac{1}{4}=\log_7 1-\frac{1}{4}=-0,25.$$

Задача 8. Вычислить $\log_{\frac{49}{17}}|\sin 3\alpha|+\log_{\frac{49}{17}}|\sin\alpha|$, если

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Решение. Применим формулу гармонического колебания $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ для упрощения данного в условии равенства. Получим:

$$\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{2}{7}} \quad\Leftrightarrow\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Далее, упаковав логарифмы, используем формулу синуса тройного угла, а затем подставим в полученное выражение значение $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}$:

$$\log_{\frac{49}{17}}|\sin 3\alpha|+\log_{\frac{49}{17}}|\sin\alpha|=\log_{\frac{49}{17}}|\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha|=$$
$$\log_{\frac{49}{17}}\left|(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\sin\alpha\right|=\log_{\frac{49}{17}}\left|3\sin^2\alpha-4\sin^4\alpha\right|=$$
$$=\log_{\frac{49}{17}}\left|\frac{3}{7}-\frac{4}{49}\right|=\log_{\frac{49}{17}}\frac{17}{49}=-1.$$

Задача 9. Найти сумму всех целых чисел из множества значений функции $y=\log_2(27+16\cos 3x)$.

Решение. Для нахождения множества значений исходной сложной функции y найдем множество значений внутренней функции $\varphi(x)=27+16\cos 3x$.

Итак,

$$-1\le\cos 3x\le 1 \quad\Rightarrow\quad -16\le 16\cos 3x\le 16 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 27-16\le 27+16\cos 3x\le 27+16 \quad\Leftrightarrow\quad 11\le\varphi(x)\le 43.$$

Теперь находим множество значений возрастающей функции $y=\log_2 t$, аргумент которой $t=\varphi(x)$ изменяется от 11 до 43: $\log_2 11\le\log_2 t\le\log_2 43$, и, значит, $E(y)=[\log_2 11;\ \log_2 43]$.

Чтобы отобрать целые y из $E(y)$, заметим, что

$$\log_2 8<\log_2 11<\log_2 16 \quad\Rightarrow\quad 3<\log_2 11<4;$$
$$\log_2 32<\log_2 43<\log_2 64 \quad\Rightarrow\quad 5<\log_2 43<6.$$

Таким образом, $E(y)$ содержит только два целых числа: 4 и 5. Их сумма равна 9.

Задача 10. Определить знак числа $\log_{0,1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Решение. Поскольку $\dfrac{3\pi}{8}>\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$, а функция $\operatorname{tg}x$ монотонно возрастает на промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}>\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$. А так как основание логарифма меньше 1, то $\log_{0,1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}\right)<0$.

Для сравнения логарифмов применяются различные приемы, использующие умения:

- определять знак логарифма;
- представлять числа в виде логарифмов с заданным основанием;

- выяснять, какому интервалу числовой прямой принадлежит число, записанное в виде логарифма, а затем при необходимости уточнять этот интервал, «суживая» первоначальный, и т. д.

Задача 11. Сравнить два числа:

1) $\log_{1,7}\left(0,5\left(1-\log_7 3\right)\right)$ и 0;
2) $-\log_{0,3} 0,2$ и $-\log_{0,2} 0,3$;
3) $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$;
4) $\log_2 3$ и $\log_3 5$;
5) $\log_4 60$ и $\log_3 30$;
6) $\log_n(n+1)$ и $\log_{n+1}(n+2)$, где $n\in\mathbf{N}$, $n\neq 1$;
7) $\log_3 162-\log_{2012} 2012$ и $\log_4 80+\log_{2011} 2011$.

Решение. Условимся, что знак $\vee$ будет заменять один из знаков >, <.

1. Запишем $0=\log_{1,7} 1$. Рассмотрим

$$\log_{1,7}\left(0,5\left(1-\log_7 3\right)\right)\vee\log_{1,7} 1.$$

Поскольку основание логарифмов больше 1, то значения логарифмов связаны тем же неравенством, что и их аргументы, т. е.

$$\log_{1,7}\left(0,5\left(1-\log_7 3\right)\right)\vee\log_{1,7} 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0,5\left(1-\log_7 3\right)\vee 1.$$

Умножим оба числа, расположенные слева и справа от знака сравнения, на 2, при этом неравенство, связывающее первоначальные числа, останется верным. Получим: $1-\log_7 3\vee 2$. Отнимем по 1 от обеих частей: $-\log_7 3\vee 1$.

Очевидно, что число слева отрицательное (так как $7>1$ и $3>1$, значит, $\log_7 3>0$, $-\log_7 3<0$). Таким образом, установлено, что $-\log_7 3<1$. Следовательно, символ $\vee$ означает знак <, поэтому $\log_{1,7}\left(0,5\left(1-\log_7 3\right)\right)<0$.

2. $-\log_{0,3} 0,2\vee-\log_{0,2} 0,3$.

Умножим обе части этого неравенства -1, его знак при этом изменится на противоположный, что будет отражено в перемене символа $\vee$ на символ $\wedge$.

Итак,

$$-\log_{0,3} 0,2 \vee -\log_{0,2} 0,3 \Leftrightarrow \log_{0,3} 0,2 \wedge \log_{0,2} 0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{0,3} 0,2 \wedge \frac{1}{\log_{0,3} 0,2}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на положительное число $\log_{0,3} 0,2$, получим равносильное неравенство $\log^2_{0,3} 0,2 \wedge 1$.

Поскольку $1 = \log_{0,3} 0,3$ и функция $\log_{0,3} x$ монотонно убывает, то из условия $0,2 < 0,3$ следует, что $\log_{0,3} 0,2 > \log_{0,3} 0,3 = 1$. Тогда $\log^2{}_{0,3} 0,2 > 1$ и символ $\wedge$ означает знак >, поэтому $-\log_{0,3} 0,2 < -\log_{0,2} 0,3$.

3. $\log_5 3 \vee \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_5 3 \vee \log_5 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 3 \vee 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 27 \vee 0,25.$

Итак, символ $\vee$ означает в данном примере знак >, т. е. $\log_5 3 > \frac{2}{3}$.

4. $\log_2 3 \vee \log_3 5.$

Обозначим $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$. Очевидно, что $2 < 3 < 2^2$, а значит, $\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 2^2 \Leftrightarrow 1 < a < 2$, т. е. $a \in (1;\, 2)$. Аналогично

$$3 < 5 < 3^2 \Rightarrow \log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 3^2 \Rightarrow 1 < b < 2 \Rightarrow b \in (1;\, 2).$$

Получаем, что и число $b \in (1;\, 2)$.

Постараемся теперь сузить промежутки, содержащие в себе числа a и b. Очевидно, что $2^3 < 3^2 < 2^4$, а значит,

$$\log_2 2^3 < \log_2 3^2 < \log_2 2^4 \Leftrightarrow 3 < 2a < 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < a < 2 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{3}{2};\, 2\right).$$

Аналогично $3^2 < 5^2 < 3^3$, а значит,

$$\log_3 3^2 < \log_3 5^2 < \log_3 3^3 \Leftrightarrow 2 < 2b < 3 \Leftrightarrow 1 < b < \frac{3}{2} \Leftrightarrow b \in \left(1;\, \frac{3}{2}\right).$$

Так как $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$, в то время как $b \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$, то $a > b$, т. е. $\log_2 3 > \log_3 5$.

5. $\log_4 60 \vee \log_3 30$.

$$\log_4 60 = \log_4 (4 \cdot 15) = 1 + \log_4 15;$$
$$\log_3 30 = \log_3 (3 \cdot 10) = 1 + \log_3 10.$$

Остается сравнить числа $\log_4 15$ и $\log_3 10$. Обозначим их через a и b соответственно. Так как $4^1 < 15 < 4^2$, то

$\log_4 4^1 < \log_4 15 < \log_4 4^2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \log_4 15 < 2 \quad \Rightarrow \quad a \in (1;2)$.

Так как $3^2 < 10 < 3^3$, то

$\log_3 3^2 < \log_3 10 < \log_3 3^3 \quad \Rightarrow \quad 2 < \log_3 10 < 3 \quad \Rightarrow \quad b \in (2;3)$.

Таким образом $b > a$.

6. Напишем цепочку очевидных неравенств (учитывая, что $n \geq 2$):

$$\log_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Так как $\quad \log_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_n \frac{n+1}{n} = \log_n (n+1) - 1,$

$$\log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1} = \log_{n+1} (n+2) - 1,$$

то неравенство $\log_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ равносильно неравенству $\log_n (n+1) - 1 > \log_{n+1} (n+2) - 1$, а значит, $\log_n (n+1) > \log_{n+1} (n+2)$.

7. Так как $\quad \log_3 162 = \log_3 (3^4 \cdot 2) = 4 + \log_3 2,$

$\log_4 80 = \log_4 (4^2 \cdot 5) = 2 + \log_4 5$, $\log_{2011} 2011 = \log_{2012} 2012 = 1$,

то

$$\log_3 162 - \log_{2012} 2012 \vee \log_4 80 + \log_{2011} 2011 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + \log_3 2 - 1 \vee 2 + \log_4 5 + 1 \Leftrightarrow \log_3 2 \vee \log_4 5.$$

Так как $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$, но $\log_4 5 > \log_4 4 = 1$, то $\log_3 2 < \log_4 5$ и, следовательно, символ $\vee$ означает в этой задаче знак <, т. е. первое число меньше второго.

§ 4.2. Показательные уравнения и неравенства

Вспомним стандартные схемы решения показательно-степенных уравнений и неравенств.

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 0,\ a(x) \neq 1; \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) = 1; \\ \text{область определения функции } f(x); \\ \text{область определения функции } g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a(x)^{f(x)} < a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0; \\ \big(a(x) - 1\big)\big(f(x) - g(x)\big) < 0. \end{cases}$$

$$a(x)^{f(x)} \leq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0; \\ \big(a(x) - 1\big)\big(f(x) - g(x)\big) \leq 0. \end{cases}$$

Задача 1. Решить уравнение $|x-3|^{\sqrt{x^2-2x}} = |x-3|^{\sqrt{3}}$.

Решение. Поскольку основанием левой и правой части является не число, а функция $a(x) = |x-3|$, данное уравнение относится к показательно-степенным уравнениям, которые решаются по стандартной схеме. Применим эту схему для решения данного уравнения.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-3|>0;\\ \sqrt{x^2-2x}=\sqrt{3};\end{cases}\\ \begin{cases}|x-3|=1;\\ x^2-2x\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ne 3;\\ x^2-2x=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-3=1;\\ x-3=-1;\end{array}\right.\\ x(x-2)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ne 3;\\ \left[\begin{array}{l}x=3;\\ x=-1;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4;\\ x=2;\end{array}\right.\\ x\in(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x\in\{-1;\ 2;\ 4\}.$$

Задача 2. Решить неравенство $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}\le(2012)^0$.

Решение. Это неравенство, так же как и предыдущее уравнение, относится к разряду показательно-степенных неравенств. Применим к нему стандартную схему:

$$\begin{cases}3-x>0;\\ (3-x-1)\left(\dfrac{3x-5}{3-x}\right)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3;\\ (2-x)\left(\dfrac{3x-5}{3-x}\right)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<3;\\ \dfrac{(x-2)(3x-5)}{x-3}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow\quad x\in\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right]\cup[2;\ 3)\ \text{(рис. 4.1).}$$

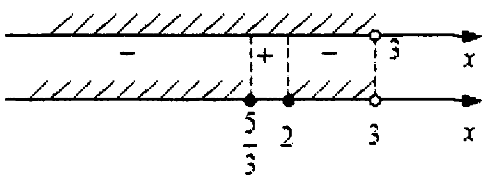


Рис. 4.1

Несколько проще стандартные схемы решения показательных уравнений и неравенств, в которых основание не является функцией от переменной. Такие схемы изучаются на базовом уровне. Здесь решим одну задачу на эту тему.

Задача 3. Решить двойное неравенство $-5<4^{x^2-6x+9}-6\le 10$ и найти сумму его целых решений.

Решение. Прибавив 6 ко всем частям неравенства, получим

$$1<4^{x^2-6x+9}\le 16 \Leftrightarrow 4^0<4^{(x-3)^2}\le 4^2 \Leftrightarrow 0<(x-3)^2\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2>0;\\(x-3)^2\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 3;\\|x-3|\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 3;\\-\sqrt{2}\le x-3\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 3;\\3-\sqrt{2}\le x\le 3+\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[3-\sqrt{2};\,3\right)\cup\left(3;\,3+\sqrt{2}\right].$$

Целыми решениями из этих промежутков являются числа 2 и 4, их сумма равна 6.

При преобразовании показательного уравнения или неравенства к виду $a^{b(x)} * a^{c(x)}$ помимо стандартных технических приемов используется уже известный вам *метод замены*. Особого внимания здесь заслуживает умение видеть хитро записанные взаимно обратные выражения, которые могут либо «маскироваться» под сопряженные иррациональности вида $\left(a+\sqrt{b}\right)^{f(x)}$ и $\left(a-\sqrt{b}\right)^{f(x)}$, в которых $a^2-b=1$, либо «прятаться» в выражениях вида $a^{f(x)+c}=a^{f(x)}\cdot a^c$ и $a^{b-f(x)}=a^{-f(x)}\cdot a^b$ (здесь $a^{f(x)}$ и $a^{-f(x)}$ — взаимно обратные выражения).

Рассмотрим несколько подобных задач.

Задача 4. Решить уравнение $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x+2}=10$.

Решение. Заметив, что сопряженные выражения $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ являются, к тому же, взаимно обратными (так как $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=1$), обозначим, например, $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}=t$, где $t>0$.

Тогда

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x+2}=\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}\right)^{x+2}=\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}\right)^{-1}=t^{-1},$$

и уравнение преобразуется к рациональному уравнению следующего вида:

$$t+\frac{1}{t}=10 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-10t+1=0; \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=5\pm\sqrt{24}; \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad t=5\pm\sqrt{24}=5\pm 2\sqrt{6}.$$

Возвращаясь к переменной x, получим совокупность из двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}=5+2\sqrt{6}; \\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}=5-2\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2; \\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2. \end{array}\right.$$

Решая первое уравнение совокупности, получаем $x+2=2 \Leftrightarrow x=0$.

Учитывая, что $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$, второе уравнение можно записать в виде $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x+2}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-2}$, откуда $x+2=-2 \Leftrightarrow x=-4$. В итоге: $x\in\{-4;\ 0\}$.

Задача 5. Найти наименьшее целое решение неравенства $5^{\frac{x-3}{4}}-5^{\frac{11-x}{4}}-24>0$.

Решение. Приведем это неравенство к квадратному неравенству наиболее простого вида, заметив в нем взаимно обратные выражения.

Так как $$\frac{11-x}{4}=\frac{8+3-x}{4}=2+\frac{3-x}{4}=2-\frac{x-3}{4},$$

то $$5^{\frac{11-x}{4}}=5^{2-\frac{x-3}{4}}=25\cdot 5^{-\frac{x-3}{4}}.$$

Сделаем замену $t=5^{\frac{x-3}{4}}$, тогда неравенство преобразуется к виду:

$$\begin{cases} t-25\cdot\dfrac{1}{t}-24>0; \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-24t-25>0; \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-25)(t+1)>0; \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t>25 \text{ (рис. 4.2).}$$

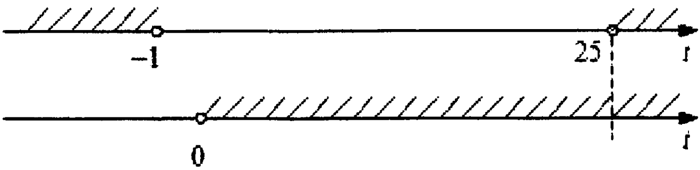


Рис. 4.2

Возвращаясь к переменной x, получаем неравенство $5^{\frac{x-3}{4}}>25$, решая которое, находим: $\dfrac{x-3}{4}>2 \Leftrightarrow x>11 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(11;+\infty)$. Наименьшим целым решением неравенства является число $x=12$.

Задача 6. Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{7}{x+2}}+\left(\frac{1}{14}\right)^{\frac{7}{x+2}}\le 2\cdot\left(\frac{1}{28}\right)^{\frac{7}{x+2}}.$$

Решение. Упростим данное неравенство, умножив его на положительное выражение $28^{\frac{7}{x+2}}$. В результате этой операции неравенство примет вид:

$$\left(\frac{28}{7}\right)^{\frac{7}{x+2}}+\left(\frac{28}{14}\right)^{\frac{7}{x+2}}\le 2\cdot\left(\frac{28}{28}\right)^{\frac{7}{x+2}} \Leftrightarrow 4^{\frac{7}{x+2}}+2^{\frac{7}{x+2}}\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\frac{7}{x+2}}+2^{\frac{7}{x+2}}-2\le 0.$$

Теперь очевидна замена переменной $t=2^{\frac{7}{x+2}}$ ($t>0$), приводящая неравенство к системе:

$$\begin{cases} t^2+t-2\le 0; \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t+2)\le 0; \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<t\le 1 \text{ (рис. 4.3).}$$

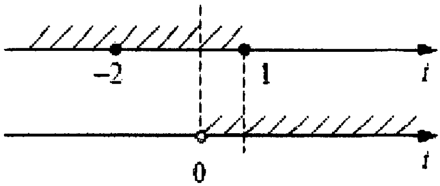


Рис. 4.3

Возвращаемся к переменной x и решаем двойное неравенство:

$$0<2^{\frac{7}{x+2}}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{7}{x+2}}>0; \\ 2^{\frac{7}{x+2}}\le 2^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,\ +\infty); \\ \dfrac{7}{x+2}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x<-2\ \Leftrightarrow\ x\in(-\infty;\ -2).$$

Наибольшее целое решение этого неравенства $x=-3$.

Показательное уравнение (неравенство) называется **однородным степени** n, если с помощью новых переменных вида $y=a^{c(x)}$ и $z=b^{c(x)}$ его можно представить в виде $P(y,\ z)*0$, где $P(y,\ z)$ — однородный многочлен степени n от двух переменных y и z, а символ $*$ означает один из знаков $=$, $>$, $<$, $\le$, $\ge$. Уравнение (неравенство) $P(y,z)*0$ можно решить делением на z^n с последующей заменой переменной $t=\dfrac{y}{z}$.

Задача 7. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный) $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$.

Решение. Заметив, что $6^x=(3\cdot 2)^x=3^x\cdot 2^x$, запишем уравнение в виде

$$3^4\cdot\left(3^x\right)^2+45\cdot 3^x\cdot 2^x-9\cdot 2^2\cdot\left(2^x\right)^2=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ 9\cdot\left(3^x\right)^2+5\cdot 3^x\cdot 2^x-4\cdot\left(2^x\right)^2=0.$$

Обозначив $3^x = y$, $2^x = z$, убеждаемся в том, что уравнение является однородным уравнением степени 2 (поскольку многочлен $P(y,z) = 9y^2 + 5yz - 4z^2$ — однородный степени 2):

$$9y^2 + 5yz - 4z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 5\left(\frac{y}{z}\right) - 4 = 0.$$

Сделав замену переменной $t = \dfrac{y}{z}$, получим:

$$9t^2 + 5t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = \frac{4}{9}; \\ &t = -1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow t = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = -2.$$

Задача 8. Найти число целых решений неравенства $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{1 + \sqrt[4]{x}} \geq 9^{\sqrt{x}}$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$9 \cdot 9^{\sqrt[4]{x}} + 8 \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9^{\sqrt{x}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \cdot 3^{2\sqrt[4]{x}} + 8 \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^{2\sqrt{x}} \geq 0,$$

из которого следует, что левая часть неравенства является однородным многочленом $9y^2 + 8yz - z^2$ степени 2 относительно переменных $y = 3^{\sqrt[4]{x}}$ и $z = 3^{\sqrt{x}}$. Преобразуем это неравенство к квадратному, разделив его на z^2. В результате получим неравенство $9t^2 + 8t - 1 \geq 0$ относительно переменной $t = \dfrac{y}{z} > 0$. Отсюда

$$\begin{cases} 9t^2 + 8t - 1 \geq 0; \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)\left(t - \dfrac{1}{9}\right) \geq 0; \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{9} \text{ (рис. 4.4).}$$

Отсюда $3^{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}} \geq 3^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[4]{x} - \sqrt{x} \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 \leq 0$.

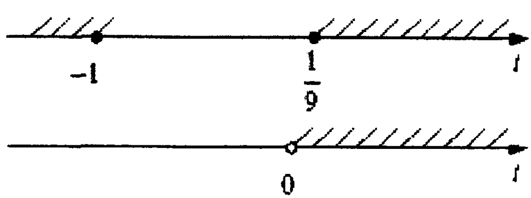


Рис. 4.4

Если обозначить $a = \sqrt[4]{x}$ ($a \ge 0$), то получим систему:

$$\begin{cases} a^2 - a - 2 \le 0; \\ a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a-2) \le 0; \\ a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le a \le 2 \text{ (рис. 4.5).}$$

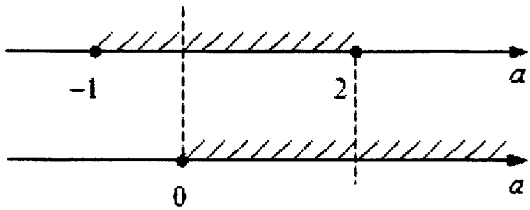


Рис. 4.5

Далее $0 \le a \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt[4]{x} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x \le 16$. Количество целых решений этого неравенства равно 17.

Важно также научиться неформально использовать области определения и изменения функций в смешанных уравнениях и неравенствах в качестве подсказок для упрощения стандартных схем решения этих неравенств.

Задача 9. Найти сумму целых решений неравенства

$$\frac{\sqrt{3-x} \cdot \left(x^2 - x - 2\right)}{2 - 5^{x-2} - 5^{2-x}} \ge 0.$$

Решение. Это смешанное неравенство можно было бы решать громоздким перебором различных вариантов. Мы же поступим здесь иначе, воспользовавшись особенностями данного неравенства.

Заметим, что $x = 3$ является решением неравенства, причем $\sqrt{3-x} > 0$ при всех $x < 3$. Записав знаменатель неравенства в виде $2 - 5^{x-2} - 5^{2-x} = 2 - \left(5^{x-2} + \dfrac{1}{5^{x-2}}\right)$ и воспользовавшись известным неравенством $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$ при $a > 0$, заключаем, что

$2-5^{x-2}-5^{2-x}<0$ при всех $x\neq 2$ и $2-5^{x-2}-5^{2-x}=0$ при $x=2$ (случай $x=2$ исключаем из рассмотрения, поскольку знаменатель $2-5^{x-2}-5^{2-x}\neq 0$).

Из сказанного выше следует, что исходное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x=3; \\ \begin{cases} x<3; \\ x\neq 2; \\ x^2-x-2\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; \\ \begin{cases} x<3; \\ -1\le x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-1;\,2)\cup\{3\}.$$

Сумма целых решений этого неравенства равна $-1+0+1+3=3$.

Особую группу задач составляют показательные уравнения и неравенства, решения которых основываются на свойствах содержащихся в них функций. К числу таких свойств относятся: знакопостоянство, монотонность, четность, ограниченность множества значений. В подобных задачах весьма эффективно используется и неравенство $\left|a+\frac{1}{a}\right|\ge 2$, которое уже применялось выше.

Задача 10. Решить уравнение $3^{x-2}=\frac{9}{x}$.

Решение. Несмотря на свой лаконичный вид, уравнение не относится ни к одному из тех типов показательных уравнений, которые мы уже обсуждали. Заметим, что поскольку основание 3 больше 1, то показательная функция $y_1=3^{x-2}$ возрастает на всем множестве $\mathbf{R}$, тогда как правая часть уравнения — функция $y_2=\frac{9}{x}$ — убывает на множествах $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$. Таким образом, в силу теоремы 2.1 из *главы 2* данное уравнение либо имеет единственный корень, либо вообще корней не имеет. Попробуем подобрать целый положительный корень этого уравнения среди делителей числа 9: $x=3$ дает верное равенство $3^{3-2}=\frac{9}{3}$. Итак, $x=3$ — единственный корень этого уравнения.

Задача 11. Решить уравнение $3^x+4^x=5^x$.

Решение. Вспоминая теорему Пифагора для «египетского» треугольника с длинами сторон 3, 4 и 5, сразу же угадывается корень данного уравнения: $x=2$. Однако теорема о монотонности не подтверждает единственности этого корня, поскольку функция $y_1=3^x+4^x$ возрастает на множестве $\mathbf{R}$ так же, как и правая часть уравнения $y_2=5^x$. Для доказательства отсутствия корней поступим так: разделим все члены уравнения на 5^x: $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$. Полученное уравнение равносильно исходному, однако теперь его левая часть является монотонно убывающей функцией на множестве $\mathbf{R}$ (как сумма двух монотонно убывающих функций $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^x$), а правая часть — постоянная функция. Теперь по теореме 2.1 можно заключить, что исходное уравнение имеет единственный корень $x=2$.

Задача 12. Решить уравнение $100^x+(x-1)\cdot 10^x+10x-110=0$.

Решение. Записав уравнение в виде $100^x+(x-1)\cdot 10^x+10x=110$, легко увидеть, что левая часть является суммой функций, монотонно возрастающих на множестве $\mathbf{R}$, а значит, — тоже монотонно возрастающей на $\mathbf{R}$, тогда как его правая часть — постоянная функция. По теореме 2.1 отсюда следует, что уравнение может иметь лишь один корень.

Подбор показывает, что этим корнем является $x=1$.

Задача 13. При каких значениях x функция $y=1+\left|4^x+(x-13)\cdot 2^x+22-2x\right|$ достигает наименьшего значения?

Решение. Выражение $\left|4^x+(x-13)\cdot 2^x+22-2x\right|\geq 0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, поэтому, если найдутся такие x, для которых

$\left|4^x + (x-13)\cdot 2^x + 22 - 2x\right| = 0$, то функция y при этих x достигает наименьшего значения, равного 1.

Хотя уравнение $4^x + (x-13)\cdot 2^x + 22 - 2x = 0$ имеет очевидный корень $x = 1$, теорема 2.1 не гарантирует единственности этого корня, поскольку наше уравнение не удается записать в виде, подходящем для применения указанной теоремы.

Приводимое далее решение показывает, что в действительности уравнение имеет не один, а два корня. Чтобы их отыскать, будем рассматривать исходное уравнение как квадратное относительно переменной $t = 2^x$, $t > 0$ с коэффициентами, зависящими от x: $t^2 + (x-13)t + 22 - 2x = 0$. В нашем случае это приведенное квадратное уравнение со вторым коэффициентом $b = x - 3$ и свободным членом $c = 22 - 2x$. Дискриминант этого уравнения равен:

$$D = (x-13)^2 - 4(22-2x) = x^2 - 26x + 169 - 88 + 8x =$$
$$= x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2.$$

Корни уравнения $t = \dfrac{-(x-13) \pm (x-9)}{2} \Leftrightarrow t \in \{2; 11 - x\}$, откуда, возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = 11 - x. \end{array}\right.$$

Первое уравнение дает корень $x = 1$. Во втором уравнении функция $y_1 = 2^x$ монотонно возрастает на множестве $\mathbf{R}$, а $y_2 = 11 - x$ — монотонно убывает, поэтому подбором находим единственный корень этого уравнения $x = 3$.

Итак, уравнение имеет два корня — $x = 1$ и $x = 3$, которые являются теми значениями x, при которых данная функция $y = 1 + \left|4^x + (x-13)\cdot 2^x + 22 - 2x\right|$ принимает наименьшее значение, равное 1.

Задача 14. Решить уравнение $3^{2+\left|x-\frac{1}{4}\right|}=5+4\sin\pi x$.

Решение. По своему виду уравнение является оценочной («граничной») задачей. Для его решения оценим множество значений функции $L=3^{2+\left|x-\frac{1}{4}\right|}$ из левой части уравнения и функции $R=5+4\sin\pi x$ — из правой части.

Начнем с функции $L=3^2\cdot 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|}$, которая определена на множестве **R**. Поскольку $\left|x-\frac{1}{4}\right|\geq 0$, то

$$3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|}\geq 3^0=1 \quad\Rightarrow\quad 9\cdot 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|}\geq 9\cdot 1=9.$$

Таким образом, $L\geq 9$.

Перейдем к нахождению множества значений функции $R=5+4\sin\pi x$. Так как $-1\leq\sin\pi x\leq 1$, то $-4\leq 4\sin\pi x\leq 4$, а $1\leq 5+4\sin\pi x\leq 9$, т. е. $1\leq R\leq 9$.

Поскольку $L\geq 9$, а $R\leq 9$, то равенство $L=R$ возможно лишь при условии $L=9$ и $R=9$, т. е.

$$\begin{cases}9\cdot 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|}=9;\\ 5+4\sin\pi x=9\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|}=1;\\ \sin\pi x=1.\end{cases}$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1}{4}$, который и будет единственным решением системы в том случае, если он удовлетворяет второму уравнению. Подставляя $x=\frac{1}{4}$ во второе уравнение, получаем $\sin\frac{\pi}{4}=1$, что неверно. Таким образом, система, а вслед за ней и исходное уравнение решений не имеют.

Задача 15. Решить уравнение $5^{3x^2-2x^3}=\frac{2x^2+x+2}{x}$.

Решение. Снова перед нами поставлена типичная оценочная задача. Обозначим $L=5^{3x^2-2x^3}$ и $R=\frac{2x^2+x+2}{x}$ — левую и правую части исходного уравнения соответственно. Так как L положительна при всех x, то и R должна быть положительной, т. е. $\frac{2x^2+x+2}{x}>0$, откуда $x>0$, поскольку многочлен $2x^2+x+2$ положителен при всех x. Оценим функцию R при $x>0$.

$$R=\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{2}{x}=2x+1+\frac{2}{x}=2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1.$$

Так как $x+\frac{1}{x}\geq 2$ при $x>0$, то $2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 4$, $2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\geq 5$ при $x>0$. Итак, $R\geq 5$ при всех $x>0$, причем $R=5$ при $x=1$, поскольку $x+\frac{1}{x}=2$ только при $x=1$.

Покажем, что для $x>0$ функция $L\leq 5$. Действительно,

$$\begin{cases}5^{3x^2-2x^3}\leq 5;\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2x^3\leq 1;\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3-3x^2+1\geq 0;\\ x>0.\end{cases}$$

Найдем корни уравнения $2x^3-3x^2+1=0$. Подбором находится корень $x=1$. Делением по схеме Горнера на $x-1$ получаем квадратное уравнение $2x^2-x-1=0$, корни которого равны

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;\\ x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

В результате $2x^3-3x^2+1=2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$, откуда

$$\begin{cases}2x^3-3x^2+1\geq 0;\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\geq 0;\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;+\infty)\ \text{(рис. 4.6)}.$$

Это означает, что $L=5^{3x^2-2x^3}\leq 5$ для всех $x>0$.

Итак, $L\leq 5$, $R\geq 5$. Поэтому $L=R$ возможно только в случае

$$\begin{cases}L=5;\\ R=5.\end{cases}$$

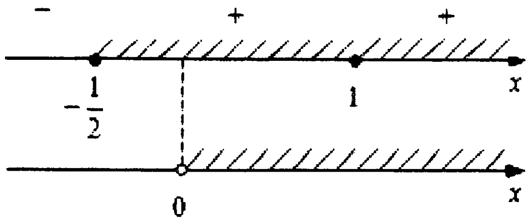


Рис. 4.6

Вспомним, что $R=5$ только при $x=1$. Остается проверить, что и $L=5$ при $x=1$: $\frac{2\cdot 1+1+2}{1}=5$. В итоге $x=1$ — корень данного уравнения.

Заметим в заключение, что хотя корень $x=1$ можно было бы сразу найти подбором, нет никакой гарантии, что уравнение не имеет других корней.

Задача 16. Найти количество целых решений неравенства:

$$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}+\cos^2\frac{\pi x}{4}\right)^{-1}<x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}+\frac{8^{-\sqrt{81-x^2}}}{x}.$$

Решение. Вид этого неравенства, совмещающего в себе показательные, тригонометрические и иррациональные выражения, сразу говорит об «оценочном» характере задачи.

Запишем это неравенство по-другому, учитывая, что $1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{4}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}$:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}+\cos^2\frac{\pi x}{4}\right)^{-1}<x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}+\frac{1}{x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}}.$$

Такая форма записи позволяет увидеть две суммы взаимно обратных выражений: положительных в своей области определения $\cos^2\frac{\pi x}{4}$ и $\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}$ в левой части неравенства; произвольных по знаку выражений $x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}$ и $\frac{1}{x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}}$ в правой части неравенства. Так как сумма положительных взаимно обратных величин не меньше 2, то

$$L=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}+\cos^2\frac{\pi x}{4}\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}+\cos^2\frac{\pi x}{4}\right)^{-1}\leq\frac{1}{2}$$

в области определения этих величин, т. е. при условии

$$\cos^2\frac{\pi x}{4}\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\pi x}{4}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 2+4n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Обратимся к правой части $R=x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}+\frac{1}{x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}}$. Если $x<0$, то $x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}<0$, а поскольку сумма двух взаимно обратных отрицательных величин не превосходит –2, то при $x<0$ исходное неравенство $L<R$ с положительной левой частью L неверно.

Если же $x>0$, то $x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}>0$ в своей области определения, а тогда $x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}+\frac{1}{x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}}\geq 2$ и правая часть неравенства с очевидностью больше левой.

В итоге получаем, что исходное неравенство выполняется при следующих условиях:

$$\begin{cases} x\neq 2+4n,\ n\in\mathbf{Z}; \\ x>0; \\ 81-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2+4n,\ n\in\mathbf{Z}; \\ x>0; \\ -9\leq x\leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;\,9]; \\ x\neq 2+4n,\ n\in\{0;\,1\}. \end{cases}$$

Целыми решениями этого неравенства являются семь натуральных чисел $\{1,\,3,\,4,\,5,\,7,\,8,\,9\}$.

Задача 17. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a; \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Воспользуемся четностью функций $2^{|x|}$, $5|x|$, $5x^2$: если предположить, что пара $(x_0;\ y_0)$ является решением исходной системы, то пара $(-x_0;\ y_0)$ также будет ее решением *(это задача с параметром на симметрию относительно знака; алгоритм решения таких задач подробно описан в § 2.3)*, поскольку

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|-x_0|}+5|-x_0|+4=3y_0+5(-x_0)^2+3a; \\ (-x_0)^2+y_0^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 2^{|x_0|}+5|x_0|+4=3y_0+5x_0^2+3a; \\ x_0^2+y_0^2=1. \end{cases}$$

Следовательно, исходная система может иметь единственное решение только при $x_0=-x_0$, т. е. при $x_0=0$. Подставим это значение в систему:

$$\begin{cases} 3\cdot 2^0+5\cdot 0+4=3y+5\cdot 0+3a; \\ 0^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7=3y+3a; \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7-3y}{3}; \\ y=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{4}{3}; \\ a=\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$$

Итак, «кандидатами» на ответ могут быть только числа $\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{10}{3}$. Проверим количество решений системы при каждом из этих значений a.

1. $a=\dfrac{10}{3} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2+6; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Непосредственно проверяется, что пары $(0;\ -1)$ и $(1;\ 0)$ (возможно, не только они) являются решениями данной системы при $a=\dfrac{10}{3}$.

2. $a=\dfrac{4}{3}\Rightarrow\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2;\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y=3\cdot 2^{|x|}+5\left(|x|-|x|^2\right);\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

Из второго уравнения следует, что $0\le|x|\le 1$, $|y|\le 1$.

Поэтому, с одной стороны, $-3\le 3y\le 3$, а с другой стороны, $2^{|x|}\ge 1$, $|x|-|x|^2\ge 0\Rightarrow 3\cdot 2^{|x|}+5\left(|x|-|x|^2\right)\ge 3$. Следовательно, равенство $3y=3\cdot 2^{|x|}+5\left(|x|-|x|^2\right)$ возможно только в случае

$$\begin{cases}3y=3;\\ 3\cdot 2^{|x|}+5\left(|x|-|x|^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1;\\ x=0.\end{cases}$$

Таким образом, пара $(0;1)$ — единственное решение при $a=\dfrac{4}{3}$.

Итоговый ответ: $a=\dfrac{4}{3}$.

Задача 18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^x+3x=4^y+6y;\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$$

Решение. С точки зрения традиционных методов решения система выглядит абсолютно бесперспективной. Однако первое уравнение вызывает ощущение какой-то «похожести» левой и правой его частей. Воспользуемся этим и запишем его в виде $2^x+3x=2^{2y}+3\cdot(2y)$.

Введем в рассмотрение функцию $f(t)=2^t+3t$. Она определена и монотонно возрастает на множестве всех действительных чисел **R**. Тогда первое уравнение системы можно представить в виде $f(x)=f(2y)$, откуда в силу возрастания f следует $x=2y$. Система принимает вид:

$$\begin{cases}x=2y;\\ x^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y;\\ 4y^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y;\\ \left[\begin{array}{l}y=1;\\ y=-1.\end{array}\right.\end{cases}$$

Таким образом, исходная система имеет два решения: $(2; 1)$ и $(-2; -1)$.

§ 4.3. Логарифмические уравнения и неравенства

Пусть символ $*$ означает один из следующих знаков: $=, >, <, \leq, \geq$. Решение практически любого логарифмического уравнения или неравенства (исключение составляют граничные задачи) состоит из трех этапов:

1. Преобразование к виду $\log_{c(x)} A(x) * B(x)$.

2. «Предпотенцирование»: превращение $B(x)$ в логарифмическое выражение $\log_{c(x)} c(x)^{B(x)}$.

3. «Потенцирование»: переход от уравнения (неравенства) $\log_{c(x)} A(x) * \log_{c(x)} c(x)^{B(x)}$ к равносильному уравнению (неравенству) $A(x) * c(x)^{B(x)}$; при этом в случае $0 < c(x) < 1$ знак $>, <, \leq$ или $\geq$ меняется на противоположный.

Последние два этапа реализуются без особых проблем. В том случае, если вам удалось получить уравнение (неравенство) вида $\log_{c(x)} A(x) * \log_{c(x)} D(x)$, следующим шагом должно быть потенцирование, а не промежуточное преобразование к виду $\left(\log_{c(x)} A(x) - \log_{c(x)} D(x)\right) * 0$. Главное при этом — не забыть позаботиться о сохранении равносильности, записав в соответствующую систему неравенство $A(x) > 0$ или $D(x) > 0$.

Для реализации первого этапа используются также уже известный вам метод замены переменной и логарифмирование.

Логарифмирование заключается в переходе от уравнения (неравенства) $A(x) * B(x)$ к равносильному уравнению (неравенству) $\log_c A(x) * \log_c B(x)$ (при этом в случае $0 < c < 1$ знак $>, <, \leq$ или $\geq$ меняется на противоположный). К логарифмированию по основанию c следует прибегать исключительно в тех случаях, когда левая или правая часть уравнения (неравенства) содержит логарифмы по основанию c на «втором этаже» (т. е. имеет вид $A(x)^{f(\log_c B(x))}$), а само уравнение (неравенство) не сводится к показательному.

Задача 1. Решить неравенство $\log_{x-1}(2x) \ge 1$.

Решение. Осуществим предпотенцирование исходного неравенства: $\log_{x-1}(2x) \ge \log_{x-1}(x-1)$.

После потенцирования получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1; \\ 2x \ge x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-1<1; \\ 2x \le x-1; \\ 2x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2; \\ x \ge -1; \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2; \\ x \le -1; \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2; \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (2;\, +\infty).$$

Задача 2. Найти целые корни уравнения

$$\log_3\left(\sqrt{x} + \left|\sqrt{x}-1\right|\right) = \log_9\left(4\sqrt{x} - 3 + 4\left|\sqrt{x}-1\right|\right).$$

Решение. Очевидно, что $x \ge 0$, причем $x = 0$ — корень уравнения. А поскольку условием задачи является поиск только целых корней уравнения, то можно считать $x \ge 1$, если не забыть включить в ответ $x = 0$. Но тогда модуль раскрывается так: $\left|\sqrt{x}-1\right| = \sqrt{x}-1$, поскольку $\sqrt{x} \ge 1$ при $x \ge 1$.

Далее:

$$\begin{cases} \log_3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}-1\right) = \log_9\left(4\sqrt{x}-3+4\sqrt{x}-4\right); \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(2\sqrt{x}-1\right) = \dfrac{1}{2}\log_3\left(8\sqrt{x}-7\right); \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(2\sqrt{x}-1\right)=\log_3\sqrt{8\sqrt{x}-7}; \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}-1=\sqrt{8\sqrt{x}-7}; \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4\sqrt{x}+1=8\sqrt{x}-7; \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3\sqrt{x}+2=0; \\ x\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=2; \\ \sqrt{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; \\ x=1. \end{array}\right.$$

Итак, целыми корнями уравнения являются числа $\{0;\,1;\,4\}$.

Задача 3. Решить уравнение $5^{\sqrt{\log_5 3}}=9^{\sqrt{\log_9 15-\log_{81}\left(x^2-4x\right)}}$.

Решение. В соответствии со свойствами логарифмов $5^{\sqrt{\log_5 3}}=3^{\sqrt{\log_3 5}}$ и исходное уравнение преобразуется в показательное:

$$3^{\sqrt{\log_3 5}}=3^{2\sqrt{\log_9 15-\log_{81}(x^2-4x)}} \Leftrightarrow \sqrt{\log_3 5}=2\sqrt{\log_9 15-\log_{81}\left(x^2-4x\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 5=4\left(\frac{1}{2}\log_3 15-\frac{1}{4}\log_3\left(x^2-4x\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 5=2\log_3 15-\log_3\left(x^2-4x\right) \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-4x\right)=\log_3\frac{225}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x=45 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9; \\ x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-5;\,9\}.$$

Задача 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\log_5(x+y)=x-y; \\ (x+y)3^{y-x}=\dfrac{5}{27}. \end{cases}$$

Решение. Запишем эту систему короче, сделав подходящую замену переменных: $t=x+y,\ z=x-y$. В результате система принимает вид:

$$\begin{cases} 3\log_5 t=z; \\ t\cdot 3^{-z}=\dfrac{5}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 t^3=\log_5 5^z; \\ \left(t\cdot 3^{-z}\right)^3=5^3\cdot 27^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3=5^z; \\ t^3\cdot 27^{-z}=5^3\cdot 27^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^3 = 5^z; \\ 5^z \cdot 27^{-z} = 5^3 \cdot 27^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 5^z; \\ 5^{z-3} = 27^{z-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 5^3; \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5; \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5; \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4; \\ y = 1. \end{cases}$$

Задача 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8y\log_y x + (y - 4x)\log_x y = 16x + 2y; \\ 16x\log_y x + (y - 7x)\log_x y = 8x. \end{cases}$$

Решение. Домножим первое уравнение на $2x$ и второе уравнение на y, затем вычтем одно из другого. Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x > 0,\ \ y > 0; \\ \log_x y \cdot \left(y^2 - 9xy + 8x^2\right) = 4xy - 32x^2; \\ 8y \cdot \log_y x + (y - 4x)\log_x y = 16x + 2y. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение этой системы:

$$\log_x y \cdot (y - 8x) \cdot (y - x) = 4x(y - 8x) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (y - 8x) \cdot ((y - x)\log_x y - 4x) = 0.$$

Рассмотрим два случая.

1. $y = 8x$. Тогда

$$64x \cdot \log_{8x} x + 4x \cdot \log_x (8x) = 32x \ \Rightarrow \ \frac{16}{\log_x 8x} + \log_x (8x) = 8 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log_x (8x) = 4 \ \Rightarrow \ x = 2,\ y = 16.$$

2. $\log_x y = \dfrac{4x}{y - x}$. Тогда

$$8y \cdot \log_y x + \frac{4x(y - 4x)}{y - x} = 16x + 2y \ \Rightarrow \ \log_y x = \frac{y + 5x}{4(y - x)}.$$

Отсюда

$$1 = \log_x y \cdot \log_y x = \frac{y + 5x}{4(y - x)} \cdot \frac{4x}{y - x} \Rightarrow y^2 - 3xy - 4x^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4x; \\ y = -x. \end{array}\right.$$

С учетом положительности x и y, получаем:

$$\begin{cases} y = 4x; \\ \log_x y = \dfrac{4x}{y-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x; \\ \log_x (4x) = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 256; \\ x = 64. \end{cases}$$

Задача 6. Найти сумму целых решений неравенства

$$\log_2^4 x - \log_{0,5}^2 \frac{x^3}{8} + 9\log_2 \frac{32}{x^2} < 4\log_{0,5}^2 x.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству $\log_2^4 x - (-3\log_2 x + 3)^2 + 9(5 - 2\log_2 x) - 4\log_2^2 x < 0$. Сделаем в этом неравенстве замену переменной $t = \log_2 x$, тогда оно примет вид:

$$t^4 - 9t^2 + 18t - 9 + 45 - 18t - 4t^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^4 - 13t^2 + 36 < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 4 < t^2 < 9 \ \Leftrightarrow \ 2 < |t| < 3 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < t < -2; \\ 2 < t < 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < \log_2 x < -2; \\ 2 < \log_2 x < 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \log_2 2^{-3} < \log_2 x < \log_2 2^{-2}; \\ \log_2 2^2 < \log_2 x < \log_2 2^3 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{4}; \\ 4 < x < 8. \end{array} \right.$$

К целым решениям неравенства относятся числа $\{5; 6; 7\}$, сумма которых равна 18.

Задача 7. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x \left(5\sqrt{5}\right) + \log_{\sqrt{5}} \left(5\sqrt{5}\right)} = -6.$$

Решение. Перейдем в $\log_x\left(5\sqrt{5}\right)$ к основанию $\sqrt{5}$ и учтем, что $\log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt{5}\right) = \log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}\right)^3 = 3$. Тогда исходное уравнение преобразуется в равносильное ему уравнение

$$\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\frac{\log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt{5}\right)}{\log_{\sqrt{5}} x} + 3} = -6 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\frac{3}{\log_{\sqrt{5}} x} + 3} = -6.$$

В последнем уравнении сделаем замену переменной $t = \log_{\sqrt{5}} x$:

$$t \cdot \sqrt{\frac{3}{t} + 3} = -6 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0; \\ t^2\left(\frac{3}{t} + 3\right) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0; \\ t^2 + t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 0; \\ \left[\begin{array}{l} t = -4; \\ t = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = -4 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x = -4 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\sqrt{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{25}.$$

Задача 8. Решить неравенство $x^{\frac{3+\log_{\frac{1}{2}} x}{2}} < \frac{1}{4}x^2$.

Решение. Так как исходное неравенство содержит $\log_{\frac{1}{2}} x$ «на втором этаже», то его надо прологарифмировать по основанию $\frac{1}{2}$. (Не забудьте об изменении знака неравенства на противоположный!)

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3+\log_{\frac{1}{2}} x}{2}}\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2\right) \Leftrightarrow \left(3 + \log_{\frac{1}{2}} x\right)\log_{\frac{1}{2}} x > 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x.$$

Сделаем теперь замену переменной $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ и решим полученное рациональное неравенство:

$$(3+t)t > 2 + 2t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t+2) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -2; \\ t > 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x < -2; \\ \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 4; \\ \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4; \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty).$$

Задача 9. Решить уравнение $3+\left|2+\log_{\frac{1}{5}} x\right| = \left|1+\log_5 x\right|$.

Решение. Сделаем замену переменной $t=\log_5 x$ и решим методом интервалов полученное уравнение с модулями

$$3+|2-t|=|1+t| \quad \Leftrightarrow \quad 3+|t-2|=|t+1| \text{ (рис. 4.7).}$$

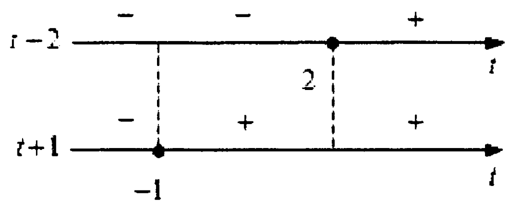


Рис. 4.7

1. $\begin{cases} t\le -1; \\ 3-(t-2)=-(t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le -1; \\ 5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow t\in\varnothing.$

2. $\begin{cases} -1\le t\le 2; \\ 3-(t-2)=t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le t\le 2; \\ 2t=4 \end{cases} \Leftrightarrow t=2.$

3. $\begin{cases} t\ge 2; \\ 3+t-2=t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 2; \\ 1=1 \end{cases} \Leftrightarrow t\ge 2.$

Итак, $\log_5 x\ge 2 \Leftrightarrow \log_5 x\ge \log_5 5^2 \Leftrightarrow x\ge 25$.

При использовании основных формул преобразования логарифмических выражений, присутствующих в уравнениях и неравенствах, необходимо учитывать различие областей определения левой и правой частей некоторых из этих формул. Некорректное применение таких формул может привести к потере корней либо к появлению посторонних корней. Чтобы подобное не произошло, следует использовать равносильные соотношения.

В частности, при использовании основного логарифмического тождества $a^{\log_a f(x)}=f(x)$ к решаемому уравнению (неравенству) следует добавить неравенство $f(x)>0$.

Задача 10. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\log_5 \log_{\frac{1}{4}} x}{\log_{\frac{1}{25}} 3}} \ge \log^2_{\frac{1}{4}} 5$.

Решение. Поскольку

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\log_5 \log_{\frac{1}{4}} x}{\log_{\frac{1}{25}} 3}} = 3^{-\log_5 \log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_3 5^{-2}} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{2\log_5 \log_{\frac{1}{4}} x} = 5^{2\log_5 \log_{\frac{1}{4}} x},$$

то исходное неравенство равносильно следующему:

$$5^{2\log_5 \log_{\frac{1}{4}} x} \ge \log^2_{\frac{1}{4}} 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(5^{\log_5 \log_{\frac{1}{4}} x}\right)^2 \ge \log^2_{\frac{1}{4}} 5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log^2_{\frac{1}{4}} x \ge \log^2_{\frac{1}{4}} 5; \\ \log_{\frac{1}{4}} x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left|\log_{\frac{1}{4}} x\right| \ge \left|\log_{\frac{1}{4}} 5\right|; \\ \log_{\frac{1}{4}} x > 0. \end{cases}$$

Так как $\log_{\frac{1}{4}} 5 < 0$, $\log_{\frac{1}{4}} x > 0$, то $\left|\log_{\frac{1}{4}} 5\right| = -\log_{\frac{1}{4}} 5 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$, $\left|\log_{\frac{1}{4}} x\right| = \log_{\frac{1}{4}} x$. Поэтому последняя система неравенств равносильна неравенству $\log_{\frac{1}{4}} x \ge \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$, откуда

$$\begin{cases} x \le \frac{1}{5}; \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(0; \frac{1}{5}\right].$$

При использовании формул «распаковки», преобразующих логарифм произведения (частного) в сумму (разность) логарифмов, к решаемому уравнению (неравенству) следует добавить неравенство $f(x)g(x) > 0$, не забыв взять по модулю каждое из подлогарифмических выражений в «распакованных» логарифмах. Более конкретно: если обозначить заменяемый «фрагмент» буквой u, то предыдущее рассуждение можно записать в виде следующих равносильных соотношений:

$$u = \log_a\left(f(x)g(x)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|; \\ f(x)g(x) > 0; \end{cases}$$

$$u = \log_a \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|; \\ f(x)g(x) > 0. \end{cases}$$

При этом полезно помнить, что формулы распаковки сохраняют равносильность, если хотя бы одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ заведомо является неотрицательной при всех допустимых значениях аргумента x. В подобных случаях модули и неравенство $f(x)g(x) > 0$ будут излишними и их можно опускать.

Задача 11. Решить уравнение $\log_4\left(x(x-3)\right) = \log_4 \frac{x-3}{x} + 1$.

Решение.

$$\log_4\left(x(x-3)\right) = \log_4 \frac{x-3}{x} + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_4|x| + \log_4|x-3| = \log_4|x-3| - \log_4|x| + 1; \\ x(x-3) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_4|x| = \frac{1}{2}; \\ x(x-3) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| = 2; \\ x(x-3) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Задача 12. Решить уравнение

$$\log_2(2-x)\log_2(4-x) = \log_2\left(x^2 - 6x + 8\right) - 1.$$

Решение. Области определения логарифмов $\log_2(2-x)$ и $\log_2(4-x)$ «диктуют» выполнимость неравенств $2 - x > 0$, $4 - x > 0$. А эти неравенства, в свою очередь, подсказывают, как надо представить квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 8$ в виде произведения линейных сомножителей и как затем разложить логарифм $\log_2\left(x^2 - 6x + 8\right)$ в сумму логарифмов:

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)=(2-x)(4-x);$$

$$\log_2\left(x^2-6x+8\right)=\log_2\left((2-x)(4-x)\right)=\log_2(2-x)+\log_2(4-x).$$

(При этом нет никакой необходимости в дополнительном неравенстве $(2-x)(4-x)>0$ и модулях!)

Итак, исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\log_2(2-x)\cdot\log_2(4-x)=\log_2(2-x)+\log_2(4-x)-1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\log_2(2-x)\cdot\log_2(4-x)-\log_2(2-x)\right)-\left(\log_2(4-x)-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_2(2-x)-1\right)\cdot\left(\log_2(4-x)-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_2(2-x)=1;\\ \log_2(4-x)=1;\end{array}\right.\\ x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}2-x=2;\\ 4-x=2;\end{array}\right.\\ x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x=2;\end{array}\right.\\ x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

При «сбрасывании» натурального четного показателя n в выражениях $\log_{f(x)}\left(g(x)\right)^n$ или $\log_{f(x)^n} g(x)$ не забудьте о модулях в следующих формулах:

$$\log_{f(x)}\left(g(x)\right)^n=n\log_{f(x)}\left|g(x)\right|,\quad \log_{f(x)^n} g(x)=\frac{1}{n}\log_{|f(x)|} g(x).$$

Однако если в выражение $n\cdot\log_{f(x)} g(x)$ требуется «забросить» четное натуральное число n под логарифм (либо в виде $\log_{f(x)}\left(g(x)\right)^n$, либо в виде $\log_{f(x)^n} g(x)$), то не забудьте к решаемому уравнению (неравенству) добавить соответственно неравенство $f(x)>0$ или $g(x)>0$.

Задача 13. Найти сумму наименьшего и наибольшего целых решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{(x+2)(x-5)}{4}\ge\log_{\frac{1}{4}}(x-5)^2.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{(x+2)(x-5)}{4} \ge \log_{\frac{1}{2}} |x-5| \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-5)}{4} \le |x-5|; \\ (x+2)(x-5) > 0. \end{cases}$$

Исходя из множества решений второго неравенства, рассмотрим два случая: $x < -2$ и $x > 5$.

1. $$\begin{cases} x < -2; \\ \dfrac{(x+2)(x-5)}{4} \le -(x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2; \\ (x+2)(x-5) + 4(x-5) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2; \\ (x-5)(x+6) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2; \\ x \in [-6;\ 5] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-6;\ -2).$$

2. $$\begin{cases} x > 5; \\ \dfrac{(x+2)(x-5)}{4} \le x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5; \\ (x+2)(x-5) - 4(x-5) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5; \\ (x-5)(x-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5; \\ x \in [2;\ 5] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Итак, решением данного неравенства является промежуток $[-6;\ -2)$, а искомой суммой — число $-9 = -6 - 3$.

При использовании формулы «переворота логарифма снизу вверх» $\dfrac{1}{\log_{g(x)} f(x)} = \log_{f(x)} g(x)$ к решаемому уравнению (неравенству) следует добавить неравенство $g(x) \ne 1$.

Задача 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{12} x \cdot \left(\dfrac{1}{\log_x 2} + \log_2 y \right) = \log_2 x; \\ \log_2 x \cdot \log_3 (x+y) = 3\log_3 x. \end{cases}$$

Решение. Перейдем во всех логарифмах к основанию 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{\log_2 12}\cdot\left(\log_2 x+\log_2 y\right)=\log_2 x; \\ \log_2 x\cdot\dfrac{\log_2\left(x+y\right)}{\log_2 3}=3\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}; \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_2 x\cdot\log_2\left(xy\right)}{\log_2 12}=\log_2 x; \\ \log_2 x\cdot\log_2\left(x+y\right)=3\log_2 x; \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Обратите внимание, что при применении здесь формулы $\log_2 x+\log_2 y=\log_2\left(xy\right)$ не требуются дополнительные неравенства $x>0$, $y>0$, поскольку в системе сохраняется $\log_2 x$, гарантирующий выполнимость неравенства $x>0$. А это неравенство, совместно с неравенством $xy>0$ (вытекающим из области определения $\log_2\left(xy\right)$), влечет выполнимость неравенства $y>0$.

Эти рассуждения наглядно объясняют тот общий факт, что при выполнении формул «упаковки»

$$\log_a f\left(x\right)+\log_a g\left(x\right)=\log_a\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right);$$

$$\log_a f\left(x\right)-\log_a g\left(x\right)=\log_a\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)},$$

во многих ситуациях отпадает необходимость записывать неравенства $f\left(x\right)>0$, $g\left(x\right)>0$.

Далее, поскольку из неравенства $x\neq 1$ следует, что $\log_2 x\neq 0$, последняя система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2\left(xy\right)}{\log_2 12}=1; \\ \log_2\left(x+y\right)=3; \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(xy\right)=\log_2 12; \\ \log_2\left(x+y\right)=\log_2 2^3; \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=12; \\ x+y=8; \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6;\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2;\\ y=6.\end{cases}\end{array}\right.$$

Итак, решениями системы являются пары чисел $(6;\ 2)$ и $(2;\ 6)$.

При использовании формулы «переворота логарифма сверху вниз» $\log_{f(x)} g(x)=\dfrac{1}{\log_{g(x)} f(x)}$ нужно проверить, не являются ли решением исходного уравнения (неравенства) значения, при которых $g(x)=1$. Эти значения могли быть потеряны в результате применения этой формулы.

Задача 15. Решить уравнение

$$\log_{42x-9x^2-45}(3x-5)=\log_{27-9x}(3x-5).$$

Решение. К исходному уравнению удобно применить формулу «переворота логарифмов сверху вниз» для перехода к общему основанию $3x-5$. При этом необходимо проверить, не является ли корнем уравнения число $x=2$, полученное из условия $3x-5=1$. Подставив значение $x=2$ в исходное уравнение, получим $\log_{42\cdot 2-9\cdot 4-45} 1=\log_{27-18} 1 \Leftrightarrow 0=0$.

Итак, получив корень $x=2$, продолжим решать уравнение, полученное после применения формулы «переворота»:

$$\frac{1}{\log_{3x-5}\left(42x-9x^2-45\right)}=\frac{1}{\log_{3x-5}(27-9x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}42x-9x^2-45=27-9x;\\ 3x-5>0;\\ 27-9x>0;\\ 27-9x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-17x+24=0;\\ \dfrac{5}{3}<x<3;\\ x\neq\dfrac{26}{9}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3; \\ x = \dfrac{8}{3}; \end{array}\right. \\ \dfrac{5}{3} < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}.$$

В итоге решениями уравнения являются $x \in \left\{2; \dfrac{8}{3}\right\}$.

Задача 16. Найти сумму целых решений неравенства $\log_{\frac{x}{3}-1} 3 \le \log_{\frac{x}{3}+1} 9$ на отрезке $[0; 9]$.

Решение. Сразу заметим, что в силу ограничений и области определения

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - 1 > 0; \\ \dfrac{x}{3} - 1 \ne 1; \\ x \in [0; 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3; \\ x \ne 6; \\ x \in [0; 9] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; 6) \cup (6; 9],$$

т. е. целочисленные решения исходного неравенства принадлежат множеству $[4; 6) \cup (6; 9]$. Далее легко видеть, что при $x = 4$ и $x = 5$ левая часть исходного неравенства отрицательна, тогда как правая положительна, т. е. указанные значения являются решениями неравенства.

Итак, остается рассмотреть лишь целые значения из отрезка $[7; 9]$. Вполне возможна подстановка трех целых значений $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$ в исходное неравенство и сравнение получающихся при этом значений логарифмов. Мы же поступим по-другому и перепишем неравенство так: $\dfrac{1}{\log_3\left(\dfrac{x}{3} - 1\right)} \le \dfrac{2}{\log_3\left(\dfrac{x}{3} + 1\right)}$. Ввиду того, что $x \in [7; 9]$, оба знаменателя положительны и последнее неравенство с ограничениями на x равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\log_3\left(\dfrac{x}{3}-1\right) \ge \log_3\left(\dfrac{x}{3}+1\right); \\ x \in [7;\ 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x}{3}-1\right)^2 \ge \log_3\left(\dfrac{x}{3}+1\right); \\ x \in [7;\ 9] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{3}-1\right)^2 \ge \dfrac{x}{3}+1; \\ x \in [7;\ 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{2x}{3}+1 \ge \dfrac{x}{3}+1; \\ x \in [7;\ 9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x \ge 0; \\ x \in [7;\ 9] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ 0] \cup [9;\ +\infty); \\ x \in [7;\ 9] \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

В итоге, искомая сумма целых решений равна $4+5+9=18$.

При переходе к логарифмам с новым основанием в качестве основания всегда выбирайте число, а не выражение, зависящее от переменной. Таким образом вы избежите возможной потери корней, не усложняя самого решения.

Задача 17. Найти произведение корней уравнения

$$5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2.$$

Решение. Во всех логарифмах перейдем к основанию 9:

$$\frac{5\log_9 x}{\log_9 \dfrac{x}{9}} + \frac{\log_9 x^3}{\log_9 \dfrac{9}{x}} + \frac{8\log_9 x^2}{\log_9\left(9x^2\right)} = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5\log_9 x}{\log_9 x - 1} + \frac{3\log_9 x}{1-\log_9 x} + \frac{16\log_9 x}{1+2\log_9 x} = 2.$$

В последнем уравнении сделаем замену переменной $y = \log_9 x$:

$$\frac{5y}{y-1} + \frac{3y}{1-y} + \frac{16y}{1+2y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2y}{y-1} + \frac{16y}{2y+1} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(2y+1) + 8y(y-1) = (y-1)(2y+1); \\ y \ne 1,\ y \ne -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2 - 6y + 1 = 0; \\ y \ne 1,\ y \ne -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}; \\ y=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_9 x=\log_9 9^{\frac{1}{2}}; \\ \log_9 x=\log_9 9^{\frac{1}{4}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Произведение корней равно $3\sqrt{3}$.

В неравенствах для упрощения решения зачастую нужно заблаговременно определить знак логарифмического выражения. Удобно это делать по следующему правилу:

$$\log_a b>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, b>0; \\ (a-1)(b-1)>0 \end{cases}$$

или

$$\log_a b<0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0,\ b>0; \\ (a-1)(b-1)<0 \end{cases}$$

Задача 18. Решить неравенство $\dfrac{2}{\log_{x-\frac{5}{8}}(2-x)} \le 1$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\log_{x-\frac{5}{8}}(2-x)<0$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{13}{8}\right)(1-x)<0; \\ x>\dfrac{5}{8}; \\ 2>x \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{8};\,1\right)\cup\left(\frac{13}{8};\,2\right).$$

При этом исходное неравенство $\dfrac{2}{\log_{x-\frac{5}{8}}(2-x)} \le 1$ выполняется, т. к. левая часть отрицательна.

2. Пусть $\log_{x-\frac{5}{8}}(2-x)>0$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\left(x-\frac{13}{8}\right)(1-x)>0;\\ x>\frac{5}{8};\\ 2>x\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{13}{8}\right),$$

отсюда

$$\frac{2}{\log_{x-\frac{5}{8}}(2-x)}\le 1\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x\in\left(1;\frac{13}{8}\right);\\ 2\le\log_{x-\frac{5}{8}}(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(1;\frac{13}{8}\right);\\ \log_{x-\frac{5}{8}}\left(x-\frac{5}{8}\right)^2\le\log_{x-\frac{5}{8}}(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(1;\frac{13}{8}\right);\\ \left(x-\frac{5}{8}\right)^2\ge 2-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(1;\frac{13}{8}\right);\\ \left(x-\frac{1+\sqrt{104}}{8}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{104}}{8}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1+\sqrt{104}}{8};\frac{13}{8}\right).$$

Очень важно научиться грамотно использовать области определения логарифмических функций, присутствующих в данном уравнении или неравенстве как «подсказки» для:

- определения знаков подмодульных выражений;
- сравнения логарифмов, содержащих переменную в основании;
- упрощения схем решения смешанных неравенств.

Задача 19. Решить уравнение

$$\log_3(x-7)+\log_3(x+6)=\log_3|7-x|.$$

Решение. Заметим, что область определения функции $\log_3(x-7)$ «диктует» выполнимость неравенства $x-7>0$. Поэтому $\log_3|7-x| = \log_3(x-7)$. Отсюда исходное уравнение равносильно следующему уравнению:

$$\log_3(x-7)+\log_3(x+6)=\log_3(x-7) \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3(x+6)=0;\\ x-7>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+6=1;\\ x>7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-5;\\ x>7\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Задача 20. Решить неравенство $\log_{x+\frac{1}{x}}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\right)\ge 1$.

Решение. Введем новую переменную $y=x+\dfrac{1}{x}$.

Тогда $y^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2 \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. Поскольку $x>0$, то $y=x+\dfrac{1}{x}\ge 2$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\log_y\left(y^2-6\right)\ge 1;\\ y\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_y\left(y^2-6\right)\ge \log_y y;\\ y\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-6\ge y;\\ y\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y^2-y-6\ge 0;\\ y\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-3)(y+2)\ge 0;\\ y\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow y\ge 3 \Rightarrow \begin{cases}x+\dfrac{1}{x}\ge 3;\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2-3x+1}{x}\ge 0;\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{x}\ge 0;\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \text{ (рис. 4.8).}$$

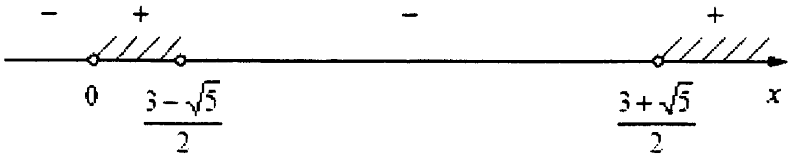


Рис. 4.8

Задача 21. Найти наибольшее решение неравенства

$$\log_{\frac{16x-1}{16x+1}}\left(\frac{16x-1}{16}\right)\ge 1.$$

Решение. Область определения логарифма «диктует» выполнимость неравенства $\frac{16x-1}{16}>0$, из которого следует неравенство $x>\frac{1}{16}$. При таких x основание логарифма $\frac{16x-1}{16x+1}$, очевидно, больше нуля, но меньше 1. Поэтому после предпотенцирования $\log_{\frac{16x-1}{16x+1}}\left(\frac{16x-1}{16}\right)\ge \log_{\frac{16x-1}{16x+1}}\left(\frac{16x-1}{16x+1}\right)$ получаем:

$$\begin{cases}\frac{16x-1}{16}\le\frac{16x-1}{16x+1};\\ x>\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(16x-1)(16x+1)\le 16(16x-1);\\ x>\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(16x-1)(16x-15)\le 0;\\ x>\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{16}\le x\le\frac{15}{16};\\ x>\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{16};\frac{15}{16}\right].$$

Наибольшим решением неравенства является число $\frac{15}{16}=0{,}9375$.

Задача 22. Найти сумму целых решений неравенства

$$\log_{|x-3|+1}\left(x^2-6x+14\right)\ge 2.$$

Решение. Заметив, что

$$x^2-6x+14=\left(x^2-6x+9\right)+5=(x-3)^2+5=|x-3|^2+5,$$

сделаем замену переменной $t=|x-3|$. Так как $t+1>1$ при любом x, отличном от 3, то

$$\log_{t+1}\left(t^2+5\right)\geq \Leftrightarrow \log_{t+1}\left(t^2+5\right)\geq\log_{t+1}\left(t+1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2+5\geq(t+1)^2; \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 2; \\ x\neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-3|\leq 2; \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x-3\leq 2; \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq x\leq 5; \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1;\,3)\cup(3;\,5].$$

Целыми решениями неравенства являются числа $\{1;\,2;\,4;\,5\}$, сумма которых равна 12.

Задача 23. Найти среднее арифметическое всех целых решений неравенства $\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|^{\sqrt{x+10}\cdot\log_{\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|}\left(\frac{49-4x-x^2}{31}\right)}\geq 1$.

Решение. Область определения основания логарифма «диктует» выполнимость неравенств $\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|\neq 0$, $\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|\neq 1$. А это, в свою очередь, влечет справедливость неравенства $0<\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|<1$.

Таким образом, исходное неравенство

$$\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|^{\sqrt{x+10}\cdot\log_{\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|}\left(\frac{49-4x-x^2}{31}\right)}\geq\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|^0$$

равносильно неравенству

$$\sqrt{x+10}\log_{\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|}\left(\frac{49-4x-x^2}{31}\right)\leq 0.$$

Очевидно, что $x=-10$ не входит в область определения логарифмической функции, поскольку $\frac{49-4(-10)-(-10)^2}{31}<0$. При

$x>-10$ выполняется неравенство $\sqrt{x+10}>0$, а значит, неравенство $\sqrt{x+10}\log_{\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|}\left(\frac{49-4x-x^2}{31}\right)\le 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x>-10; \\ \log_{\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|}\left(\dfrac{49-4x-x^2}{31}\right)\le\log_{\left|\sin\frac{\pi x}{8}\right|}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-10; \\ \dfrac{49-4x-x^2}{31}\ge 1; \\ \left|\sin\dfrac{\pi x}{8}\right|\ne 0; \\ \left|\sin\dfrac{\pi x}{8}\right|\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-10; \\ x^2+4x-18\le 0; \\ \dfrac{\pi x}{8}\ne\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-2-\sqrt{22};\,-2+\sqrt{22}\right]; \\ x\ne 4n,\ n\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отрезок $\left[-2-\sqrt{22};\,-2+\sqrt{22}\right]$ содержит следующее множество целых чисел: $\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$. Среди них только -4 и 0 имеют вид $4n$, т. к. $-4=4(-1)$, $0=4\cdot 0$. Поэтому целыми решениями являются только числа $\{-6;-5;-3;-2;-1;1;2\}$, среднее арифметическое которых равно $-\frac{14}{7}=-2$.

Задача 24. Найти сумму целых решений неравенства

$$\sqrt{\frac{4-x}{x+6}}\cdot\left(\log_4(x+7)+\log_{0,25}\left(3x^2+5x-8\right)\right)\le 0.$$

Решение. Это смешанное неравенство. Поэтому оно равносильно совокупности из двух систем.

1. $$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &4 - x = 0; \\ &\log_4(x+7) + \log_{0,25}(3x^2 + 5x - 8) = 0; \end{aligned}\right. \\ \dfrac{4-x}{x+6} \ge 0; \\ x + 7 > 0; \\ 3x^2 + 5x - 8 > 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{4-x}{x+6}} > 0; \\ \log_4(x+7) + \log_{0,25}(3x^2 + 5x - 8) < 0. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = 4; \\ &\log_4(x+7) = \log_4(3x^2 + 5x - 8); \end{aligned}\right. \\ \dfrac{x-4}{x+6} \le 0; \\ x > -7; \\ \left(x + \dfrac{8}{3}\right)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = 4; \\ &x + 7 = 3x^2 + 5x - 8; \end{aligned}\right. \\ x \in (-6;\ 4]; \\ x \in (-7;\ +\infty); \\ x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{8}{3}\right) \cup (1;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x \in \left\{4;\ -3;\ \frac{5}{3}\right\}.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{4-x}{x+6} > 0; \\ \log_4(x+7) < \log_4(3x^2 + 5x - 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{x+6} < 0; \\ x + 7 < 3x^2 + 5x - 8; \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x \in (-6;\ -3) \cup \left(\frac{5}{3};\ 4\right).$$

Итак, целыми решениями неравенства является множество чисел $\{-5;\ -4;\ -3;\ 2;\ 3;\ 4\}$, сумма которых равна -3.

Задача 25. Найти сумму целых решений неравенства

$$\log_{0,5}\left(1+|x+8|\right)\log_{3\sin\frac{\pi}{6}}\left(x^2+x+1\right)\ge 0.$$

Решение. Данное неравенство является смешанным. Обратим внимание на первый сомножитель в левой части неравенства: поскольку основание логарифма меньше 1, а подлогарифмическое выражение $1+|x+8|\ge 1$, то при $x\ne -8$ выполняется неравенство $\log_{0,5}\left(1+|x+8|\right)<0$, а при $x=-8$ выполняется равенство $\log_{0,5}\left(1+|x+8|\right)=0$. Отметим, что поскольку $x=-8$ входит в область определения второго логарифма ($x^2+x+1>0$ при любых x), то $x=-8$ — одно из решений исходного неравенства.

Если же $x\ne -8$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\log_{3\sin\frac{\pi}{6}}\left(x^2+x+1\right)\le 0$ (ибо, как показано выше, $\log_{0,5}\left(1+|x+8|\right)<0$), откуда

$$\log_{\frac{3}{2}}\left(x^2+x+1\right)\le \log_{\frac{3}{2}}1 \Leftrightarrow x^2+x+1\le 1 \Leftrightarrow x(x+1)\le 0 \Leftrightarrow x\in[-1;\ 0].$$

Итак, целыми решениями неравенства является множество чисел $\{-8;\ -1;\ 0\}$, и их сумма равна -9.

Задача 26. Решить неравенство $\dfrac{10+\log_3^2(x-3)}{\sqrt{x-1}-x}<0.$

Решение. Данное неравенство является смешанным. Очевидно, однако, что его числитель $10+\log_3^2(x-3)>0$ при всех $x>3$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x>3; \\ \sqrt{x-1}-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3; \\ \sqrt{x-1}<x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3; \\ x-1<x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3; \\ x^2-x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3; \\ x\in\mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow x>3 \Leftrightarrow x\in(3;\ +\infty).$$

Задача 27. Решить неравенство $\log_{\frac{x+4}{x+1}}(x+16) \le 2$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{x+4}{x+1} = 1 + \dfrac{3}{x+1}$ и рассмотрим два случая.

1. Если $x > -1$, то основание логарифма больше 1, и в этом случае неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > -1; \\ \log_{\frac{x+4}{x+1}}(x+16) \le \log_{\frac{x+4}{x+1}}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x+16 \le \left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x\left(x^2+17x+25\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x\left(x - \dfrac{-17+3\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-17-3\sqrt{21}}{2}\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;\ 0].$$

2. Если $x < -1$, то основание логарифма меньше 1, и в этом случае неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x < -1; \\ \log_{\frac{x+4}{x+1}}(x+16) \le \log_{\frac{x+4}{x+1}}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1; \\ \dfrac{x+4}{x+1} > 0; \\ x+16 \le \left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -4); \\ x\left(x - \dfrac{-17+3\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-17-3\sqrt{21}}{2}\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{-17-3\sqrt{21}}{2};\ -4\right).$$

Ответ: $\left[-\dfrac{17+3\sqrt{21}}{2};\ -4\right) \cup (-1;\ 0]$.

Особую группу задач составляют логарифмические уравнения и неравенства, решение которых основывается на свойствах содержащихся в них функций. К числу таких свойств относятся: знакопостоянство, монотонность, четность и нечетность, ограниченность множества значений, специфичность области определения.

Задача 28. Решить уравнение

$$\left|\log_3(1+\cos 2x)\right| + \left|\log_3(1-\cos 2x)\right| = 1.$$

Решение. Исходя из области определения логарифмических функций, $\cos 2x \neq \pm 1$. Непосредственная проверка убеждает в том, что $\cos 2x \neq 0$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $0 < \cos 2x < 1$. Тогда $1 < 1+\cos 2x < 2$, $0 < 1-\cos 2x < 1$. Следовательно, $\log_3(1+\cos 2x) > 0$, а $\log_3(1-\cos 2x) < 0$. Значит,

$$\left|\log_3(1+\cos 2x)\right| = \log_3(1+\cos 2x);$$
$$\left|\log_3(1-\cos 2x)\right| = -\log_3(1-\cos 2x).$$

Таким образом, исходное уравнение в этом случае равносильно системе

$$\begin{cases} \log_3(1+\cos 2x) - \log_3(1-\cos 2x) = 1; \\ 0 < \cos 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \log_3 3; \\ 0 < \cos 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = 3; \\ 0 < \cos 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

2. Пусть $-1 < \cos 2x < 0$. Тогда $0 < 1+\cos 2x < 1$, $1 < 1-\cos 2x < 2$, а значит, $\log_3(1+\cos 2x) < 0$, а $\log_3(1-\cos 2x) > 0$. В этом случае

$$\left|\log_3(1+\cos 2x)\right| = -\log_3(1+\cos 2x);$$
$$\left|\log_3(1-\cos 2x)\right| = \log_3(1-\cos 2x).$$

Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -\log_3(1+\cos 2x)+\log_3(1-\cos 2x)=1; \\ -1<\cos 2x<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\log_3 3; \\ -1<\cos 2x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=3; \\ -1<\cos 2x<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Решением исходного уравнения является множество углов

$$\left[\begin{array}{ll} x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k, & k\in\mathbf{Z}; \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Задача 29. Решить неравенство $\lg 2^x+2^{\lg x}>1$, если известно, что $x\geq 1$.

Решение. При $x\geq 1$ функции $\lg 2^x=x\cdot\lg 2$, $\lg x$ и $2^{\lg x}$ монотонно возрастают, следовательно, функция $f(x)=x\cdot\lg 2+2^{\lg x}$ тоже монотонно возрастает для этих x, а значит, $f(x)\geq f(1)$ для любого $x\geq 1$. Следовательно, $x\cdot\lg 2+2^{\lg x}\geq 1\cdot\lg 2+2^{\lg 1}=\lg 2+1$. Но так как $\lg 2+1>1$, то исходное неравенство выполняется при всех $x\geq 1$.

Задача 30. Известно, что для нечетной функции $f(x)$ при $x>0$ выполняется равенство $f(x)=\log_2\dfrac{x}{3}$. Найти все корни уравнения $f(x)=1$.

Решение. Если $x>0$, то уравнение $f(x)=1$ равносильно уравнению $\log_2\dfrac{x}{3}=1 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{x}{3}=\log_2 2 \Leftrightarrow x=6$.

Пусть теперь $x<0$, тогда $-x>0$, $f(-x)=\log_2\left(\dfrac{-x}{3}\right)$. В силу определения нечетной функции,

$$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(x)=-f(-x),$$

откуда $$f(x)=-f(-x)=-\log_2\left(\frac{-x}{3}\right).$$

Следовательно,

$$f(x)=1 \Leftrightarrow -\log_2\left(\frac{-x}{3}\right)=1\Leftrightarrow \log_2\left(-\frac{x}{3}\right)=\log_2 2^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}=-1,5.$$

Итак, $x\in\{6;\ -1,5\}$.

Задача 31. Решить неравенство

$$\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2(\pi x)+1\right)\geq 1.$$

Решение. Оценим множество значений функции $\log_2\left(\cos^2(\pi x)+1\right)$. Так как $0\leq\cos^2(\pi x)\leq 1$, то $1\leq\cos^2(\pi x)+1\leq 2$, а значит, $0\leq\log_2\left(\cos^2(\pi x)+1\right)\leq 1$.

Оценим теперь значения, принимаемые квадратным трехчленом $4x-x^2-3$. Учитывая, что $4x-x^2-3=-x^2+4x-4+1=$ $=-(x-2)^2+1$ и $-(x-2)^2\leq 0$, заключаем, что $1-(x-2)^2\leq 1$.

Из приведенных рассуждений следует, что левая часть исходного неравенства не превосходит 1, причем значение 1 она принимает, только если одновременно $4x-x^2-3=1$ и $\log_2\left(\cos^2(\pi x)+1\right)=1$.

Поскольку $4x-x^2-3=1$ при $x=2$, и при этом же значении x $\log_2\left(\cos^2(2\pi)+1\right)=1$, то решением исходного неравенства является единственное число $x=2$.

Задача 32. Найти сумму натуральных значений неравенства

$$3^{-x}-\log_3(x+3)+\log_3(23-2x)<12.$$

Решение. Поскольку $23-2x>0$, то искомые натуральные решения принадлежат множеству $\{1;\ 2;\ \ldots;\ 11\}$. Поскольку функции 3^{-x}, $-\log_3(x+3)$, $\log_3(23-2x)$ монотонно убывают на промежутке $[1;\ 11]$, то их сумма $f(x)=3^{-x}+\left(-\log_3(x+3)\right)+\log_3(23-2x)$ монотонно убывает на этом же множестве и, следовательно, принимает свое наибольшее значение при $x=1$. Вычислим это значение:

$$f(1)=3^{-1}-\log_3 4+\log_3 21=\frac{1}{3}+\log_3\frac{21}{4}<\frac{1}{3}+2<12.$$

Поскольку наибольшее значение функции $f(x)$ меньше 12, то $f(x)<12$ при всех значениях x из отрезка $[1;\ 11]$. В частности, неравенство $f(x)<12$ выполняется при всех натуральных числах от 1 до 11. Их сумма равна

$$1+2+\ldots+10+11=\frac{1+11}{2}\cdot 11=66.$$

Задача 33. Найти сумму всех целых решений неравенства $126>5^{-x}\cdot\log_2(30-x)$.

Решение. Перейдем к равносильному неравенству $126\cdot 5^x>\log_2(30-x)$ и рассмотрим функции $f(x)=126\cdot 5^x$ и $g(x)=\log_2(30-x)$. Функция $g(x)$ убывает на своей области определения $X=(-\infty;\ 30)$, в то время как функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке X.

Предположим, что известно такое число x_0, для которого $f(x_0)=g(x_0)$. Тогда по теореме 2.2 из *главы 2* множество решений неравенства $f(x)>g(x)$ совпадает с множеством $(x_0;\ +\infty)\cap X$. Если нам теперь удастся найти два таких последовательных целых числа, между которыми заключено число x_0, то мы сумеем выписать все целые значения из множества $(x_0;\ +\infty)\cap X$.

Заметим, что $f(-2)=126\cdot 5^{-2}=5\frac{1}{25}$, $g(-2)=\log_2 32=5$, т. е. $f(-2)>g(-2)$. С другой стороны, $f(-3)=126\cdot 5^{-3}=1\frac{1}{125}$,

$g(-3) = \log_2 33$, т. е. $f(-3) < g(-3)$. Таким образом, число x_0 заключено между числами -3 и -2.

Итак, искомые целые решения принадлежат промежутку $[-2; +\infty) \cap X = [-2; 30)$, и их сумма равна

$$-2 + (-1) + \ldots + 29 = 3 + 4 + \ldots + 29 = \frac{27 \cdot (3+29)}{2} = 27 \cdot 16 = 432.$$

Задача 34. Решить неравенство

$$\log_x\left(\sqrt{x^2+2x-3}+2\right) \cdot \log_5\left(x^2+2x-2\right) \ge \log_x 4.$$

Решение. Так как неравенство $x^2+2x-3 \ge 0$ выполняется только при $x \le -3$ или при $x \ge 1$, то основание x в логарифмических выражениях данного неравенства должно быть больше 1. Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_x\left(\sqrt{x^2+2x-3}+2\right)}{\log_x 4} \cdot \log_5\left(x^2+2x-2\right) \ge 1$$

или
$$\log_4\left(\sqrt{x^2+2x-3}+2\right) \cdot \log_5\left(x^2+2x-2\right) \ge 1.$$

Обозначим $t = \sqrt{x^2+2x-3}$. Тогда последнее неравенство можно записать в виде $\log_4(t+2) \cdot \log_5\left(t^2+1\right) \ge 1$. Теперь заметим, что при $t \ge 2$ верно

$$\log_4(t+2) \ge \log_4 4 = 1,\ \log_5\left(t^2+1\right) \ge \log_5 5 = 1,$$

и, следовательно, $\log_4(t+2) \cdot \log_5\left(t^2+1\right) \ge 1$.

Если же $0 \le t < 2$, то $0 < \log_4(t+2) < 1$, $0 \le \log_5(t^2+1) < 1$ и, следовательно, $\log_4(t+2) \cdot \log_5\left(t^2+1\right) < 1$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} t \ge 2; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} \ge 2; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-7 \ge 0; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[2\sqrt{2}-1;\ +\infty\right).$$

Так же, как и в предыдущих главах, нужно «держать под прицелом» замечательное неравенство $\left|a+\dfrac{1}{a}\right|\ge 2$.

Задача 35. Решить уравнение $2^{-x^2+4x-3}=\log_2 x+\log_x 2$.

Решение. Так как $\log_2 x+\log_x 2=\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}$, то при всех $x>0$, $x\ne 1$ выполняется неравенство $|\log_2 x+\log_x 2|\ge 2$.

С другой стороны,

$$-x^2+4x-3=-x^2+4x-4+1=-(x-2)^2+1\le 1$$

при любом x, откуда следует, что $2^{-x^2+4x-3}\le 2^1=2$.

Поэтому равенство левой и правой частей исходного уравнения возможно лишь в случае

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_x 2=2;\\ 2^{-x^2+4x-3}=2,\end{cases}$$

т. е. при $x=2$.

Задача 36. Найдите все пары действительных чисел (x,y), для которых справедливо равенство

$$\log_{2^{\sqrt{x+y}}}\left(2^{\sqrt{x+y}}+\sqrt{y\sqrt{x}+1}\right)=2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}}.$$

Решение. Если $x+y\ne 0$, то левая часть уравнения не меньше 1, а правая часть не больше 1. Поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}2^{-\sqrt{x-y-2\sqrt{x}}}=1;\\ 2^{\sqrt{x+y}}+\sqrt{y\sqrt{x}+1}=2^{\sqrt{x+y}};\Leftrightarrow\\ x+y\ne 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-2\sqrt{x}=0;\\ \sqrt{y\sqrt{x}+1}=0;\\ x\ge 0,\quad x+y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}^3-2\sqrt{x}^2+1=0;\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{x}};\\ x\ge 0,\quad x+y>0.\end{cases}$$

Положим $t=\sqrt{x}$. Уравнение $t^3-2t^2+1=0$ имеет корень $t=1$. Применив схему Горнера, получим

$$(t-1)(t^2-t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1; \\ t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1; \\ \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Если $\sqrt{x}=1$, то $y=-1$, $x+y=0$, что невозможно. Если $\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, то $y=-\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задача 37. Найдите все пары действительных чисел (x,y), для которых выполняется неравенство:

$$\log_{|\cos x|+|\sin x|}\left(4-2\cos y-\sin\frac{9x}{2}\right)\le\log_{4^y+3^{-y}}\left|\sin\frac{3y}{4}\cdot\cos 6x\right|.$$

Решение. Рассмотрим основания логарифмов. Итак:

$$\left(|\cos x|+|\sin x|\right)^2=1+2|\sin 2x|\ge 1 \ \Rightarrow\ |\cos x|+|\sin x|\ge 1$$

при всех x, причем равенство достигается только при $|\sin 2x|=0$. Если $y\ge 0$, то $4^y+3^{-y}>4^y\ge 1$; если $y<0$, то $4^y+3^{-y}>3^{-y}\ge 1$. В любом случае, $4^y+3^{-y}>1$ при всех y.

Теперь рассмотрим подлогарифмические выражения: $4-2\cos y-\sin\dfrac{9x}{2}\ge 1$ для всех x и y; $\left|\sin\dfrac{3y}{4}\cos 6x\right|\le 1$ для всех x и y.

Итак, левая часть неравенства неотрицательна, а правая — неположительная. Поэтому возможно равенство нулю обеих частей неравенства. Отсюда приходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} |\sin 2x| \neq 0; \\ 4 - 2\cos y - \sin\dfrac{9x}{2} = 1; \\ \left|\sin\dfrac{3y}{4}\cos 6x\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0; \\ \cos y = 1; \\ \sin\dfrac{9x}{2} = 1; \\ \left|\sin\dfrac{3y}{4}\right| = 1; \\ |\cos 6x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi s}{2}, & s \in \mathbf{Z}; \\ y = 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{4\pi k}{9}, & k \in \mathbf{Z}; \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{4\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}; \\ x = \dfrac{\pi l}{6}, & l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Найдем пересечение множеств углов $2\pi m$ и $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{4\pi n}{3}$: $2\pi m = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{4\pi n}{3} \Leftrightarrow 3m - 2n = 1$. Решением этого диофантова уравнения является множество $m = 1 + 2t$, $t \in \mathbf{Z}$. Отсюда $y = 2\pi m = 2\pi(1 + 2t) = 2\pi + 4\pi t$.

Найдем пересечение множеств углов $\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{4\pi k}{9}$ и $\dfrac{\pi l}{6}$: $\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{4\pi k}{9} = \dfrac{\pi l}{6} \Leftrightarrow 3l - 8k = 2$. Решив это диофантово уравнение в целых числах, получим $l = -2 + 8t,\ t \in \mathbf{Z}$. Отсюда $x = \dfrac{\pi l}{6} = \dfrac{\pi}{6}(-2 + 8t) = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4}{3}\pi t$.

Осталось исключить из множества $-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4}{3}\pi t$ пересечение с множеством $\dfrac{\pi s}{2}$, $s \in \mathbf{Z}$: $\dfrac{\pi s}{2} \neq -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4}{3}\pi t \Leftrightarrow 8t - 3s \neq 2 \Rightarrow t \neq 1 + 3r$, $r \in \mathbf{Z}$. Последнее неравенство можем заменить совокупностью равенств:

$$\left[\begin{array}{ll} t = 2 + 3r, & r \in \mathbf{Z}; \\ t = 3r, & r \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{ll} t = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4}{3}\pi(2 + 3r) = \dfrac{7\pi}{3} + 4\pi r, & r \in \mathbf{Z}; \\ t = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3r = -\dfrac{\pi}{3} + 4\pi r, & r \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Графические подходы, уже доказавшие свою эффективность в предыдущих главах, также незаменимы в сложных логарифмических уравнениях и неравенствах. При этом они могут перемежаться с искусными преобразованиями логарифмических выражений или сочетаться с оценочными методами в граничных задачах.

Задача 38. Решить неравенство

$$\log_{|x-1|}\left(\sqrt{x+4}+4\right)\geq 2\log_{(x-1)^2}(2x+6).$$

Решение. Обозначим $f(x)=\sqrt{x+4}+4$, $g(x)=2x+6$. Тогда исходное неравенство запишется так: $\log_{|x-1|} f(x)\geq \log_{|x-1|} g(x)$. Изобразим на рис. 4.9 графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

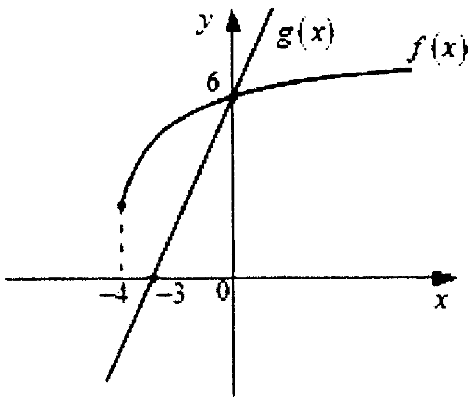


Рис. 4.9

Рассмотрим два случая.

1. $\begin{cases} |x-1|>1; \\ \log_{|x-1|} f(x)\geq \log_{|x-1|} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty); \\ f(x)\geq g(x); \\ g(x)>0. \end{cases}$

Как видно из рис. 4.9, решениями этой системы является промежуток $(-3;\ 0)$.

2. $\begin{cases} 0<|x-1|<1; \\ \log_{|x-1|} f(x) \ge \log_{|x-1|} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2); \\ f(x) \le g(x); \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Как видно из рис. 4.9, решениями этой системы является промежуток $(0;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

Ответ: $(-3;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

Задача 39. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{49} + \dfrac{xz}{4} - \dfrac{yz}{9} = 1 + 2\ln\dfrac{3x}{14}; \\ \dfrac{xy}{49} + \dfrac{yz}{9} - \dfrac{xz}{4} = 1 + 2\ln\dfrac{2y}{21}; \\ \dfrac{yz}{9} + \dfrac{xz}{4} - \dfrac{xy}{49} = 1 + 2\ln\dfrac{7z}{6}. \end{cases}$$

Решение. Почленно сложив 1-е и 2-е, 1-е и 3-е, 2-е и 3-е уравнения, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{49} = 1 + \ln\dfrac{xy}{49}; \\ \dfrac{xz}{4} = 1 + \ln\dfrac{xz}{4}; \\ \dfrac{yz}{9} = 1 + \ln\dfrac{yz}{9}. \end{cases}$$

Обозначим $f(t) = 1 + \ln t$. Тогда уравнения этой системы имеют вид: $t = f(t)$, где t соответственно принимает значения $\dfrac{xy}{49}$, $\dfrac{xz}{4}$, $\dfrac{yz}{9}$.

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(t)$ в точке $M(1,1)$ равен $f'(1) = 1$. Поэтому прямая $y = t$ является касательной к $y = f(t)$ в точке M (рис. 4.10).

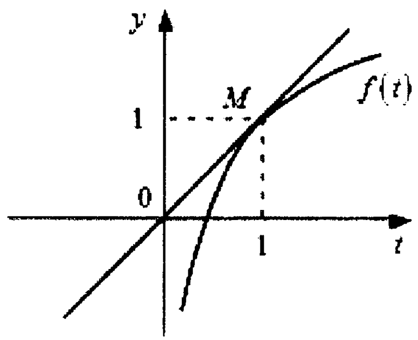


Рис. 4.10

Следовательно, уравнение $t = f(t)$ имеет единственное решение $t = 1$, что приводит нас к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{49} = 1; \\ \dfrac{xz}{4} = 1; \\ \dfrac{yz}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 y^2 z^2 = 49 \cdot 4 \cdot 9 \quad \Rightarrow \quad |xyz| = 42.$$

Так как x, y, z положительные, то $xyz = 42 \Rightarrow x = \dfrac{42}{9}$, $y = \dfrac{42}{4}$, $z = \dfrac{42}{49}$.

Ответ: $\left(\dfrac{14}{3}, \dfrac{21}{2}, \dfrac{6}{7}\right)$.

Задача 40. Решить неравенство

$$\sqrt{3\ln^2(x-2)^2 + \ln^2 x} > \ln(x-2)^2 + \ln x.$$

Решение. Запишем уравнение в виде $\sqrt{12\ln^2|x-2| + \ln^2 x} > 2\ln|x-2| + \ln x$ и рассмотрим три случая.

1. Пусть $\ln x < 0$. Тогда $0 < x < 1$, $1 < |x-2| < 2$, $\ln|x-2| > 0$ и, следовательно, левая часть неравенства больше правой (достаточно возвести обе части неравенства в квадрат, чтобы убедиться в сказанном).

2. Если $\ln x = 0$, то $x = 1$, и решений нет.
3. Пусть $\ln x > 0$. Разделим обе части неравенства на $\ln x$: $\sqrt{\frac{12\ln^2|x-2|}{\ln^2 x}+1} > \frac{2\ln|x-2|}{\ln x}+1$. Обозначим $t = \frac{2\ln|x-2|}{\ln x}$ и графически решим неравенство $\sqrt{3t^2+1} > t+1$ (рис. 4.11).

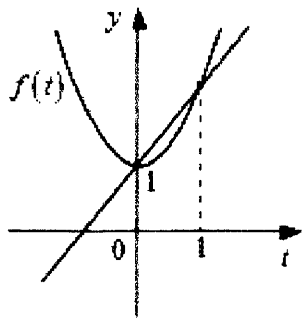


Рис. 4.11

Как видно из рис. 4.11, $t \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Возможны два случая.

- $\begin{cases} t > 1; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)^2 > \ln x; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 > x; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$
- $\begin{cases} t < 0; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|x-2| < 0; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < |x-2| < 1; \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;\ 2) \cup (2;\ 3).$

Ответ: $(0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$.

Задача 41. Найти a, при которых уравнение $\log_{2x}(1-ax) = \frac{1}{2}$ имеет ровно одно решение.

Решение.

$$\log_{2x}(1-ax) = \log_{2x}\sqrt{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-ax = \sqrt{2}\sqrt{x}; \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если $x = \dfrac{1}{2}$, то $a = 0$. Потому достаточно рассмотреть систему:

$$\begin{cases} ax = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x}; \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Построим график функции $y = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x}$ и найдем граничные расположения прямых $y = ax$, при которых они еще пересекают график функции $y = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x}$ точно один раз (рис. 4.12).

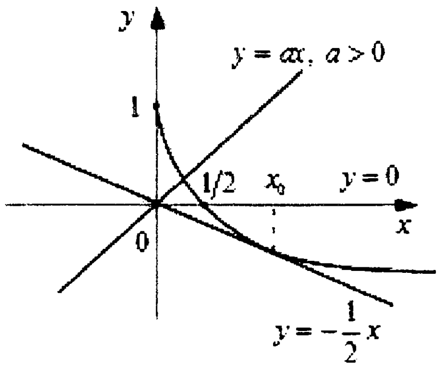


Рис. 4.12

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x}$ в точке с абсциссой x_0 равен: $y'(x_0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x_0}}$.

Следовательно, при $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x_0}}$ прямая $y = ax$ касается кривой $y = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x}$. Найдем x_0 и a:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x_0}}; \\ ax_0 = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2a} = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Другое граничное положение задается прямой $y = 0$, а при $a > 0$ все прямые $y = ax$ пересекают график $y = 1 - \sqrt{2}\sqrt{x}$ точно один раз (см. рис. 4.12).

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup (0;\ +\infty)$.

Задача 42. Найти все a, при которых уравнение $\log_5\left(25^x - \log_5 a\right) = x$ имеет единственное решение.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $25^x - \log_5 a = 5^x$. Сделаем замену переменной: $t = 5^x$. Тогда задача сводится к нахождению таких a, при которых система

$$\begin{cases} t^2 - t - \log_5 a = 0; \\ t > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Применим графический метод парабол для решения подобных задач, описанный в *главе 2*.

Приведенная выше система может иметь единственное решение только в двух ситуациях, изображенных на рис. 4.13, где $f(t) = t^2 - t - \log_5 a$. Первая ситуация задается равенством

$$D = 0 \iff 1 + 4\log_5 a = 0 \iff a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}.$$

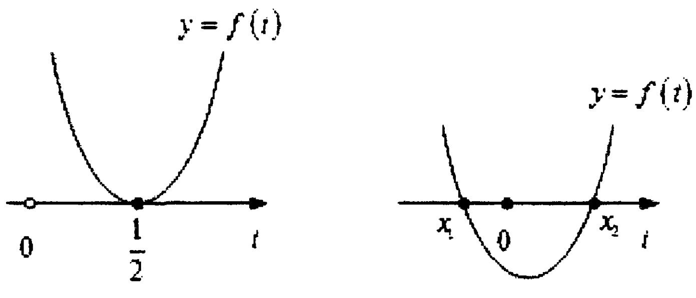


Рис. 4.13

Вторая ситуация задается неравенством $f(0) \le 0 \iff \log_5 a \ge 0 \iff a \ge 1$. Отметим, что меньший корень x_1 параболы $f(t)$ может совпадать с 0, т. к. $t > 0$ гарантирует единственность решения в случае $x_1 = 0$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right\} \cup [1;\ +\infty)$.

§ 4.4. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить (**1–6**).

1. $\dfrac{1}{\log_{24}2}-\dfrac{4}{\log_3 16}-4^{\log_{12}4}\cdot 9^{\log_{12}2}$.

2. $\log_{\sqrt{30}-\sqrt{6}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{30}+\sqrt{29}}\right)^{-0,2}$.

3. $4^{5\log_{4\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{6}\right)-6\log_8\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$.

4. $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30}5}-\dfrac{\log_5 150}{\log_6 5}$.

5. $\dfrac{\log_2^2 18-4\log_2^2 3+3\log_2 18+6\log_2 3}{\log_2 18+2\log_2 3}$.

6. $\left(\log_2 3+\log_3 16+4\right)\cdot\left(\log_2 3-2\log_{12}3\right)\cdot\log_3 2-\log_2 3$.

7. Выразить $\log_2 36$ через a, если $a=\log_{12}9$.

Определить знак числа (**8–9**).

8. $\dfrac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3}3-\log_{0,3}4}$.

9. $\dfrac{\log_{0,99}\left(0,7^{-1}\left(\log_2 5-1\right)\right)}{0,99^{98}-0,99^{-100}}$.

10. Вычислить: $6^{\sqrt{\log_6 x}}-x^{\sqrt{\log_x 6}}+1$.

11. Упростить: $3^{\frac{\log_{1/\sqrt{2}}\log_{1/5}x}{\log_2 3}}$.

12. Вычислить: $\left(4+\sqrt{15}\right)^{\log_4\left(\sqrt{5}+2\right)}\cdot 100^{\lg\sqrt{15}}\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)^{-\log_{16}\left(\sqrt{15}-4\right)^2}$.

Логарифмы в задачах **13–15** выразить через a и b.

13. $\lg 56$, если $a=\lg 2$, $b=\log_2 7$.

14. $\lg 1,08$, если $a=\log_2 3$, $b^{-1}=\log_5 2$.

15. $\log_{30}8$, если $\lg 5=a$, $\lg 3=b$.

16. Найти $\log_a^2 b + \log_a^{-2} b$, если $\log_a b + \log_a^{-1} b = 3$.

17. Найти $\log_{\frac{11}{25}} |\sin 3x| + \log_{\frac{11}{25}} |\sin x|$, если $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Найти значение выражения (**18–19**).

18. $\log_{\frac{1}{4}} \operatorname{tg} 31° + \log_{\frac{1}{4}} \operatorname{tg} 33° + \ldots + \log_{\frac{1}{4}} \operatorname{tg} 59° + \log_{\frac{1}{4}} 16°$.

19. $\lg \operatorname{ctg} 1° \cdot \lg \operatorname{ctg} 2° \cdot \lg \operatorname{ctg} 3° \cdots \lg \operatorname{ctg} 89°$.

Сравнить два числа (**20–22**).

20. $\log_4 5$ и $\log_5 6$.

21. $\log_3 10 + 4\lg 3$ и 4.

22. $\log_2 24 - 1$ и $\log_3 6 + 1$.

23. Найти x, при котором числа $\lg 2$, $\lg(3^x - 3)$, $\lg(3^x + 9)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

24. Найти множество значений функции $y = \log_2 \frac{12}{x^2 - 9x + 21}$.

Решить уравнение (**25–30**).

25. $9^x + 6^x = 2^{1+2x}$.

26. $25^{\frac{1}{x}} + 10^{\frac{2}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$.

27. $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} + 7 = 0$.

28. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

29. $8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{(0{,}25)^{\frac{3x-1}{x-1}}}} = 1$.

30. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

31. Найти сумму корней уравнения $\left(\sqrt{10}+3\right)^x + \left(\sqrt{10}-3\right)^x = 38$.

32. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x - 7\cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}; \\ y - x = 3. \end{cases}$$

33. Найти минимальное положительное решение неравенства

$$(2,5)^{(x+1)^2}\cdot(0,4)^{|4x-4|} \ge \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{13}{2}}.$$

34. Найти сумму целых решений неравенства
$-4 < 3^{x^2-2x+1} - 5 \le 22$.

Решить неравенство (**35–36**).

35. $2^{x-2} + 8^{\frac{x}{3}-1} - 4^{\frac{x}{2}-2} < 10.$

36. $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x < 0.$

37. Найти число корней уравнения $|\cos x|^{\cos^2 x - \sin x - 1} = 1$, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ \pi]$.

Решить уравнение (**38–45**).

38. $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} - 2\cdot 0,25^{\frac{-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}} - 1 = 0.$

39. $\sqrt{2\cdot 3^x - 9} = 3^{x-1}.$

40. $\dfrac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5.$

41. $\left(3\dfrac{2}{3}\right)^{1-\cos x}\cdot\left(0,2(72)\right)^{\cos x + 0,5} = \sqrt{\dfrac{11}{3}}.$

42. $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdots 5^{2x} = 0,04^{-28}.$

43. $|x-2|^{10x^2-3x-1} = (2012)^0.$

44. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

45. $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0.$

46. Найти сумму корней уравнения $3^x + \sqrt{3^{x+2}\cdot 7^x} = 3\cdot 7^x + \sqrt{21^x}$.

47. Найти сумму корней уравнения $4^{\sin x} - 3\cdot 2^{\sin x + \cos x} = -2\cdot 4^{\cos x}$, принадлежащих промежутку $[0°;\ 180°]$.

48. Найти сумму целых корней уравнения
$2^{x+1} + 1 = 2^{|x+2|} - \left|2^{x+1} - 1\right|$, принадлежащих промежутку $[-2;\ 10)$.

49. Найти сумму целых решений уравнения
$\left|0,2^{\frac{x}{2}}-1\right|+\left|0,2^{\frac{x}{2}}-5\right|=4$.

50. Найти максимальный корень уравнения $7^{x+3}\cdot 3^{\frac{x+3}{x+2}}=1$.

Решить уравнение (**51–55**).

51. $6^{x-3}+4^{x-2}=100$.

52. $2^x=3-x$.

53. $2^{1-x^2}+2^{x^2-1}=2\sin\dfrac{\pi y}{2}$.

54. $7^{x+1}+7^{1-x}=1-4x-x^2$.

55. $5^{1-|x-1|}=x^2-2x+6$.

56. Решить уравнение $6^{3x^2-2x^3}=\dfrac{1+x^2+4x}{x}$ при условии, что $x>0$.

57. Найти произведение корней уравнения
$4^x+(x-13)\cdot 2^x-2x+22=0$.

58. При каких x функция $y=15+3\cdot\left|25^x+(x-1)\cdot 5^x+5x-30\right|$ достигает своего минимального значения?

Решить систему уравнений (**59–61**).

59. $\begin{cases} x^{y-2}=4; \\ x^{2y-3}=64. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x^y=y^x; \\ x^3=y^2. \end{cases}$

61. $\begin{cases} x+2^x=y+2^y; \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$

62. Решить неравенство $(x-2)^{x^2-4}<1$.

63. Найти минимальное целое решение неравенства $x^{3x}\le x^{x^2+2}$.

64. Найти минимальное решение неравенства
$27+9^{\sqrt{x-2}}>4\cdot 3^{1+\sqrt{x-2}}$.

65. Найти сумму целых решений неравенства
$81^{\frac{|5-x|}{2}}+27\le 28\cdot(0,(3))^{-|x-5|}$.

66. Найти наименьшее натуральное решение неравенства $3^{\frac{2}{x}} + 2x \cdot 3^{\frac{1}{x}} - 6x - 9 < 0$.

67. Найти сумму натуральных решений неравенства
$\frac{5^x - 2}{x^2 - 4x + 3} \le 0$.

68. Найти число целых решений неравенства
$\frac{\sqrt{3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1}}{x^2 + x - 2} \le 0$.

Решить неравенство (**69–72**).

69. $(x^2 - 5x) \cdot 2^{\sqrt{x}} \le 0{,}5^{-3-\sqrt{x}} - 2^{1+\sqrt{x}}$.

70. $\frac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \le 2$.

71. $2^{-x^2} \ge x^2 + 1$.

72. $9 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} \le 4 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$.

73. Решить неравенство $\frac{15 - 16^{x+1}}{4^{2x} - 4} \ge 2^{4x+1} - 3$. В ответ записать середину интервала решений.

Решить неравенство (**74–76**).

74. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x+2}} > 5^{-x}$.

75. $(2{,}5)^{(x+1)^2} \cdot (0{,}4)^{|4x-4|} \ge \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{13}{2}}$.

76. $\frac{x^2}{4^{\sqrt{x}}} \le 2^{2(2-\sqrt{x})}$.

77. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a; \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

78. Найти сумму всех значений a, при которых функция $y = \frac{3^{-ax} - 3^x}{a + 1}$ является нечетной.

79. Найти наименьшее целое решение неравенства
$3^{\frac{x-2}{5}}-3^{\frac{17-x}{5}}-6>0.$

80. Найти произведение корней уравнения $3^{2x^2}-3^{x^2+x+6}=2\cdot 3^{2x+13}$.

81. Найти сумму всех целых решений неравенства
$\dfrac{29-2x}{x-5}\geq 9^{x-8}+x^2-10x+25.$

82. Найти сумму корней уравнения $3\cdot 4^{\left(x^2+2x+3\right)^{-1}}=2x^2+4x+2.$

Решить уравнение (**83–91**).

83. $\sqrt{\log_3 x^9}-4\cdot\log_9\sqrt{3x}=1.$

84. $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2.$

85. $|3x+2|^{\log_{\sqrt{2}}|3x+2|}=4.$

86. $2^{1-2x+x^2}=9^{\log_5 2}.$

87. $\log_2^2\left(\log_3 x\right)=4.$

88. $2x\cdot\log_2 3=\log_2\left(\lg^2 x+9^x-1\right).$

89. $\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg^2 x=6.$

90. $\lg(x-10)\cdot\lg(x+10)=\lg\left(x^2-100\right)-1.$

91. $\left|2+\dfrac{x}{9}\right|^{\log_3\left|\frac{18+x}{9}\right|}=81.$

92. Найти произведение наименьшего и наибольшего корней уравнения $\sqrt{\log_5^2 x+\log_x^2 5+2}=2{,}5.$

93. Найти сумму всех корней уравнения $\log_{\sin x}^2 2=\log_{\sin x}\left(4\sin^3 x\right)$ из промежутка $[-270°;\ 180°]$.

94. Найти сумму корней уравнения
$\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}}=(3x-5)^{\log_{\frac{1}{100}}\left(30-x-x^2\right)}.$

Решить систему уравнений (**95–96**).

95. $\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy); \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0. \end{cases}$ **96.** $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77; \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7. \end{cases}$

Решить неравенство (**97–100**).

97. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(\log_{x-1} 9\right)\right) > 0.$ **98.** $\lg^2(-x) + \lg x^2 < 3.$

99. $\log^2_{0,2}(x-1) > 4.$ **100.** $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log^2_3 x \le 1.$

101. Найти целое решение неравенства
$\log_2\left(2^x - 1\right) \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1} - 2\right) > -2.$

102. Найти число целых решений неравенства $\log_{2+x}\left(6 - |x|\right) \ge 0.$

103. Найти количество целых неотрицательных решений неравенства $\log_{x+3}\left(8 - 2|x|\right) \ge 0.$

104. Найти наименьшее целое решение неравенства
$\log^2_{\frac{1}{3}} x + \left|\log_{\frac{1}{3}} x\right| > 2.$

105. Найти число целых решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}}\left|\frac{x-1}{2-x}\right| > 1.$

106. Найти сумму целых решений неравенства $\log_{-5x^2-6x} 6^x > 0.$

Решить уравнение (**107–122**).

107. $\log_x\left(5x^2\right) \cdot \log^2_5 x = 1.$

108. $\log_3\left(\log_2 x - 9\right) = 2 + \log_3\left(1 - 4\log_x 4\right).$

109. $\log_{6x-x^2-5}(x-1) = \log_{15-3x}(x-1).$

110. $(1{,}0(66))^{2-\lg x} \cdot \left(1\frac{1}{15}\right)^{2\lg x} = \left(\frac{15}{16}\right)^{-1}.$

111. $\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2+8\log_5^2\sqrt{x}=\log_5 x\cdot\log_5(2x+3)^3$.

112. $\dfrac{\sqrt{x+1}\cdot\left(2^{x+3}+2^{2-x}-33\right)}{x^2-5x+6}=0.$

113. $\log_7(x+8)=-x$.

114. $\log_2^2 x+(x-1)\cdot\log_2 x=6-2x$.

115. $10\cdot\log_8\left(\frac{x}{8}+\frac{8}{x}\right)^{15}=16x-x^2-14$.

116. $\log_2\left(1+x^2\right)=2x-x^2+\log_2 x$.

117. $\log_3\left(8+2x-x^2\right)=2^{x-1}+2^{1-x}$.

118. $\lg^2(\lg x)=-\sqrt{\frac{5^{\lg 3}}{3^{\lg 5}}}\cdot\lg\left(\log_x 10\right)$.

119. $\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)=4$.

120. $\log_2 x\cdot\log_3 x\cdot\log_5 x=$

$$=\log_2 x\cdot\log_3 x+\log_2 x\cdot\log_5 x+\log_3 x\cdot\log_5 x.$$

121. $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$.

122. $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\log_2^2 x+\log_2^4 x=1$.

123. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y\cdot x^{\log_y x}=x^{\frac{5}{2}};\\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1.\end{cases}$$

Решить неравенство **124–132**.

124. $\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4>0$.

125. $2x\cdot\log_{0,2} x-\dfrac{x+5}{\log_x 0,2}\geq 0$.

126. $\left(x^2+6x+10\right)\cdot\log_{\sqrt{6}}\left(6+6\cos^2\frac{\pi x}{6}\right)\le 2.$

127. $\left(\cos^2(x+y)-2\cos(x+y)+2\right)\cdot\log_2\left(3^x+3^{-x}\right)\le 1.$

128. $\frac{2+\log_3 x}{x-1}<\frac{6}{2x-1}.$

129. $\frac{\sqrt{\log_2(x-1)}}{x^2-3x-4}\ge 0.$

130. $\sqrt{1+\log_4 x}-\sqrt{3\log_4 x}>2\cdot\log_4 x-1.$

131. $\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x+9}\right)\cdot\log_3\frac{2x^2+x-3}{3}\ge 0.$

132. $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\cdot\log_2 x>\left(x^2-x\right)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}.$

Найти сумму целых решений неравенства (**133–136**).

133. $\frac{x^2-2x-8}{\log_{17-x^2}0{,}5}\ge 0.$

134. $\log_{0,3}\left(1+|x-9|\right)\cdot\log_{2\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}}\left(x^2+5x+7\right)\ge 0.$

135. $\sqrt{6-x}\cdot\left(\log_3\left(x^2-7x+9\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\right)\ge 0.$

136. $\log_{|x-3|+1}\left(x^2-6x+14\right)\ge 2.$

137. Найти число целых решений неравенства $\log_{x^2}\frac{4x-5}{|x-2|}\ge\frac{1}{2}.$

138. Найти наименьшее целое решение неравенства $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<1.$

139. Найти сумму целых решений неравенства
$\log_{\frac{2x}{3}+3}7\le\log_{\frac{2x}{3}+5}49$ на промежутке $[-6;\,2]$.

140. Найти произведение наименьшего решения и числа целых решений неравенства $\left|\sin\frac{\pi x}{6}\right|^{\sqrt{x+10}\cdot\log_{\left|\cos\frac{\pi x}{6}\right|}\frac{(30-8x-x^2)}{21}}\ge 1.$

141. Найти сумму минимального и максимального целых решений неравенства $\log_{\frac{1}{6}} \frac{(x-1)(x-10)}{5} \geq \log_{\frac{1}{36}} (x-10)^2$.

142. Найти сумму целых решений неравенства $\log_{\left|x-\frac{1}{2}\right|}\left(2x+3-x^2\right) \leq \log_{|1-2x|}(2x-1)$.

143. Решить неравенство $\log_{1-x^2}(x+1)^4 \leq \log_{\sqrt{2x-1}}|1-2x|$.

144. Найти сумму целых решений неравенства $\log_{\sqrt{11-2\sqrt{10}}+1-\sqrt{7}}\left(x^2+3x-17\right) \geq 0$.

145. Найти сумму целых значений a, при которых неравенство $\log_{6+3\sin x}\left(\frac{a+3}{a+7}\right) > 1$ имеет решения.

146. Найти наименьшее положительное решение уравнения $\log_2\left(5+3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

147. При каком a уравнение $\log_9\left(x^6+9\right)+6|x|+9 = a+9\sin\left(2x^4\right)$ имеет нечетное число корней?

148. Найти сумму корней уравнения

$$\log_{\frac{\pi}{4}}\left|\cos\frac{\pi x}{4}\right| - |x+2| + \sqrt{x^2+4x+3+\frac{1}{\left|\cos\frac{\pi x}{4}\right|}} = 0,$$

принадлежащих промежутку $[-12; 22]$.

149. Найти сумму наибольшего и наименьшего целых решений неравенства $\left(\sin^6 7+\cos^6 7\right)^{\log_3 \frac{15}{5-x}} \leq \sqrt{x+26}-3$.

150. Найти сумму целых решений неравенства $\log_{\frac{2x}{3}-1} 2 \leq \log_{\frac{2x}{3}+1} 4$ на промежутке $[0; 6]$.

151. Найти сумму целых решений неравенства

$$\frac{\sqrt{18x-x^2-17}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3}-2{,}8\right)}{30-15^{x-10}-15^{12-x}}\le 0\,.$$

Решить неравенство (**152–154**).

152. $\dfrac{\log_{x^2}4}{\sqrt{\dfrac{1}{6}+\log_{x^6}(1-x)}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}}\ge\dfrac{\sqrt{6}}{\log_2(1-x)-\log_4 x^4}.$

153. $\dfrac{2}{\log_{3+x}\left(6-4x-2x^2\right)}\le\dfrac{1}{2-\log_{2-2x}(3+x)}.$

154. $\log_{x+5}\left(\sqrt{x+8}+3\right)\le 1.$

155. Решить уравнение $\log_{\operatorname{tg}x}(2-\operatorname{ctg}x)+2\log_{2-\operatorname{ctg}x}\sqrt{\operatorname{tg}x}=\dfrac{5}{2}.$

156. Найти все a, при которых уравнение $\log_5\left(25^x-\log_5 a\right)=x$ имеет единственное решение.

Решить уравнение (**157–158**).

157. $\log_{x^2-2x}\left(2-3^{4x-x^2}\right)=\log_{6-x}\left(2-3^{4x-x^2}\right).$

158. $\log_{7x-6}\left(7x^2+x-6\right)\cdot\log_{x+1}\left(x^3+1\right)=$

$$=\log_{7x-6}\left(7x^2+x-6\right)+\log_{x+1}\left(x^3+1\right).$$

159. Найти все a, при которых уравнение $\log_3\left(x+\sqrt{5-a}\right)+\log_{1/3}(a-2-x)=\log_9 4$ имеет решение.

160. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases}\log_3(2-x-y)+2=\log_3(17-8x-10y);\\(x-a)^2+x=y+a+6\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

161. Решить неравенство

$$\left|\log_{x+1} 3 + \log_3 \frac{x+1}{9}\right| + \left|\log_3 (9x+9) + \log_{x+1} 3\right| < \frac{20}{3}.$$

162. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y-1} \sqrt{x+2} = \log_{2y+1} x; \\ \log_x \left(\dfrac{x^3}{2y+1} \right) = \log_{2y-1} (x+2). \end{cases}$$

Решить неравенство (**163–164**).

163. $\left|4^{\sqrt{x+2}} - \dfrac{4}{3}\right| + 6 \le \dfrac{7}{3} \cdot 4^{\sqrt{x+2}+1} - 3 \cdot 16^{\sqrt{x+2}}.$

164. $\log_{(4-x)^4} (1-x)^2 + \log_{(x-4)^2} (6-x) \le 1.$

165. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-4)(x+1) = y(y+5); \\ \log_{x-2} (2+y) = \dfrac{x-2}{y^2}. \end{cases}$$

166. Решить неравенство $\dfrac{1}{\left|\log_2 \dfrac{x}{2}\right| - 3} \le \dfrac{1}{\left|\log_8 x^3\right| - 2}.$

Решить систему уравнений (**167–169**).

167. $\begin{cases} \log_2^2 (x+y) + \log_{\frac{1}{2}} (x+y) \log_{\frac{1}{2}} (x-2y) = 2\log_2^2 (x-2y); \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$

168. $\begin{cases} \dfrac{\log_2 (x+2y-5)}{\log_2 (3x-2y+1)} = \dfrac{\log_3 (2x-y)-1}{\log_3 (2x+y-4)}; \\ y^2 + xy + 1 = 2x^2 + 2y + x. \end{cases}$

169. $\begin{cases} x + 2y^2 - y^4 = e^x; \\ \arccos x + 2 \operatorname{arctg} y = 0. \end{cases}$

Решить неравенство (**170–171**).

170. $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x}\le\log_{25}9.$

171. $(20-11x)\cdot\log_{5x-9}\left(x^2-4x+5\right)\le 0.$

ГЛАВА 5. Комбинаторика и элементы теории вероятностей

§ 5.1. Элементарные правила комбинаторики

Правило сложения (правило «или»): если элемент множества A_1 можно выбрать n_1 способами, элемент множества A_2 можно выбрать n_2 способами, элемент множества A_3 — n_3 способами, ..., элемент A_k — n_k способами, и множества A_1, A_2, A_3, ..., A_k не пересекаются, то выбор одного из элементов множеств A_1 или A_2, или A_3, или ..., или A_k осуществляется $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ способами.

Задача 1. Дан правильный 24-угольник. Найти количество способов выбора троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен $45°$ (порядок вершин в тройках не важен).

Решение. Обозначим через A_1 множество всех треугольников с двумя углами по $45°$, вершины которых являются тройками вершин данного 24-угольника, а через A_2 — множество всех треугольников с одним углом в $45°$, вершины которых являются тройками вершин данного 24-угольника.

Если в треугольнике из $A_1 \cup A_2$ один из углов равен $45°$, то одна из его сторон должна быть диагональю 24-угольника, делящей его на два многоугольника, точно один из которых 7-угольник (т. е. содержит 6 последовательных сторон данного 24-угольника). Такие диагонали назовем *простыми*.

Так как любой треугольник из A_1 является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого являются простыми диагоналями с общей вершиной, то элемент множества A_1 можно выбрать 24 способами (по числу вершин 24-угольника).

Так как точно одна из сторон произвольного треугольника из A_2 является простой диагональю d, а противоположная ей вершина — одной из $24-9=15$ вершин 24-угольника (исключаем 7 вершин, образующих 7-угольник с d, а также по одной вершине, которые образуют с d треугольник из A_1). Так как простых диагоналей 24, то элемент множества A_2 можно выбрать $24 \cdot 15 = 360$ способами.

Итак, по правилу сложения выбор элементов множеств A_1 или A_2 может быть осуществлен $24+360=384$ способами.

Правило умножения (или правило «и»): если элемент множества A_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого такого выбора элемент множества A_2 можно выбрать n_2 способами, ..., после $k-1$ предыдущих выборов элемент множества A_k можно выбрать n_k способами, то выбор k элементов из A_1, A_2, A_3, ..., A_k в указанном порядке может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Задача 2. (0,1)-словом длины 10 назовем последовательность из 10 нулей и единиц (0 и 1 являются в данном случае алфавитом). Сколько таких слов?

Решение. На первую позицию можно поставить 0 или 1 (две возможности), на вторую позицию — аналогично 2 возможности, и т. д. Согласно правилу умножения, всего будет $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{10}$ возможностей.

Решение этой задачи обещается легко на случай, когда необходимо подсчитать число слов длины n, а сами слова формируются из алфавита, состоящего из k различных символов: всего таких слов будет k^n.

Задача 3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что в этих числах все цифры должны быть разными?

Решение. Первой цифрой может быть любая из девяти цифр (т. е. 9 возможностей), 2-й цифрой, после выбора первой, может быть любая из 8 оставшихся цифр, 3-й цифрой, после выбора первых двух, может любая из 7 оставшихся. Согласно правилу умножения всего таких возможностей будет $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Правило двойного подсчета. Пусть даны два множества A и B, а также некоторый набор I упорядоченных пар (a, b), где элементы a выбираются из множества A, а элементы b выбираются из множества B. В этом случае говорят, что задана система смежностей (A, B, I). При этом если $(x, y) \in I$, то x, y называются **смежными**. Обозначим через $r(a)$ число элементов из B, смежных с a, а через $s(b)$ — число элементов из A, смежных с b. Тогда сумма всех $r(a)$ равна сумме всех $s(b)$, т. е. $\sum\limits_{a \in A} r(a) = \sum\limits_{b \in B} s(b)$.

Задача 4. Найти с абсолютной погрешностью, не превосходящей 1, среднее число $\tilde{t}(i)$ натуральных делителей всех натуральных чисел i от 1 до n, т. е. число $\tilde{t}(n) = \dfrac{t(1) + t(2) + \ldots + t(n)}{n}$.

Решение. Пусть $A = B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Скажем что a из A и b из B смежны, если a является делителем b. Так как в данном случае $s(b) = t(b)$, то по правилу двойного подсчета

$$\tilde{t}(n) = \frac{s(1) + s(2) + \ldots + s(n)}{n} = \frac{r(1) + r(2) + \ldots + r(n)}{n}.$$

Но $r(i)$ — это количество натуральных чисел, не превосходящих n, которые делятся на i, а это числа $i, 2i, 3i, \ldots, pi$, где $p = \left[\dfrac{n}{i}\right]$. В итоге получаем:

$$\tilde{t}(n)=\frac{r(1)+r(2)+\ldots+r(n)}{n}=\frac{\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]}{n}\approx$$

$$\approx\frac{\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\ldots+\frac{n}{n}}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

причем ошибка при переходе от $\left[\frac{n}{i}\right]$ к $\frac{n}{i}$ менее 1 для всех i, а значит менее 1 для всей суммы (которая делится на n).

Отметим, что величина $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ называется n-м *гармоническим числом*. Из высшей математики известно, что это число с ростом n приближается к числу $\ln n$.

При использовании правила двойного подсчета оптимальность решения задачи зависит от способа задания системы смежностей. Продемонстрируем это на примере следующей задачи.

Задача 5. Никакие три диагонали выпуклого 10-угольника не пересекаются в одной точке. Найти число точек пересечения диагоналей.

Решение. Способ 1. Пусть T — множество всех точек пересечения диагоналей, число x которых надо определить, D — множество всех диагоналей данного 10-угольника. Скажем, что t из T и d из D смежны, если t принадлежит d. Так как никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, то $r(t)=2$ для каждой точки t из T, и следовательно, $\sum_{t\in T} r(t)=2x$.

Рассмотрим теперь диагональ d, по разные стороны от которой лежит соответственно i и $8-i$ вершин 10-угольника ($i=1, 2, 3, 4$). Каждая диагональ, соединяющая вершины по разные стороны от диагонали d (и только такие диагонали), пересекает d. По правилу умножения всего таких пересечений будет $i(8-i)$, т. е. $s(d)=i(8-i)$.

Непосредственно проверяется, что число диагоналей d, для которых $s(d)=i(8-i)$ при $i\neq 4$ равно 10, а при $i=4$ равно 5.

Поэтому $\sum\limits_{d\in D} s(d)=10\cdot\sum\limits_{i=1}^{3} i(8-i)+5\cdot 4\cdot 4$.

По правилу двойного подсчета имеем:

$$\sum_{d\in D} s(d)=\sum_{t\in T} r(t) \Rightarrow 10\cdot\sum_{i=1}^{3} i(8-i)+5\cdot 4\cdot 4=2x \Rightarrow x=210.$$

Способ 2. Пусть T — множество всех точек пересечения диагоналей, число x которых надо определить, V — множество всех выпуклых 4-угольников, вершины которых совпадают с вершинами данного 10-угольника. Скажем, что t из T и v из V смежны, если t является пересечением двух диагоналей 4-угольника v. Так как никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, то $r(t)=1$ для каждой точки t из T, и следовательно, $\sum\limits_{t\in T} r(t)=\underbrace{1+1+..+1}_{x}=x$.

Так как любой 4-угольник v из V определяет одну точку пересечения диагоналей данного 10-угольника, то для каждого элемента v $s(v)=1$ и, следовательно, $\sum\limits_{v\in V} s(v)=\underbrace{1+1+...+1}_{|V|}=|V|$,

где $|V|$ — число выпуклых 4-угольников, вершины которых совпадают с вершинами данного 10-угольника. Но $|V|$ равно числу способов выбора четырех вершин из 10, т. е. $|V|=C_{10}^{4}$ (см. определение числа сочетаний).

По правилу двойного подсчета имеем:

$$\sum_{t\in T} r(t)=\sum_{v\in V} s(v) \Rightarrow x=|V|=C_{10}^{4}=210.$$

В комбинаторных задачах на делимость для сокращения перебора возможных ситуаций необходимо работать с *остатками от деления*, а не с исходными числами или цифрами.

Задача 6. В 5-значном числе $*1*2*$ некоторые цифры заменены звездочками. Известно, что число делится нацело на 15. Найти количество таких 5-значных чисел.

Решение. Обозначим первую, третью и пятую цифры 5-значного числа соответственно через a, b, c.

Среди цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по три числа имеют остаток k при делении на 3, где $k = 0, 1, 2$. Поэтому, если число $d = b + 1 + 2 + c$ дает остаток k при делении на 3, то для делимости числа $a + d$ на 3 цифра a должна давать остаток $3 - k$, т. е. в этом случае для выбора a имеется 3 возможности. А так как для выбора цифры b имеется 10 возможностей и для выбора цифры c имеется 2 возможности (0 или 5), то по правилу умножения всего возможностей для последовательного выбора цифр b, c, a будет $10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$.

Задача 7. Число 52 168 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 38-значное число делилось нацело на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Рассмотрим остатки при делении на 3 всех цифр данного 40-значного числа n: 24 цифры дают остаток 2, 8 цифр дают остаток 1 и 8 цифр дают остаток 0.

Сумма всех цифр числа n, равная 176, дает остаток 2 при делении на 3. Поэтому при выборе двух цифр a и b для вычеркивания необходимо обеспечить, чтобы их сумма при делении на 3 давала остаток 2. Это достигается в следующих ситуациях:

- a и b дают остаток 1 при делении на 3; всего таких возможностей $C_8^2 = 28$;
- одна из цифр a или b дает остаток 2 при делении на 3, а другая — остаток 0; всего таких возможностей $24 \cdot 8 = 192$.

Кроме того, надо исключить удаление двух последних цифр 6 и 8, иначе полученное число не будет делиться на 2.

Итак, искомое число способов равно $28 + 192 - 1 = 219$.

Задача 8. Найти количество натуральных чисел k, не превосходящих 291 000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 291.

Решение. Так как $k^2-1=(k-1)(k+1)$, $291=97\cdot 3$, то возможны четыре случая:

1) $k+1=291t$, $t\in\mathbf{Z}$; 2) $k-1=291t$, $t\in\mathbf{Z}$;

3) $\begin{cases} k+1=97t; \\ k-1=3s, \end{cases}$ $t,\ s\in\mathbf{Z}$; 4) $\begin{cases} k-1=97t; \\ k+1=3s, \end{cases}$ $t,\ s\in\mathbf{Z}$.

В первом случае остаток от деления числа k на 291 равен 290, во втором случае остаток от деления числа k на 291 равен 1. Чтобы найти остаток от деления числа k на 291 в третьем случае, решим диофантово уравнение $97t-1=3s+1$: $97t-3s=2 \Rightarrow$ частное решение $(-1,-33)$, откуда $t=-1+3m$, $m\in\mathbf{Z}$. Следовательно,

$$k+1=97t=97(-1+3m)=291m-97 \Rightarrow k=291m-98,$$

т. е. остаток от деления числа k на 291 равен 193. Аналогично показывается, что в четвертом случае остаток от деления числа k на 291 равен 98.

Итак, условиям задачи удовлетворяют числа, дающие остатки 1, 98, 193, 290, и только они. Таких чисел точно 4 из каждых 291 подряд идущих натуральных чисел. И так как $291000=291\cdot 1000$, то всего таких чисел $4\cdot 1000=4000$.

§ 5.2. Размещения, сочетания, перестановки

Пусть дано множество из n различных элементов. Из этого множества могут быть образованы подмножества из m элементов $(0\le m\le n)$. Например, из 5 элементов a, b, c, d, e могут быть отобраны комбинации по 2 элемента — ab, cd, eb, ba, ce и т. д., комбинации по 3 элемента — abc, cbd, cba, ead и т. д.

Если комбинации считаются различными как по составу элементов, так и по порядку расположения элементов в них, то такие комбинации называют **размещениями из n элементов по m**. Число размещений из n элементов по m равно

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n!$ равно произведению n первых чисел натурального ряда, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Другими словами, A_n^m равно числу m-элементных упорядоченных подмножеств в множестве из n элементов.

Задача 1. Расписание одного дня состоит из 4 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Решение. Каждый вариант расписания представляет набор пяти дисциплин из 11, отличающийся от других вариантов как набором дисциплин, так и порядком их следования (или и тем, и другим), т. е. является размещением из 11 элементов по 4.

Число вариантов расписаний, т. е. число размещений из 11 по 4, равно $A_{11}^4 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$.

Если комбинации из n элементов по m считаются различными только по составу элементов в них, то их называют **сочетаниями из n элементов по m**. Число сочетаний из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

По определению $0! = 1$, поэтому $C_n^0 = 1$. Другими словами, C_n^m равно числу m-элементных неупорядоченных подмножеств в множестве из n элементов. Из определения следует равенство $C_n^m = C_n^{n-m}$ для любого натурального m от 0 до n.

Числа C_n^m называются **биномиальными коэффициентами**.

Задача 2. В шахматном турнире участвуют 14 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Решение. Каждая партия играется двумя участниками из 14 и отличается от других только составом пар участников, т. е. представляет собой сочетание из 14 элементов по 2. Их число равно $C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{1 \cdot 2} = 91$.

Иногда, за занимательной формулировкой с конкретными числовыми данными скрывается *классическая комбинаторная задача* (мы это уже видели на примере задачи 2). В подобных случаях полезно перейти к более общей формулировке, не зависящей от конкретных чисел, чтобы в аналогичных задачах использовать уже когда-то найденный удачный подход к решению.

Задача 3. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по шести различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не остался пустым?

Решение. Положим монеты в ряд и поставим между ними 5 перегородок. Будем считать, что i-я перегородка отделяет монеты i-го кошелька от монет $(i+1)$-го кошелька. Другими словами, перед i-й перегородкой находятся монеты i-го кошелька. Количество способов, которыми можно поставить 5 перегородок, равно числу сочетаний по 5 из 11 возможных позиций, т. е. равно C_{11}^5.

Переформулируем эту задачу так: сколькими способами можно представить число 12 в виде суммы шести натуральных чисел, если учитывать порядок слагаемых (т. е. найти число упорядоченных разбиений числа 12 на 6 слагаемых)? Метод решения задачи 3 легко обобщается на общий случай количества упорядоченных разбиений числа n на k слагаемых: таких разбиений C_{n-1}^{k-1}.

Задача 4. На фирме работают 8 аудиторов, среди которых 1 программист. В командировку надо отправить группу из трех аудиторов. Сколькими способами можно сформировать тройку аудиторов для командировки?

Решение. Очевидно, всего таких троек C_8^3. Однако для вывода классического рекуррентного соотношения между биномиальными коэффициентами, проведем подсчет иным способом.

Обозначим через A_1 множество всех возможных троек аудиторов без программиста, через A_2 — множество всех возможных троек аудиторов, включающих программиста. Элемент множества A_1 можно выбрать C_7^3 способами, элемент множества A_2 можно выбрать C_7^2 способами. В силу правила сложения, тройку аудиторов можно сформировать $C_7^3 + C_7^2$ способами.

Отсюда получаем равенство: $C_7^3 + C_7^2 = C_8^3$.

Это частный случай рекуррентного соотношения $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$, которое можно доказать абсолютно аналогичными рассуждениями.

В задачах на размещения и сочетания обращайте внимание на то, подсчет каких подмножеств предлагается проводить — *упорядоченных* или *неупорядоченных*.

Задача 5. Сколькими способами можно расположить в ряд 7 белых и 5 черных шаров так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: 1) черные шары не различимы; 2) черные шары разные.

Решение. Положим белые шары в ряд. Тогда черные шары можно положить по одному на восемь мест: 6 мест между парами белых шаров и 2 места — справа и слева от белых шаров. Поэтому:

- в случае 1 необходимо найти число 5-элементных неупорядоченных подмножеств (позиций для пяти черных шаров) в множестве из 8 элементов (всех возможных позиций), и оно равно $C_8^5 = 56$;
- в случае 2 необходимо найти число 5-элементных упорядоченных подмножеств в множестве из 8 элементов, и оно равно $A_8^5 = 6720$.

Размещения и сочетания в более сложных задачах используются в комбинации с элементарными правилами комбинаторики.

Задача 6. 13 спутников обеспечивают информационное обслуживание n городов. Любые шесть из спутников «накрывают» все города (т. е. каждый город накрывается хотя бы одним из этих шести), но для любых пяти спутников найдется город, который не накрывается ими. При каком минимальном количестве городов n это может быть?

Решение. Обозначим $k = C_{13}^5$. Пусть T — множество всех наборов из 5 спутников, т. е. $|T| = k$, и пусть G — множество всех городов. Скажем, что t из T и g из G смежны, если спутники из t не накрывают город g. Согласно условию, $r(t) \geq 1$. Докажем, что $s(g) \leq 1$. Предположим противное: $s(g) \geq 2$, т. е. найдутся два набора спутников t_1 и t_2, смежные с g. Другими словами, ни один из спутников в $t_1 \bigcup t_2$ не накрывает город g. Но в $t_1 \bigcup t_2$ содержится по меньшей мере 6 различных спутников, а это противоречит условию, что эти шесть спутников накрывают все города. Итак, $s(g) \leq 1$.

С учетом правила двойного подсчета имеем:

$$k = |T| \leq \sum_{t \in T} r(t) = \sum_{g \in G} s(g) \leq |G| = n.$$

Доказано, что число городов n не может быть меньше $k = C_{13}^5$.

Ситуация, при которой $n = k$ и условия задачи выполняются, следующая: если $T = \{t_1, t_2, ..., t_k\}$, $G = \{g_1, g_2, ..., g_k\}$, то для каждого $i = 1, 2, ..., k$ положим, что спутники из t_i не накрывают город g_i, но накрывают все остальные города (т. е. $r(t_i) = s(g_i) = 1$).

Ответ: наименьшее количество городов равно C_{13}^5.

Размещения из n элементов по n называются **перестановками из n элементов**. Число перестановок из n элементов равно $A_n^n = n!$ и обозначается через P_n.

Задача 7. Порядок выступления 8 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение. Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т. е. является перестановкой из 8 элементов. Их число $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$.

Если в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент — n_2 раз, ..., k-й элемент — n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то такие перестановки называют **перестановками с повторением из n элементов**. Число перестановок с повторениями из n элементов равно

$$P_k\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Задача 8. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 повторяются по 2 раза?

Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр ($n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, и их сумма равна 7), т. е. является перестановкой с повторением из 7 элементов. Их число равно

$$P_7\left(3, 2, 2\right) = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

Подход к решению комбинаторной задачи часто зависит от интерпретации ее условия. Поэтому не стоит огорчаться, если ваше решение не совпадает с авторским. Критерием правильности вашего решения может служить ответ, который, конечно же, не зависит от способа решения.

Задача 9. Необходимо раздать 15 курсовых работ четырем студентам A, B, C, D, причем A и B должны получить по 4 работы, C должен получить 5 работ, D должен получить 2 работы. Сколькими способами можно распределить курсовые работы среди студентов A, B, C, D?

Решение. 1-й подход к решению. Студенту A можно выделить 4 работы C_{15}^{4} способами. Из оставшихся 11 работ студенту B можно выделить 4 работы C_{11}^{4} способами. Из оставшихся 7 работ студенту C можно выделить 5 работ C_{7}^{5} способами. В результате, студенту D останется 2 работы (один вариант возможен). По правилу умножения общее число способов равно $C_{15}^{4} \cdot C_{11}^{4} \cdot C_{7}^{5} \cdot 1 = 9\ 459\ 450$.

2-й подход к решению. А теперь попробуем «распределить» студентов среди курсовых работ. В этом случае студенты A и B должны «повторяться» по 4 раза, студент C — 5 раз, студент D — 2 раза. Таким образом, имеем перестановки из 15 элементов, количество которых $\dfrac{15!}{4! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 2!} = 9\ 459\ 450$.

§ 5.3. Пространство случайных событий и классическое определение вероятности события

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Рассмотрим пример. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

События называют **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Например, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости — равновозможные события. Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из событий ω_i $(i = 1, 2, ..., n)$. События ω_i называют **элементарными событиями** (**элементарными исходами**). Уже отсюда следует, что элементарные события попарно несовместны. Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют **пространством элементарных событий** Ω.

Событие A отождествляют с подмножеством пространства Ω, элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие A; событие B есть подмножество Ω, элементы которого есть исходы, благоприятствующие B, и т. д. Таким образом, множество всех событий, которые могут наступить в испытании, есть множество всех подмножеств Ω. Само Ω наступает при любом исходе испытания, поэтому Ω — достоверное событие; пустое подмножество пространства Ω — невозможное событие (оно не наступает ни при каком исходе испытания). Элементарные события выделяются из числа всех событий тем, что каждое из них содержит только один элемент Ω.

Каждому элементарному исходу ω_i ставят в соответствие положительное число p_i, называемое **вероятностью** этого исхода, при этом должно выполняться равенство $\sum_i p_i = 1$. По определению, вероятность $P(A)$ события A равна сумме вероятностей элементарных исходов, благоприятствующих A. Очевидно, вероятность события достоверного равна 1, невозможного — 0, произвольного — заключена между 0 и 1.

В дальнейшем, при упоминании элементарных исходов, слово «элементарный» будем опускать. В решениях, где это удобно, вместо исхода будем использовать термин «случай». Рассмотрим важный частный случай, когда все исходы равновозможные. Число исходов равно n, сумма вероятностей всех исходов равна 1; следовательно, вероятность каждого равна $\frac{1}{n}$. Пусть событию A благоприятствует m исходов. Тогда вероятность события A равна сумме вероятностей исходов, благоприятствующих A: $P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$. Учитывая, что число слагаемых равно m, имеем $P(A) = \frac{m}{n}$.

Задача 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие «набрана нужная цифра». Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможные и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A) = \frac{1}{10}$.

Задача 2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4 (событие A).

Решение. Общее число равновозможных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$ (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только 3 исхода: $(1;3)$, $(3;1)$, $(2;2)$ (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Относительная частота события A определяется формулой:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число появлений события, n — общее число испытаний.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события. Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

§ 5.4. Вычисление вероятности с использованием комбинаторики

Комбинаторные методы позволяют решать довольно сложные задачи теории вероятностей, опираясь только на классическое определение вероятности события.

Задача 1. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Карточки в случайном порядке прикладываются одна к другой: 1) 3 карточки; 2) все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово: 1) ТОР, 2) ТЕОРИЯ?

Решение.

1. Пусть событие A = «получение слова ТОР». Различные комбинации трех букв из имеющихся шести представляют размещения, т. к. могут отличаться как составом входящих букв, так и порядком их следования (или и тем, и другим), т. е. общее число случаев $n = A_6^3$, из которых благоприятствует событию A $m = 1$ случай. Отсюда
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_6^3} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{120}.$$
2. Пусть событие B = «получение слова ТЕОРИЯ». Различные комбинации шести букв из имеющихся шести представляют собой перестановки, т. к. отличаются только порядком следования букв; т. е. общее число случаев $n = P_6 = 6!$, из которых благоприятствует событию B $m = 1$ случай. Поэтому
$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Задача 2. Найти вероятность того, что получится слово АНАНАС, если на отдельных карточках написаны три буквы А, две буквы Н и одна буква С, а карточки в случайном порядке прикладываются одна к другой.

Решение. Способ 1. Пусть событие B = «получение слова АНАНАС». Общее число случаев $n = P_6 = 6!$. Перестановка трех букв А, не меняющая собранное из карточек слово АНАНАС, осуществляется $P_3 = 3!$ способами, а перестановка двух букв Н, не меняющая собранное из карточек слово АНАНАС, осуществляется $P_2 = 2!$ способами. Поэтому по правилу произведения число случаев m, благоприятствующих событию B, равно $m = P_3 \cdot P_2$.

Итак,
$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{P_3 \cdot P_2}{P_6} = \frac{3!\,2!}{6!} = \frac{1}{60}.$$

Способ 2. Рассматривая комбинации букв как перестановки с повторениями, из которых событию B благоприятствует 1 комбинация, имеем:

$$P(B)=\frac{1}{P_6(3;\,2;\,1)}=\frac{1}{\dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}}=\frac{1}{60}.$$

Задача 3. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента — разрядники?

Решение. Пусть событие $A=$«3 выбранных наудачу студента являются разрядниками». Общее число случаев выбора 3-х студентов из 30 равно $n=C_{30}^3$, т. к. комбинации из 30 студентов по 3 представляют собой сочетания, ибо отличаются только составом студентов. Точно так же число случаев, благоприятствующих событию A, равно $n=C_{10}^3$.

Итак, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_{10}^3}{C_{30}^3}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}:\dfrac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{6}{203}$.

Задача 4. В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже с 2-го по 9-й. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут: 1) на 6-м этаже; 2) на одном этаже?

Решение.

1. Пусть событие $A=$«все пассажиры выйдут на 6-м этаже». Каждый пассажир может выйти на любом из 8 этажей со 2-го по 9-й этаж (8 вариантов). По правилу произведения общее число способов выхода четырех пассажиров из лифта равно $n=8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=8^4$. Число случаев, благоприятствующих событию A, равно $m=1$. Таким образом, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{8^4}=0{,}00024$.
2. Пусть событие $B=$«все пассажиры выйдут на одном этаже». Теперь событию B будут благоприятствовать $m=8$ случаев (все пассажиры выйдут или на 2-м этаже, или на 3-м, ..., или на 9-м этаже). Поэтому $P(B)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{8}{8^4}=\dfrac{1}{8^3}=0{,}00195$.

Задача 5. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: 1) 6 видов спорта; 2) 4 вида спорта.

Решение.

1. Пусть событие $A =$ «угадывание всех 6 видов спорта из 45». Общее число всех случаев, т. е. всех вариантов заполнения карточек спортлото, равно $n = C_{45}^{6}$, т. к. каждый вариант заполнения отличается только составом видов спорта. Число случаев, благоприятствующих событию A, есть $m = 1$. Поэтому
$$P(A) = \frac{1}{C_{45}^{6}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40} \approx 0{,}0000001.$$
2. Пусть событие $B =$ «угадывание 4 видов спорта из 6 отобранных из 45». Число способов, какими можно выбрать 4 вида спорта из 6 отобранных, равно C_6^4. К каждой комбинации 4-х выигравших видов спорта из 6 следует присоединить комбинацию 2-х не выигравших видов из $45 - 6 = 39$; таких комбинаций C_{39}^{2}. По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию B, равно $m = C_6^4 \cdot C_{39}^{2}$.

   Итак, $$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^4 \cdot C_{39}^{2}}{C_{45}^{6}} = 0{,}00136.$$

Задача 6. В партии 100 изделий, из которых 4 — бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся: 1) одному потребителю; 2) обоим потребителям поровну?

Решение.

1. Пусть событие $A =$ «все бракованные изделия достанутся одному потребителю». Общее число способов, какими можно выбрать 50 изделий из 100, равно $n = C_{100}^{50}$. Событию A благоприятствуют случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будет либо 46 стандартных из 96 (и все 4 бракованных) изделий, либо 50 стандартных из 96 (и 0 бракованных); их число $m = C_{96}^{46} \cdot C_4^4 + C_{96}^{50} \cdot C_4^0$. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{96}^{46}\cdot C_4^4+C_{96}^{50}\cdot C_4^0}{C_{100}^{50}}=\frac{C_{96}^{46}\cdot 1+C_{96}^{46}\cdot 1}{C_{100}^{50}}=\frac{2C_{96}^{46}}{C_{100}^{50}}=$$

$$=\frac{2\cdot 96!\cdot 50!\cdot 50!}{46!\cdot 50!\cdot 100!}=\frac{2\cdot 96!\cdot 46!\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{46!\cdot 96!\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0{,}117,$$

где $100!=96!\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100$, $50!=46!\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50$.

2. Пусть событие $B=$ «в каждой партии по 2 бракованных изделия». Теперь событию B будут благоприятствовать случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будут 48 стандартных из 96 и 2 бракованных из 4, их число $m=C_{96}^{48}\cdot C_4^2$. Поэтому

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_{96}^{48}\cdot C_4^2}{C_{100}^{50}}=\frac{96!\cdot 4!\cdot 50!\cdot 50!}{48!\cdot 48!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 100!}=$$

$$=\frac{96!(2!\cdot 3\cdot 4)(48!\cdot 49\cdot 50)^2}{(48!)^2\cdot 2!\cdot 2(96!\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100)}=\frac{3\cdot 4(49\cdot 50)^2}{2\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0{,}383.$$

§ 5.5. Теорема сложения и умножения вероятностей

Суммой $A+B$ событий A и B называют событие, состоящее в появлении либо только события A, либо только события B, либо и события A, и события B одновременно.

Событием, противоположным событию A, называют событие $\overline{A}$, которому благоприятствуют все элементарные события, не благоприятствующие событию A.

Напомним: события называют **несовместными**, если они не могут происходить одновременно в одном и том же испытании. Например, выигрыш, ничейный исход и проигрыш одного игрока в одной партии в шахматы — три несовместных события. События называют **совместными**, если они могут происходить одновременно. Например, при бросании двух монет выпадение решки на одной не исключает появления решки на другой монете.

Теорема 5.1. *Вероятность суммы двух несовместных событий* A и B (появления хотя бы одного события) равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема обобщается на любое число попарно несовместных событий.

Следствие 5.1. Сумма вероятностей *противоположных событий* A и $\overline{A}$ равна 1: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Задача 1. Наудачу берется трехзначное число. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры совпадают?

Решение. Данный опыт состоит в том, что наудачу берется натуральное число из чисел от 100 до 999 и смотрят, есть ли в нем одинаковые цифры. Очевидно, что исходы «взяли наудачу трехзначное число» равновероятны, число этих исходов $n=900$. Введем событие $A=$«у выбранного числа совпадают хотя бы две цифры». Проще подсчитать вероятность противоположного события $\overline{A}=$ «у выбранного числа все цифры различны». Количество благоприятных событий равно $m=9\cdot 9\cdot 8$ (нуль не может быть первой цифрой). Тогда

$$P(\overline{A})=\frac{9\cdot 9\cdot 8}{900}=0{,}72 \text{ и } P(A)=1-0{,}72=0{,}28.$$

Произведением AB **двух событий** A и B называется событие, состоящее в совместном выполнении события A и события B.

Теорема 5.2. *Вероятность суммы двух совместных событий* A и B (появление хотя бы одного события) равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления, т. е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Вероятность суммы трех событий A, B, C (появление хотя бы одного события) равна

$$P(A+B+C)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Частным случаем приведенной формулы является теорема 5.1 для несовместных событий, т. к. их совместное наступление есть невозможное событие и $P(AB)=0$.

Задача 2. Школьнику надо сдать зачет по математике. В каждом билете — по два вопроса. Всего 25 билетов. Из них 5 билетов школьник вообще не учил. В каждом из оставшихся 20 билетов он хотя бы один вопрос выучил, причем в 18 билетах школьник выучил первый вопрос и в 15 билетах — второй вопрос. Школьник может получить удовлетворительную оценку, если вытащит такой билет, оба вопроса которого он знает. Какова вероятность того, что школьник сдаст зачет, если он первый тянет билет?

Решение. Обозначим через A событие «школьнику достанется билет, первый вопрос которого он знает», через B событие «школьнику достанется билет, второй вопрос которого он знает», тогда событие $A+B$ означает, что школьник знает хотя бы один вопрос в 20 билетах. Событию $A+B$ благоприятствуют 20 билетов из 25, поэтому $P(A+B)=\frac{20}{25}$. Остается определить вероятность $P(AB)$, где событие AB означает, что школьник ответит на два вопроса билета.

Из условия задачи имеем вероятности $P(A)=\frac{18}{25}$ и $P(B)=\frac{15}{25}$, поэтому по теореме 5.2:

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=\frac{18}{25}+\frac{15}{25}-\frac{20}{25}=\frac{13}{25}=0{,}52.$$

Два случайных события называют **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события называют **зависимыми**.

Теорема 5.3. *Вероятность произведения* (совместного появления) *двух независимых событий* равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Теорема обобщается на любое число попарно независимых событий.

Следствие 5.2. Вероятность появления хотя бы одного события из n попарно независимых событий равна разности между 1 и произведением вероятностей событий, противоположных данным:

$$P(A)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdots P\left(\overline{A_n}\right).$$

Задача 3. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех пушек равны соответственно 0,8, 0,7, 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий. Поэтому события $A=$ «попадание первого орудия», $B=$ «попадание второго орудия», $C=$ «попадание третьего орудия» независимы. Вероятности противоположных событий (т. е. вероятности промахов) соответственно равны 0,2, 0,3, 0,1. Поэтому в силу следствия 5.2: $P(A)=1-0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}994$.

Теорема 5.4. *Вероятность произведения* (совместного появления) *двух зависимых событий* A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т. е.

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$$

Задача 4. Среди претендентов на работу в рекламной фирме 30% женщин, причем дискриминация по гендерному признаку при отборе претендентов исключена. Политика фирмы такова, что приблизительно 25% работников должны получать высокую заработную плату, причем приблизительно 6% женщин должны получать высокую заработную плату. Какова вероятность того, что новый работник будет получать высокую заработную плату при условии, что он является женщиной?

Решение. Пусть событие A = «новый работник является женщиной», событие B = «новый работник будет иметь высокую заработную плату». Тогда вероятность того, что новый работник будет получать высокую заработную плату при условии, что он является женщиной, равна $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,06}{0,30} = 0,2$. Заметим, что ввиду $0,2 < 0,25$ шансов получить высокую зарплату при устройстве на работу на этой фирме для женщины ниже, чем для мужчины.

Задача 5. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: 1) только 2-й экзамен; 2) только один экзамен; 3) три экзамена; 4) по крайней мере два экзамена; 5) хотя бы один экзамен.

Решение.

1. Обозначим события: A_i = «студент сдаст i-й экзамен» $(i = 1,2,3)$; B = «студент сдаст только 2-й экзамен из трех». Очевидно, что $B = \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}$, т. е. совместное осуществление трех событий, состоящих в том, что студент сдаст 2-й экзамен и не сдаст 1-й и 3-й экзамены. Учитывая, что события A_1, A_2, A_3 независимы, получим:

   $$P(B) = P\left(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) P(A_2) P\left(\overline{A_3}\right) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,2 = 0,018.$$

2. Пусть событие C = «студент сдаст один экзамен из трех». Очевидно, событие C произойдет, если студент сдаст только 1-й экзамен из трех, или только 2-й, или только 3-й, т. е.

   $$P(C) = P\left(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3\right) =$$

   $$= 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,8 = 0,044.$$

3. Пусть событие D = «студент сдаст все три экзамена», т. е. $D = A_1 A_2 A_3$. Тогда

   $$P(D) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 0,648.$$

4. Пусть событие E = «студент сдаст по крайней мере два экзамена» (иначе: «хотя бы два экзамена» или «не менее двух» эк-

заменов). Очевидно, что событие E означает сдачу любых двух экзаменов из трех либо всех трех экзаменов, т. е.

$$E = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3$$

и, следовательно,

$$P(E) = 0,9\cdot 0,9\cdot 0,2 + 0,9\cdot 0,1\cdot 0,8 + 0,1\cdot 0,9\cdot 0,8 +$$
$$+\ 0,9\cdot 0,9\cdot 0,8 = 0,954.$$

5. Пусть событие $F =$ «студент сдал хотя бы один экзамен» (иначе: «не менее одного» экзамена). Очевидно, что событие F представляет сумму событий C (см. пункт 2) и E (см. пункт 4), т. е. $F = A_1 + A_2 + A_3 = C + E$. Однако проще найти вероятность события F, если перейти к противоположному событию, включающему всего один вариант — $\overline{F} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. Итак,

$$P(F) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0,1\cdot 0,1\cdot 0,2 = 0,998,$$

т. е. сдача хотя бы одного экзамена из трех является событием практически достоверным.

Задача 6. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов — K_2 и K_3. Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

Решение. Обозначим события: $A_i =$ «выход из строя элемента K_i« $(i = 1, 2, 3)$; $B =$ «разрыв электрической цепи». Очевидно, по условию, событие B произойдет, если произойдет либо событие A_1, либо A_2A_3, т. е. $B = A_1 + A_2A_3$. Теперь по теореме 5.2:

$$P(B) = P(A_1 + A_2A_3) = P(A_1) + P(A_2A_3) - P\left[A_1(A_2A_3)\right] =$$
$$= P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0,1 + 0,2\cdot 0,3 - 0,1\cdot 0,2\cdot 0,3 = 0,154$$

(при использовании теоремы 5.3 учтена независимость событий A_1, A_2 и A_3).

Задача 7. Производительности трех станков, обрабатывающих одинаковые детали, относятся как 1:3:6. Из не рассортированной партии обработанных деталей взяты наудачу две. Какова вероятность, что: 1) только одна из них обработана на 3-м станке; 2) обе обработаны на одном станке?

Решение.

1. Обозначим $A_i =$ «деталь обработана на i-м станке» $(i = 1, 2, 3)$;

   $B =$ «одна из двух взятых деталей обработана на 3-м станке». По условию

$$P(A_1) = \frac{1}{1+3+6} = 0{,}1, \quad P(A_2) = \frac{3}{1+3+6} = 0{,}3,$$

$$P(A_3) = \frac{6}{1+3+6} = 0{,}6.$$

   Очевидно, что $B = A_1A_3 + A_2A_3 + A_3A_1 + A_3A_2$ (при этом надо учесть, что либо первая деталь обработана на 3-м станке, либо вторая). По теоремам 5.1 и 5.2 (для независимых событий)

$$P(B) = P(A_1)P(A_3) + P(A_2A_3) + P(A_3A_1) + P(A_3A_2) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}48.$$

2. Пусть событие $C =$ «обе отобранные детали обработаны на одном станке». Тогда

$C = A_1A_1 + A_2A_2 + A_3A_3$ и $P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}46$.

Задача 8. Экзаменационный билет для письменного экзамена состоит из 10 вопросов — по 2 вопроса из 20 по каждой из пяти тем, представленных в билете. По каждой теме студент подготовил лишь половину всех вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на один вопрос по каждой из пяти тем в билете?

Решение. Обозначим события: $B_i =$ «студент подготовил хотя бы один вопрос билета из двух по i-й теме» $(i = 1, 2, ..., 5)$; $C =$ «студент сдал экзамен». В силу условия $C = B_1B_2B_3B_4B_5$. Полагая ответы студента по разным темам независимыми, по теореме 5.2 $P(C) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4)P(B_5)$. Так как вероятности $P(B_i)$ равны между собой, то $P(C) = (P(B_1))^5$.

Вероятность $P(B_1)$ можно найти по следствию 5.2: если A_1 = «студент подготовил 1-й вопрос билета по первой теме», A_2 = «студент подготовил 2-й вопрос билета по первой теме», то

$$P(B_1) = P(A_1 + A_2) = 1 - P\left(\overline{A_1 A_2}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{29}{38}.$$

Отсюда $P(C) = \left(\frac{29}{38}\right)^5 \approx 0,259$.

Задача 9. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что: 1) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания; 2) для запуска двигателя придется включить зажигание не более трех раз.

Решение.

1. Обозначим события: A = «двигатель начнет работать при каждом включении зажигания»; B = «то же при третьем включении зажигания». Очевидно, что $B = \overline{A}\overline{A}A$ и $P(B) = P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right) P(A) = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,096$.

2. Пусть событие C = «для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз». Очевидно, событие C наступит, если двигатель начнет работать при 1-м включении, или при 2-м, или при 3-м включении, т. е. $C = \overline{A} + \overline{A}A + \overline{A}\overline{A}A$. Следовательно,

$$P(C) = P\left(\overline{A}\right) + P\left(\overline{A}\right) P(A) + P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{A}\right) P(A) =$$

$$= 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,936.$$

Задача 10. Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у которого первым выпадет «6 очков». Какова вероятность выигрыша игрока, бросающего игральную кость первым (вторым)?

Решение. Обозначим события: A_i = «выпадение 6 очков при i-м бросании игральной кости» $(i = 1, 2, \ldots)$; B = «выигрыш игры игроком, бросающим игральную кость первым». Тогда $P(A_i)=\frac{1}{6}$, $P(\overline{A_i})=\frac{5}{6}$ при любом i. Событие B можно представить в виде суммы вариантов: $B=A_1+\overline{A_1 A_2}A_3+\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}A_5+\ldots$ Поэтому

$$P(B)=P(A_1)+P\left(\overline{A_1 A_2}A_3\right)+P\left(\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}A_5\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\ldots$$

По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $a=\frac{1}{6}$ и знаменателем $q=\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$$P(B)=\frac{a}{1-q}=\frac{1/6}{1-(5/6)^2}=\frac{6}{11}=0{,}545.$$

Вероятность $P(\overline{B})$ выигрыша игры игроком, бросающим игральную кость вторым, равна $P(\overline{B})=1-P(B)=$ $=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}=0{,}455$, т. е. существенно меньше, чем игроком, бросающим игральную кость первым.

§ 5.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько различных трехзначных чисел можно образовать из цифр 3, 4, 5, 6, 7?

2. Сколько различных трехзначных чисел можно образовать из цифр 3, 4, 5, 6, 7 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

3. Из города A в город B ведет 5 дорог, из города A в город C ведет 4 дороги; из B в D — 3 дороги; из C в D — 6 дорог. B и C маршрутами не соединены. Сколько маршрутов можно провести между городами A и D?

4. Сколько существует делителей числа 462?

5. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга и стояли только на белых клетках?

6. В выпуклом 7-угольнике проведены всевозможные диагонали, при этом никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения указанных диагоналей?

7. Сколько диагоналей в выпуклом 33-угольнике?

8. В выпуклом 10-угольнике проведены все диагонали. На сколько частей они делят 10-угольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

9. Сколькими способами 12 команд могут быть разбиты на пары для проведения первого круга соревнований (разбиения, отличающиеся только порядком команд внутри пар и порядком расположения пар, считаются одинаковыми)?

10. Буквы и знаки препинания азбуки Морзе представляют собой набор символов тире и точек. Сколько букв и знаков препинания может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более пяти символов (тире и точек)?

11. Сколько существует натуральных чисел n со следующим свойством: если к n справа приписать число 1600, то полученное число будет делиться на n?

12. Дан правильный 18-угольник. Найти количество неупорядоченных четверок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырехугольника, в котором хотя бы один угол равен $90°$.

13. На клетчатой доске размера 31×19 (длина стороны клетки 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами 5 и 7 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

14. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^3 y^2 = 15^{15} \cdot 20^{20}$?

15. Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 8, 9, если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется?

16. На подготовительных курсах изучаются 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

17. Для участия в первенстве университета по легкой атлетике необходимо составить команду из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 7 бегунов?

18. Во взводе 30 солдат. Сколькими способами можно выделить трех солдат в караул, если один из них должен быть старшим?

19. В чемпионате по футболу было сыграно 276 матчей. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в чемпионате?

20. Сколько различных перестановок можно образовать из букв слова «водоворот»?

21. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 6 защитников и 9 нападающих. Сколькими способами можно образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

22. Сколькими способами можно раздать 32 карты четырем игрокам так, чтобы каждый получил 8 карт?

23. На конференции должны выступить 5 ученых, среди которых ученые A и B из Китая. Сколькими способами можно установить очередность выступлений при условии, то ученый B не может выступать раньше ученого A?

24. Найти количество упорядоченных пар (a, b) натуральных чисел a и b, таких, что $1 \le a \le 600$, $1 \le b \le 600$, $a+b$ делится на 8, ab делится на 3.

25. Число 84605 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

26. Имеется восемь карточек с цифрами 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8. Сколько существует различных семизначных чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

27. Найти количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

28. На семинар приехали 4 ученых из Норвегии, 6 из России и 6 из Великобритании. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Найти вероятность того, что вторым окажется доклад ученого из Норвегии.

29. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 46 теннисистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Ярослав Исаков. Найти вероятность того, что в первом туре Ярослав Исаков будет играть с каким-либо теннисистом из России?

30. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет четной и больше 3?

31. В чемпионате мира участвует 10 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по две команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Канады окажется в пятой группе?

32. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Результат округлить до сотых.

33. На фабрике керамической посуды 10% произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найти вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлить до сотых.

34. Выбирается случайное трехзначное число. Найти вероятность того, что оно делится на 51.

35. Найти вероятность того, что в написании наудачу взятого двузначного числа встречается цифра 5.

36. Наугад называется натуральное число, не превышающее 200. Какова вероятность того, что оно делится на 3, но не делится на 2?

37. При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 6 очков. Найти вероятность того, что в первый раз выпало меньше 3 очков.

38. В кармане у Саши 4 монеты по рублю и 2 монеты по 2 рубля. Саша, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найти вероятность того, что обе двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

39. В группе туристов 10 человек, среди которых турист A. С помощью жребия они выбирают четырех человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что A пойдет в магазин?

40. В классе 33 учащихся, среди них два друга — Олег и Вадим. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найти вероятность того, что Олег и Вадим окажутся в одной группе.

41. В классе 16 учащихся, среди них два друга — Олег и Вадим. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найти вероятность того, что Олег и Вадим окажутся в одной группе.

42. На окружности радиуса R наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше R? Ответ округлить до сотых.

43. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найти вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 5, но не дойдя до отметки 11 часов.

44. На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,35. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,25. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найти вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

45. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 16 пассажиров, равна 0,96. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,55. Найти вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 15.

46. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найти вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

47. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найти вероятность того, что А. выиграет оба раза.

48. Биатлонист 9 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что биатлонист первые 4 раза попал в мишени, а последние пять промахнулся. Результат округлите до сотых.

49. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,04. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найти вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

50. Перед началом волейбольного матча капитаны четырех команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с тремя другими командами. Найти вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую и последнюю игры.

51. Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

52. На рис. 5.1 изображен лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может.

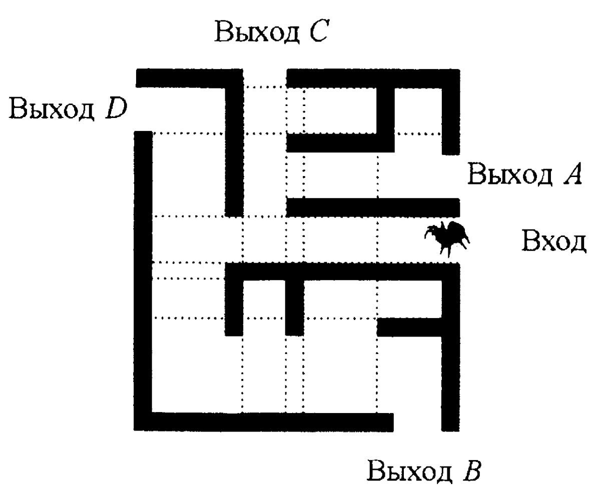


Рис. 5.1

На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому еще не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определить, с какой вероятностью паук придет к выходу D.

53. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,998?

54. Пять учеников вытягивают на экзамене пять билетов, один из которых очень легкий. Какова вероятность для того, кто идет третьим, вытащить легкий билет?

55. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 7 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 6 очков, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найти вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Известно, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

56. В магазине стоят два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,09 независимо от другого автомата. Найти вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

57. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найти вероятность того, что в этих играх «Биолог» проиграет жребий ровно один раз.

58. Чтобы поступить в институт на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 63 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 63 баллов по каждому из трех предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 63 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,6 и по обществознанию — 0,9. Найти вероятность того, что А. сможет поступить только на одну из двух упомянутых специальностей.

59. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70% этих стекол, вторая — 30%. Первая фабрика выпускает 1% бракованных стекол, а вторая — 3%. Найти вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

60. Ковбой попадает в муху на стене с вероятностью 0,7, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,1. На столе лежат 10 револьверов, из них только 5 пристрелянные. Ковбой видит муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найти вероятность того, что ковбой промахнется.

61. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найти вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

62. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 85% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 10% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 55% яиц. Найти вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

63. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 14 июня погода в Волшебной стране хорошая. Найти вероятность того, что 17 июня в Волшебной стране будет отличная погода.

64. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что мишень будем поражена (одним из выстрелов).

65. В некоторой местности наблюдения показали: если июньское утро ясное, то вероятность дождя в этот день 0,1; если июньское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,4; вероятность того, что утро в июне будет пасмурным, равна 0,3. Найти вероятность того, что в случайно взятый июньский день дождя не будет.

Ответы

К главе 1

1. 4. **2.** 9. **3.** 3 и 8. **4.** $6-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **5.** 1. **6.** 10. **7.** 2. **8.** 55. **9.** 2. **10.** 3,5625.
11. 0,0625. **12.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **13.** 1,6. **14.** 21. **15.** 3. **16.** 0. **17.** 1) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{7}}{\sqrt{a}-\sqrt{7}}$;
2) $\sqrt[4]{b}+\sqrt[3]{c}$; 3) $x+\sqrt{xy}+y$. **18.** $(2m+1)^2$. **19.** -1. **20.** $x+y$. **21.** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.
22. 9. **23.** 0,05. **24.** 12. **25.** 3. **26.** 10. **27.** 18. **28.** 7. **29.** 3. **30.** -8.
31. 8; 40. **32.** 427 416, 427 427. **33.** -4. **34.** -2; -1. **35.** $-\frac{2}{3}$. **36.** 3.
37. -2. **38.** 1. **39.** $-2,5$. **40.** -1; 1. **41.** 24. **42.** 35. **43.** $6\pi+4$. **44.** 8.
45. $6-\pi$. **46.** 1) 8π; 2) 6π; 3) $4\pi+4$. **47.** $\frac{625}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{5}+\operatorname{arctg}\frac{5}{3}\right)-\frac{144\pi}{2}$.
48. 66,1. **49.** Нет. **50.** 66. **51.** 3. **52.** 10. **53.** 192. **54.** 2187. **55.** 16. **56.** 7.
57. 45 100. **58.** 30. **59.** 7, -14, 28, -56. **60.** $\frac{7}{36}+\frac{403}{4\cdot 3^{200}}$. **61.** 0,4.
62. $[-1;2)$, $[-1;0)$, $(-\infty;2)$, $[0;1]$, $\varnothing$. **63.** 8. **64.** 3,5.
65. $\left(\sqrt{6+2\cos a-4\sin}+1\right)^2-5$, $\pi-\operatorname{arctg}2$. **66.** $10+2\sqrt{5}$. **67.** 4. **68.** 2,5.
69. 1) да; 2) 96. **70.** 1) нет; 2) да; 3) 2.

К главе 2

1. $(4;27)$, $(2;-17)$, $(22;423)$, $(-16;307)$. **2.** $(-6;-7)$, $(-2;3)$, $(4;-5)$. **3.** 416. **4.** $(0;6)$. **5.** 22. **6.** 65. **7.** 2. **8.** 36. **9.** 0. **10.** $\frac{143}{3}$. **11.** 8.
12. 24. **13.** $(6;16)$. **14.** $-0,75$; 3. **15.** $-4,2$. **16.** 3; $\frac{2}{3}$. **17.** $-2,5$; 2.
18. $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. **19.** 1. **20.** 1; $-0,5$; $1\pm\sqrt{2}$. **21.** $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$. **22.** -3; 4; $-3\pm\sqrt{21}$.
23. 1; 4. **24.** $(-\infty;-9]\cup[-2;-1]\cup[1;+\infty)$.

25. $[-4;\,-3)\cup[-1{,}5;\,0)\cup[1;\,+\infty)$. **26.** $\left(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2};\,\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}\right)$. **27.** 28.

28. 9. **29.** 5. **30.** –6. **31.** –0,625. **32.** 1. **33.** $\varnothing$. **34.** $-1;\,-\dfrac{1}{6}$.

35. $\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{3},\,\dfrac{1}{4}\right)$. **36.** –4. **37.** $(-2;\,1)$. **38.** 4. **39.** $(2;\,0)$, $(2;\,2)$.

40. $\left[\dfrac{17}{9};\,14\right]$. **41.** –1; 0; 8. **42.** $(-4;\,0)\cup(0;\,+\infty)$. **43.** 8. **44.** –0,5; 0.

45. –13. **46.** $\left(-\dfrac{8}{3};\,+\infty\right)$. **47.** $(-\infty;\,-2)$. **48.** $[0;\,4)$. **49.** $(-0{,}9;\,-0{,}5)$.

50. $(2{,}5;\,+\infty)$. **51.** $\left(-\dfrac{1}{4};\,1\right)$. **52.** $\left[\dfrac{-7-3\sqrt{5}}{2};\,-4+2\sqrt{3}\right]$. **53.** $[-2;\,-0{,}5]$.

54. 2. **55.** –5. **56.** $\left[2\sqrt{2};\,\dfrac{11}{3}\right]$. **57.** $(0;\,1)\cup[5;\,6)$. **58.** $\left(-\dfrac{2}{3};\,2\right)$.

59. $x^2+\left(4-a^2\right)x+5=0$, $a=\pm\sqrt{10}$. **60.** $(3;\,3)$; $(-3;\,-3)$; $\left(\sqrt{3};\,2\sqrt{3}\right)$; $\left(-2\sqrt{3};\,-\sqrt{3}\right)$. **61.** $[0{,}5;\,1]$. **62.** –2; 3. **63.** 4; $\dfrac{17+\sqrt{33}}{2}$.

64. $\left[-2;\,2-\sqrt{2}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};\,3\right]$. **65.** $\left[\dfrac{5-\sqrt{41}}{2};\,2\right]$. **66.** $-\dfrac{1}{5}\cup[1;\,+\infty)$.

67. $(-\infty;\,-8)\cup(-7;\,-3)\cup(-2;\,-1)\cup\left[\dfrac{\sqrt{129}-11}{2};\,+\infty\right)$.

68. 1) –3; 4; 2) $(-\infty;\,-3)\cup(4;\,+\infty)\cup\left\{\dfrac{\sqrt{29}-7}{2}\right\}$. **69.** $a=-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

70. $(-\infty;\,0)\cup[0{,}75;\,+\infty)$. **71.** $-\dfrac{2}{3};\,\dfrac{1}{2};\,2$. **72.** $(-\infty;\,-3]\cup[3;\,+\infty)$. **73.** $\varnothing$.

74. $(-8;\,12{,}5]$. **75.** –13; –11. **76.** $(6;\,+\infty)$. **77.** $(-\infty;\,0]\cup[1]\cup[2;\,+\infty)$.

78. 0. **79.** 6. **80.** 2. **81.** 18. **82.** 6. **83.** $[1;\,34]$. **84.** $[-1;\,0)$. **85.** –8. **86.** 17.

87. 23. **88.** –3. **89.** –13. **90.** 21. **91.** 4. **92.** $\left(1;\,\sqrt{2}\right)$. **93.** $[0;\,1]$.

94. $(-\infty;\,0]\cup[1;\,+\infty)$. **95.** $-\dfrac{11}{3}$, 3. **96.** 0; 6. **97.** $\left[4;\,\sqrt{41}+1\right]$. **98.** $[4;\,8)$.

99. $\left(-\dfrac{5}{4};\,\dfrac{1}{2}\right)$. **100.** $(-\infty;\,-1)\cup(4;\,+\infty)\cup[0]$. **101.** $(-9;\,-7]$.

102. $[-5;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **103.** $(-\infty;\ -3)\cup\left(1;\ \frac{19}{10}\right]\cup(4;\ +\infty)$.

104. $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$. **105.** $\left[-\sqrt[3]{\frac{5}{12}};\ \sqrt{2}\right)$.

106. $[-18;\ -3)\cup(0;\ 2)\cup(9;\ +\infty)$. **107.** $\left[0;\ \frac{8}{3}\right]\cup(4;\ 5]\cup\left[\frac{10}{3}\right]$. **108.** 1.

109. $[-3;\ -2)\cup\left(-\frac{6}{5};\ -1\right)\cup(1;\ 2]$. **110.** $\left(0;\ \frac{3}{16}\right)\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **111.** –3. **112.** 9.

113. –3; 6. **114.** $\frac{14}{13}$. **115.** 4. **116.** $(-4;\ 0)$.

117. $(-\infty;\ -5]\cup[2;\ +\infty)\cup[-2]\cup[-0{,}5]$. **118.** –7. **119.** –9. **120.** $\left(-1;\ \sqrt[3]{4}\right)$.

121. 30. **122.** 3. **123.** –4. **124.** 3. **125.** –3. **126.** 0. **127.** 2. **128.** $\varnothing$. **129.** 2. **130.** $\varnothing$. **131.** 1. **132.** 5. **133.** $\varnothing$. **134.** 7. **135.** 4. **136.** 2. **137.** –4; –13.

138. 0,25. **139.** 80; –109. **140.** 1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. **141.** 1; $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$. **142.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

143. $(-\infty;\ 1]$. **144.** $(6;\ +\infty)$. **145.** 4. **146.** 98. **147.** 18. **148.** –2. **149.** –4.

150. 28. **151.** $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$. **152.** $\frac{50}{9}$. **153.** $(\pm 2;\ \pm 6)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{8}{17}};\ \pm 8\sqrt{\frac{8}{17}}\right)$.

154. $(4;\ -3;\ 0)$, $(2;\ -1;\ 2)$. **155.** $(2;\ 1)$. **156.** $(2;\ -1)$.

157. $(2;\ 3)$, $\left(\frac{13}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$. **158.** $(1;\ 7)$, $(7;\ -8)$, $\left(\frac{49}{64};\ \frac{41}{8}\right)$. **159.** $(0;\ \pm 3;\ \pm 3)$.

160. $\left(4;\ 2;\ -\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **161.** $(1;\ 1;\ 0)$. **162.** $(0;\ -6)$.

163. $(0;\ \pm 1)$, $(\pm 1;\ 0)$. **164.** $(3;\ -2)$. $(-2;\ 3)$. **165.** $(1;\ 1)$; $(-0{,}5;\ -2)$.

166. $(3;\ \pm 4)$, $\left(-1;\ \pm 2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$. **167.** $(-1;\ 2;\ -3)$. **168.** $(-1{,}5;\ 2)$.

169. $(\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3)$. **170.** $\varnothing$. **171.** $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$. **172.** $(9;\ 4)$, $\left(\frac{529}{54};\ \frac{1}{54}\right)$.

173. $(3;\ 4)$, $(4;\ 3)$, $\left(11\pm 2\sqrt{31};\ 11\mp 2\sqrt{31}\right)$. **174.** –11. **175.** 1. **176.** –1.

177. –1. **178.** 34. **179.** 32. **180.** $\varnothing$. **181.** $(4;\ 2)$, $(-4;\ -2)$.

182. $(12;\ -2)$, $\left(\frac{8}{3};\ \frac{4}{9}\right)$. **183.** $(125;\ 5)$, $\left(\pm 4\sqrt{2};\ 2\right)$.

184. $\left(\frac{7}{12}; -1; \frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{12}; 1; -\frac{5}{6}\right)$. **185.** $(\pm 1; -3)$. **186.** $(0; 0)$, $(\pm 2; 4)$.

187. $(-1; 2)$, $\left(3; -\frac{2}{3}\right)$. **188.** $\left(-\frac{3^{2/3}}{7^{1/3}}; -\frac{3^{1/3}}{7^{2/3}}\right)$, $\left(\frac{1}{7^{1/3}}; \frac{2}{7^{2/3}}\right)$.

189. $(4; 5)$, $\left(-\frac{1+\sqrt{133}}{2}; \frac{41-8\sqrt{133}}{33}\right)$. **190.** $\left(-\frac{43}{12}; \frac{29}{12}\right)$, $(4; -3)$, $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **191.** $(0; 0; 0)$, $(1; -2; -1)$, $\left(\frac{17\pm\sqrt{37}}{6}; \frac{-1\pm\sqrt{37}}{3}; \frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}\right)$.

192. $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$; $(0; 0; 1)$, $(2; 2; 2)$, $\left(-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $\left(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right)$. **193.** $(-1; 0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{113}}{2}; \frac{-29+3\sqrt{113}}{9}\right)$. **194.** $(-7; -14)$, $(-4; -8)$.

195. $(\pm 1; \pm 1)$, $(3; -1)$, $(-3; 1)$. **196.** $(1; -1)$, $(2; -0{,}5)$. **197.** $(2; -2)$, $(-1, -2)$, $\left(-4\pm 2\sqrt{6}; -8\pm 4\sqrt{6}\right)$. **198.** $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

199. $(-\infty; 0)\cup\left[\frac{3}{8}; +\infty\right)$. **200.** $a\in(0; 1)\cup(1; 4]$. **201.** 475. **202.** 1360.
203. 132. **204.** 46. **205.** 20. **206.** 100. **207.** 14; 2. **208.** 8. **209.** 480.
210. 40; 50. **211.** 60; 40. **212.** 900. **213.** 80. **214.** 10; 15.
215. 15; 95. **216.** 37. **217.** 2,4; 4,8. **218.** 50; 40; 10. **219.** 2.
220. 1161,1; 271; 1039,4; 2579,8. **221.** 7. **222.** 6400; 600. **223.** 26; 6.
224. 4; 12. **225.** 180. **226.** 2,5. **227.** 28; 56. **228.** 10; 20. **229.** 4.
230. 8 км/ч, 7 км/ч. **231.** 33. **232.** 1,125. **233.** 10. **234.** 14. **235.** 285 714.
236. 46 656. **237.** 10. **238.** 34. **239.** 6. **240.** 1,5. **241.** 120. **242.** 4; 12; 36.
243. 9. **244.** 3 993 000 руб. **245.** 6 млн руб.

К главе 3

1. 3. **2.** $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **3.** 1. **4.** 135°. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 1. **8.** –3. **9.** 8. **10.** 1. **11.** 1.

12. 0,2. **13.** 0,625. **14.** 4. **15.** 0,125. **16.** –0,5. **17.** $\frac{\sqrt{2}}{512}$. **18.** 0,5. **19.** –0,5.

20. –2. **21.** $3\pi-8$. **22.** 45°. **23.** $6-2\pi$. **24.** $6\pi-16$. **25.** $\frac{9\pi}{14}$. **26.** 50°.

27. $-0{,}5$. **28.** $[-12;-2]$. **29.** $\left[2-\sqrt{26};\,2+\sqrt{26}\right]$. **30.** $[-2;\,4{,}125]$.

31. $360°$. **32.** 12π. **33.** $[60°;\,90°]$. **34.** 1. **35.** $\frac{4}{5}$. **36.** $\left(-\infty;\,\frac{5}{2}\right]$.

37. $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **38.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$. **39.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$; πn.

40. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{12}+\pi n$. **41.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$.

42. $150°+360°n$. **43.** $\frac{\pi}{10}+\frac{4}{5}\pi k$; $-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}\pi n$. **44.** $2\pi k$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$.

45. $2\pi k$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **46.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; πn. **47.** πk. **48.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$.

49. $-45°$. **50.** 4. **51.** $-45°$. **52.** 1. **53.** $180°$. **54.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{7\pi}{6}+2\pi m$.

55. $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\pi n$. **56.** $\frac{\pi k}{6}$. **57.** $x=\pi k$, $y=\frac{\pi n}{2}$, $z=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$. **58.** πk.

59. $\frac{\pi k}{2}$. **60.** $\frac{7\pi}{12}+\pi k$. **61.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$. **62.** πk; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **63.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.
64. $90°$. **65.** 5. **66.** $150°$. **67.** 3. **68.** $-720°$. **69.** 5. **70.** $540°$. **71.** -3.

72. $360°$. **73.** $\varnothing$. **74.** $(1,-1)$. **75.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$.

76. $\pi+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$. **77.** $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$. **78.** πn, $\frac{2\pi}{5}+\pi n$, $\frac{4\pi}{5}+\pi n$.

79. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, πn, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$.

80. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{3}+\pi n$. **81.** $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi n$.

82. $\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n$. **83.** πn, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **84.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

85. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **86.** $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $\operatorname{arctg}2+\pi+2\pi n$.

87. $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}+2\pi n$. **88.** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\,\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$.

89. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\,\pi+2\pi n\right)$. **90.** $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\,\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$. **91.** $\left(\frac{\pi n}{2};\,\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$.

92. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right)$. **93.** 8. **94.** 0; $2\sin 1$. **95.** $(-0{,}5;\ 0{,}5)$. **96.** $[1;\ 2]$. **97.** 10. **98.** 1; $1\pm\sqrt{2}$. **99.** −1. **100.** 28. **101.** 2; 1; 0. **102.** 0,5. **103.** 3. **104.** 3. **105.** 20. **106.** $\left[\frac{1}{2};\ 1\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$. **107.** 6. **108.** −38. **109.** 4. **110.** 3. **111.** $\left(-\infty;\ \frac{3}{11}\right)$. **112.** $[-24;\ 24]$.

К главе 4

1. −1. **2.** −0,2. **3.** 9. **4.** 1. **5.** 4. **6.** 2. **7.** $\frac{2a+4}{2-a}$. **8.** +. **9.** +. **10.** 1 при $x>1$. **11.** $\frac{1}{\log_5^2 x}$ при $0<x<1$. **12.** 15. **13.** $a(b+3)$. **14.** $\frac{3a-2b}{b+1}$. **15.** $\frac{3-3a}{1+b}$. **16.** 7. **17.** 1. **18.** −2. **19.** 0. **20.** $\log_4 5>\log_5 6$. **21.** $\log_3 10+4\lg 3>4$. **22.** $\log_2 24-1>\log_3 6+1$ **23.** 2. **24.** $(-\infty;\ 4]$. **25.** 0. **26.** ±0,5. **27.** 3. **28.** ±1. **29.** $\frac{5}{3}$. **30.** ±2. **31.** 0. **32.** $(1;\ 4)$. **33.** 4. **34.** 2. **35.** $(-\infty;\ 5)$. **36.** $(0;\ 1)$. **37.** 3. **38.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **39.** 2. **40.** 1; $\log_2\left(3+\sqrt{29}\right)-1$. **41.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **42.** 7. **43.** −0,2; 0,5; 1; 3. **44.** 2; 4; 11. **45.** 3; $3\log_6 2$. **46.** 0. **47.** 315°. **48.** 44. **49.** −3. **50.** $-2-\log_7 3$. **51.** 5. **52.** 1. **53.** $(\pm 1;\ 4n+1),\ n\in\mathbf{Z}$. **54.** ∅. **55.** 1. **56.** 1. **57.** 3. **58.** 1. **59.** $(4;\ 3)$. **60.** $(1;\ 1)$, $\left(\frac{9}{4};\ \frac{27}{8}\right)$. **61.** $(\pm 2;\ \pm 2)$. **62.** $(2;\ 3)$. **63.** 1. **64.** 2. **65.** 35. **66.** 2. **67.** 2. **68.** 2. **69.** $[0;\ 6]$. **70.** $[0{,}5;\ 1)$. **71.** 0. **72.** $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$. **73.** 0,125. **74.** $(2;\ +\infty)$. **75.** $(-\infty;\ -8]\cup[4;\ +\infty)$. **76.** $[0;\ 4]$. **77.** 0. **78.** 1. **79.** 13. **80.** −7. **81.** 13. **82.** −2. **83.** 3; 81. **84.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **85.** $-\frac{4}{3}$; $-\frac{5}{6}$; $-\frac{1}{2}$; 0. **86.** $1\pm\sqrt{\log_5 9}$. **87.** 81; $\sqrt[4]{3}$. **88.** 10; 10^{-1}. **89.** 10; 10^{-3}.

90. 20. **91.** –99; –19; –17; 63. **92.** 1. **93.** –30°. **94.** 6.

95. $(2;\,1)$, $\left(\sqrt{2};\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **96.** $(2;\,2)$. **97.** $(4;\,10)$. **98.** $(-10;\,-0{,}001)$.

99. $(1;\,1{,}04)\cup(26;\,+\infty)$. **100.** $\left[\frac{1}{9};\,\frac{1}{3}\right)\cup[1;\,3]$. **101.** 1. **102.** 6. **103.** 5.

104. 4. **105.** 0. **106.** –1. **107.** 0,2; $\sqrt{5}$. **108.** 2^{12}. **109.** 2; 4. **110.** 10^{-1}.

111. 3. **112.** –1. **113.** –1. **114.** 2. **115.** 8. **116.** 1. **117.** 1. **118.** 10; 10^{10}.

119. 1; 0,5. **120.** 1; 30. **121.** $\frac{1}{9}$; 1; 3. **122.** 2. **123.** $(4;\,16)$.

124. $\left(\frac{1}{2};\,1\right)\cup\left(1;\,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\,2\right)$. **125.** $(1;\,5]$. **126.** –3. **127.** $(0;\,2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$.

128. $\left(\frac{1}{2};\,1\right)$. **129.** $\{2\}\cup(4;\,+\infty)$. **130.** $[1;\,2]$. **131.** $[-9;\,-2]\cup(1;\,1{,}5]$.

132. $(2{,}5;\,3]$. **133.** 3. **134.** 4. **135.** 6. **136.** 12. **137.** 3. **138.** 3. **139.** –2.

140. –80. **141.** –4. **142.** 0. **143.** $(0{,}5;\,1)$. **144.** –3. **145.** –8. **146.** 165°.

147. 10. **148.** 36. **149.** –6. **150.** 13. **151.** 36.

152. $\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\,-1\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\,0\right)\cup\left(0;\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

153. $\left(1-\sqrt{\frac{7}{2}};\,-2\right)\cup(-2;\,-1]\cup\left[-\frac{1}{3};\,\frac{9-\sqrt{65}}{8}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-1;\,1\right)$.

154. $(-5;\,-4)\cup[1;\,+\infty)$. **155.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+3}{2}+\pi n$.

156. $\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right\}\cup[1;\,+\infty)$. **157.** $\{4\}$; $\{-2\}$. **158.** 7. **159.** $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};\,5\right]$.

160. $\left(-5;\,2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. **161.** $\left(-\frac{26}{27};\,\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-1\right)\cup\left(\sqrt[3]{3}-1;\,26\right)$.

162. $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\,\frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2},\,\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$. **163.** $\left[-2;\,-\frac{7}{4}\right]$.

164. $(-\infty;\,1)\cup(1;\,2]\cup(3;\,4)\cup(4;\,5)\cup[5{,}5;\,6)$. **165.** $(6;\,2)$.

166. $(0;\,0{,}25)\cup(0{,}25;\,1]\cup(4;\,16)$. **167.** $(2,\,0)$, $\left(\frac{43}{4},\,\frac{21}{4}\right)$.

168. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+1,\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}}+2\right)$. **169.** $(0;-1)$. **170.** $(0;1)\cup(1;2)$.

171. $\left(\frac{9}{5};\frac{20}{11}\right]\cup(2;+\infty)$.

К главе 5

1. 125. **2.** 60. **3.** 39. **4.** 16. **5.** 576. **6.** 35. **7.** 495. **8.** 246. **9.** 10 395. **10.** 62. **11.** 21. **12.** 540. **13.** 2592. **14.** 126. **15.** 120. **16.** 1680. **17.** 21. **18.** 12 180. **19.** 24. **20.** 7560. **21.** 2520. **22.** $\frac{32!}{(8!)^4}$. **23.** 60. **24.** 25 000. **25.** 216. **26.** 1680. **27.** 19 594. **28.** 0,25. **29.** 0,4. **30.** 0,3. **31.** 0,2. **32.** 0,14. **33.** 0,98. **34.** 0,02. **35.** 0,2. **36.** 0,165. **37.** 0,4. **38.** 0,4. **39.** 0,4. **40.** 0,3125. **41.** 0,2. **42.** 0,33. **43.** 0,5. **44.** 0,6. **45.** 0,41. **46.** 0,5. **47.** 0,168. **48.** 0,00. **49.** 0,9216. **50.** 0,125. **51.** 0,992. **52.** 0,25. **53.** 4. **54.** 0,2. **55.** 0,33. **56.** 0,9919. **57.** 0,375. **58.** 0,168. **59.** 0,016. **60.** 0,6. **61.** 0,0588. **62.** 0,6. **63.** 0,244. **64.** 0,84. **65.** 0,81.