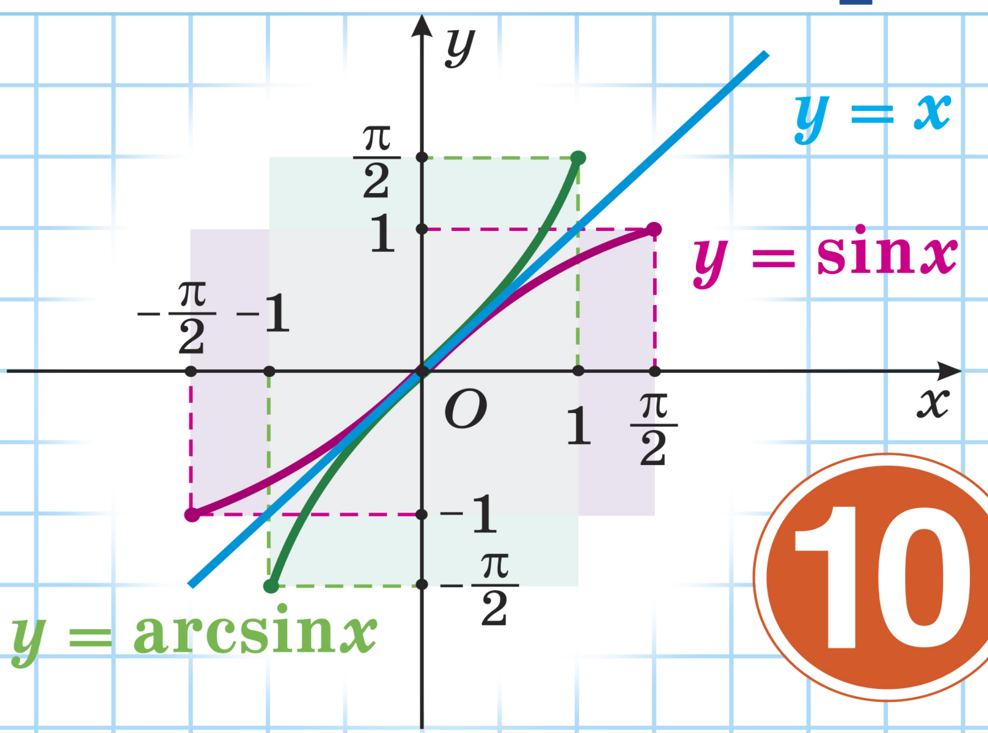
И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

СБОРНИК ЗАДАЧ по алгебре



10

И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

СБОРНИК ЗАДАЧ
по алгебре

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

Минск «Народная асвета» 2020

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А80

Рецензенты:
кафедра высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета (доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой *В. В. Беняш-Кривец*); учитель математики квалификационной категории «учитель-методист» лицея Белорусского национального технического университета *О. Е. Цыбулько*

ISBN 978-985-03-3252-3

Уважаемые десятиклассники!

Это пособие поможет вам подготовиться к урокам, экзаменам и вступительным испытаниям по математике, а также углубить свои знания по алгебре.

Книга состоит из 6 глав, каждая из которых разбита на параграфы.

В главах 3, 4 и 5 размещены задания по темам, соответствующим учебному пособию «Алгебра, 10». Выполнение этих заданий потребует применения имеющихся у вас знаний.

Главы 1, 2 и 6 предлагаются для изучения математики на повышенном уровне.

Каждый параграф в этих главах включает:

- новый теоретический материал и методы его применения; алгоритмы;
- важные правила и основные примеры с решениями и подробным описанием последовательности действий;
- тренировочные упражнения и образцы применения теории в заданиях с нестандартными условиями.

В книге вы встретите следующие условные обозначения:

— новый теоретический материал и методы его применения;

— алгоритмы;

— материал повышенного уровня;

— тренировочные упражнения;

— дополнительный материал для углубления математических знаний.

Для обобщения изученного ранее материала в учебном пособии размещен раздел «Повторение. Тематические тесты».

Дополнительные материалы к книге, а также ответы к тренировочным упражнениям можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика».

Желаем успехов!

§ 1. Сложная функция

При изучении свойств функций и построении графиков часто необходимо вычислять значения функции для различных значений аргумента.

Например, для того чтобы вычислить значение функции $y=f(x)=\sqrt{x^2-4}$ по заданному значению аргумента, сначала нужно вычислить значение функции $t=g(x)=x^2-4$, а затем для найденного значения t вычислить значение функции $y=h(t)=\sqrt{t}$.

Функцию $t=g(x)=x^2-4$ называют промежуточной функцией, а функцию $y=f(x)=\sqrt{x^2-4}$ — сложной функцией и записывают в виде $y=f(x)=h(g(x))$.

Определение

Пусть заданы функции $h(x)$ и $g(x)$ такие, что $E(g(x))\subset D(h(x))$, тогда функция $y=f(x)=h(g(x))$ называется сложной функцией или композицией функций $h(x)$ и $g(x)$: $f=h\circ g$.

Пример 1. Заданы функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=2x+3$. С помощью формул задайте функции:

а) $y=f(g(x))$; б) $y=g(f(x))$.

Решение.

а) Так как для сложной функции $y=f(g(x))$ функция $g(x)$ является промежуточной, то заменим в формуле $f(x)=\sin x$ переменную x на $2x+3$. Получим сложную функцию $y=f(g(x))=\sin(2x+3)$.

б) Так как для сложной функции $y=g(f(x))$ функция $y=f(x)$ является промежуточной, то заменим в формуле $g(x)=2x+3$ переменную x на $\sin x$. Получим сложную функцию $y=g(f(x))=2\sin x+3$.

Пример 2. Укажите функции, в виде которых представлена композиция (сложная функция):

а) $y = f(g(x)) = \sqrt{2x + 7}$; б) $y = f(g(x)) = (2x^2 - 1)^5$.

Решение.

а) Установим порядок действий при вычислении значений данной функции: $x \xrightarrow{t = g(x)} 2x + 7 \xrightarrow{y = f(t)} \sqrt{t}$.

Следовательно, сложная функция $y = f(g(x)) = \sqrt{2x + 7}$ представлена в виде композиции двух функций: $t = g(x) = 2x + 7$ и $y = f(t) = \sqrt{t}$, $y = f \circ g$.

б) Установим порядок действий при вычислении значений данной функции: $x \xrightarrow{t = g(x)} 2x^2 - 1 \xrightarrow{y = f(t)} t^5$.

Следовательно, сложная функция $y = f(g(x)) = (2x^2 - 1)^5$ представлена в виде композиции двух функций: $t = g(x) = 2x^2 - 1$ и $y = f(t) = t^5$, $y = f \circ g$.

1.1. Заданы функции $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $g(x) = \sin x$; $h(x) = \sqrt[3]{x}$. С помощью формул задайте функции:

$y = f(g(x))$; $y = g(f(x))$; $y = h(g(x))$;

$y = h(f(x))$; $y = f(h(x))$; $y = g(h(x))$.

1.2. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = \frac{1}{x^4 - 1}$; в) $y = \sqrt{x - 8}$; г) $y = \frac{2x}{\sqrt{1 - x}}$.

Укажите функции, в виде которых представлена композиция.

1.3. Заданы функции $f(x) = 4 - x^3$ и $g(x) = \sqrt{x}$. Найдите: $f(g(4))$; $f(g(1))$; $g(f(0))$; $g(f(-2))$.

1.4. Докажите, что композиция двух возрастающих функций — функция возрастающая.

1.5. Докажите, что композиция двух убывающих функций — функция убывающая.

1.6. Докажите, что композиция убывающей и возрастающей функций есть убывающая функция.

1.7. Докажите, что композиция возрастающей и убывающей функций есть убывающая функция.

1.8. Заполните в тетради таблицу.

$h(x)$	$p(x)$	$h(p(x))$	$p(h(x))$
$\sqrt{x}$	$4x^3$		
		$\sqrt{3-x}$	
			$(4x-1)^5$
		$(2x+1)^3$	

1.9. Функции f и g заданы таблицами.

Значения аргумента	1	3	−2	0	−3
Значения функции f	4	2	−1	2	−4

Значения аргумента	1	3	−2	0	−3
Значения функции g	0	−3	1	−2	3

Найдите значения функции $f(g(x))$.

Значения аргумента	1	3	−2	0	−3
Значения функции $f(g(x))$					

§ 2. Обратная функция

Рассмотрим функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$, графики которых изображены соответственно на рисунках 1 и 2. Заметим, что функция $y=f(x)$ каждое свое значение принимает только при одном значении аргумен-

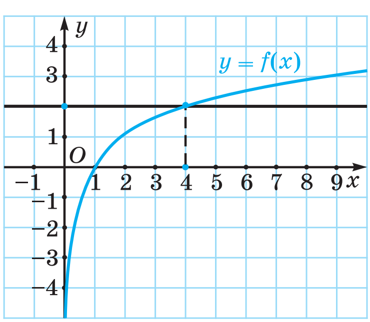


Рис. 1

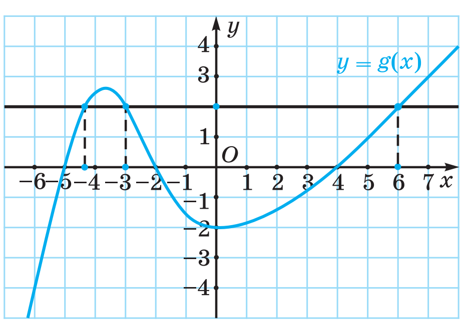


Рис. 2

та, а функция $y = g(x)$ некоторые свои значения принимает более чем при одном значении аргумента. Графически это означает, что любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции $y = f(x)$ не более чем в одной точке. Функция $y = g(x)$ таким свойством не обладает.

Определение 1

Функция, которая каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, называется **обратимой**.

Пример 1. Определите, обратима ли функция, заданная аналитически:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = x^2$.

Решение. Чтобы проверить, является ли функция обратимой, решим уравнение, задающее функцию, относительно аргумента.

а) $y = 3x - 2 \Leftrightarrow 3x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$.

Каждому значению y в этом линейном уравнении соответствует единственное значение x, т. е. зависимость x от y является функцией, значит, функция $y = 3x - 2$ обратима.

б) $y = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{y}, \\ x = -\sqrt{y} \end{array}\right.$ при $y \geqslant 0$.

Заметим, что каждому значению $y > 0$ соответствуют два значения x, значит, функция $y = x^2$ не является обратимой.

Алгоритм определения обратимости функции, заданной формулой

Пусть функция задана аналитически, т. е. формулой $y = f(x)$.

① Решить уравнение $y = f(x)$ относительно x.

② Определить, обратима ли функция: если формула, выражающая x через y, задает функцию переменной x от переменной y, то данная функция обратима.

Определение 2

Пусть задана обратимая функция $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$.

Функция $g(x)$ с областью определения $D(g) = E(f)$ и множеством значений $E(g) = D(f)$, которая каждому значению переменной y из $E(f)$ ставит в соответствие единственное значение переменной x из $D(f)$ так, что $x = g(y)$, называется обратной для функции $y = f(x)$.

Аргументом обратной функции является переменная y, а значением функции является переменная x. Обычно переменные переобозначают традиционным образом: аргумент обратной функции обозначают через x, а значения функции — через y.

Пример 2. Определите, является ли функция $y = f(x) = \frac{2}{x-3}$ обратимой. Найдите обратную к ней функцию, если она существует.

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x) = \frac{2}{x-3}$. $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Выразим переменную x через y, получим $x = \frac{2}{y} + 3$. Эта формула каждому значению $y \neq 0$ ставит в соответствие единственное значение x, значит, функция $y = f(x) = \frac{2}{x-3}$ обратима.

В формуле $x = \frac{2}{y} + 3$ переобозначим переменные, получим $y = g(x) = \frac{2}{x} + 3$ — функцию, обратную к данной. $D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(g) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Алгоритм записи функции, обратной к данной обратимой функции, заданной аналитически

Пусть задана обратимая функция $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$.

① Из равенства $y = f(x)$ выразить x через y, т. е. решить уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x.

② В полученной формуле обратной функции $x = g(y)$ обозначить аргумент функции через x, а значение функции через y.

③ Записать функцию $y = g(x)$.

④ Указать область определения и множество значений функции $y = g(x)$: $D(g) = E(f)$; $E(g) = D(f)$.

Теорема 1

Если функция является возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, то она обратима на этом промежутке, т. е. существует обратная к ней функция.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке. Это значит, что для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_1 > x_2$, следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, если функция возрастает ($f(x_1) < f(x_2)$, если функция убывает). Значит, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, и, следовательно, функция обратима.

Замечание. Если данная функция является возрастающей (убывающей), то обратная функция также является возрастающей (убывающей).

Пример 3. Определите, является ли функция $y = x^2 - 4x + 5$ для $x \in (2; +\infty)$ обратимой. Если функция обратима, то найдите обратную к ней функцию.

Решение. Определим промежутки монотонности функции $y = x^2 - 4x + 5$.

x	$-\infty \qquad 2 \qquad +\infty$
f $a > 0$	$\searrow \qquad \nearrow$

Для $x \in (2; +\infty)$ квадратичная функция $y = x^2 - 4x + 5$ является возрастающей, следовательно, она обратима на указанном промежутке.

Найдем обратную функцию по алгоритму.

Заметим, что $D(f) = (2; +\infty)$, а $E(f) = (1; +\infty)$.

① Из равенства $y = x^2 - 4x + 5$ выразим x через y, т. е. решим уравнение $y = x^2 - 4x + 5$ относительно переменной x:

$x^2 - 4x + 5 - y = 0$, $D = \sqrt{4y - 4}$, $x_1 = 2 + \sqrt{y - 1}$, $x_2 = 2 - \sqrt{y - 1}$, так как $x \in (2; +\infty)$, то выбираем $x = 2 + \sqrt{y - 1}$.

② Переобозначим переменные: $y = 2 + \sqrt{x - 1}$.

③ Получим обратную функцию

$g(x) = y = 2 + \sqrt{x - 1}$.

④ $D(g) = (1; +\infty)$, $E(g) = (2; +\infty)$.

Замечание. Если функция $y = g(x)$ является обратной к функции $y = f(x)$, то функция $y = f(x)$ является обратной к функции $y = g(x)$. Эти функции называются взаимно обратными.

Теорема 2

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство. Пусть точка $F(a; b)$ принадлежит графику обратимой функции $y = f(x)$, тогда для обратной функции $y = g(x)$ справедливо равенство $a = g(b)$, т. е. точка $G(b; a)$ принадлежит графику обратной функции (рис. 3, *а*).

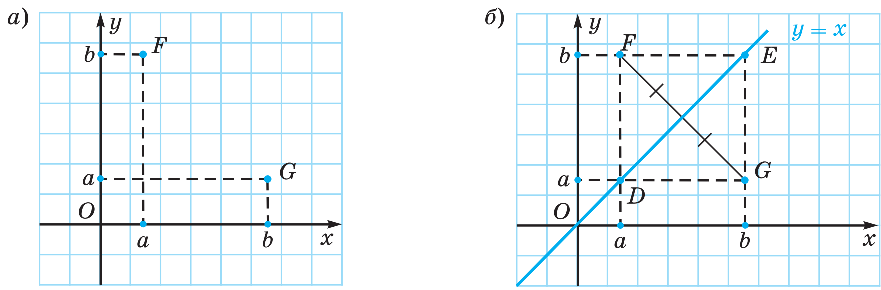


Рис. 3

Прямоугольник *FEGD* (рис. 3, *б*) является квадратом, так как его смежные стороны равны. Вершины квадрата *FEGD* — точки $D(a; a)$ и $E(b; b)$ — принадлежат прямой $y = x$. Поскольку диагонали квадрата перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, то точки F и G симметричны относительно диагонали DE, т. е. относительно прямой $y = x$. Следовательно, графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 4).

Например, изображенные на рисунке 5 графики взаимно обратных функций $y = 3x + 2$ и $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ симметричны относительно прямой $y = x$.

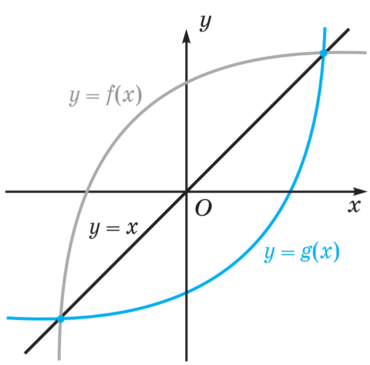


Рис. 4

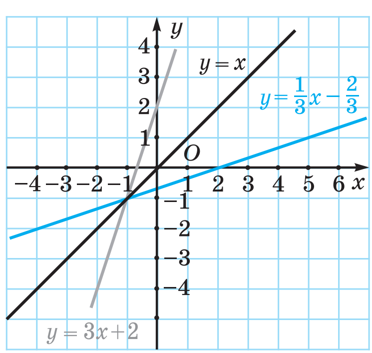


Рис. 5

Алгоритм построения графика функции, обратной к данной обратимой функции

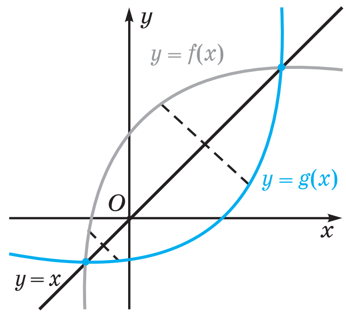


Рис. 6

① Для данной функции $y = f(x)$ указать на оси абсцисс область определения, а на оси ординат — множество значений.

② Для обратной функции отметить на оси абсцисс $D(g) = E(f)$, а на оси ординат — $E(g) = D(f)$.

③ Построить прямую $y = x$.

④ Построить график функции $y = g(x)$, симметричный графику $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$ (рис. 6).

2.1. Среди рисунков 7, *а*—*г* выберите те, на которых изображены графики обратимых функций.

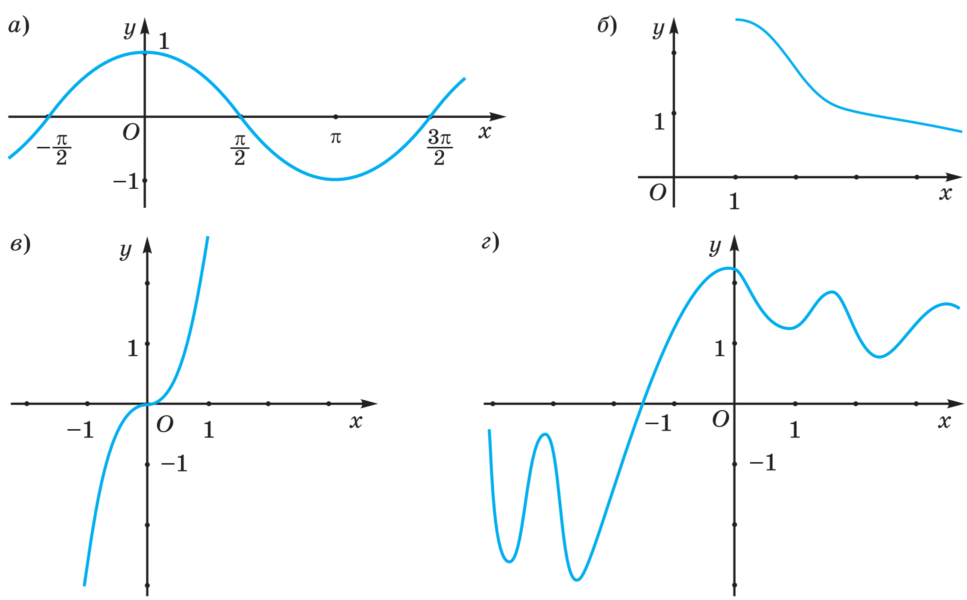


Рис. 7

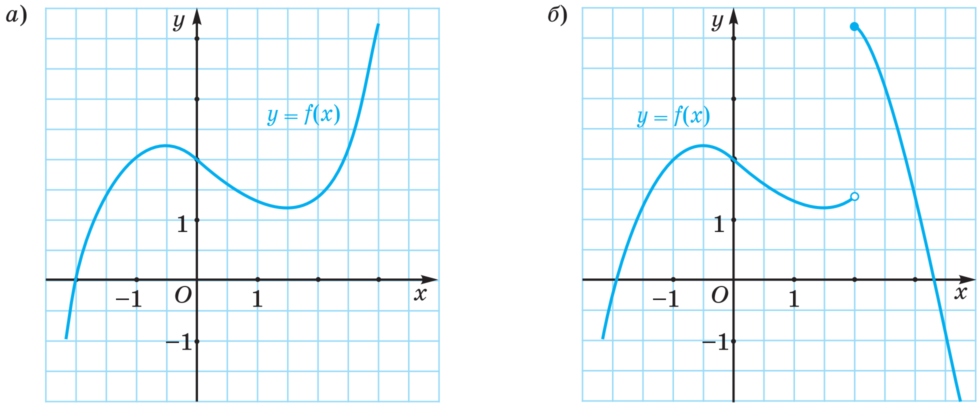


Рис. 8

2.2. На рисунке 8 изображен график функции $y = f(x)$. Докажите, что она не имеет обратной функции.

2.3. На рисунке 9 изображен график обратимой функции $y = f(x)$. Найдите значения обратной к ней функции при значениях аргумента, равных:

а) 2; 0; 1; −1; б) 0; −1; 2; 3.

Укажите область определения и множество значений обратной функции.

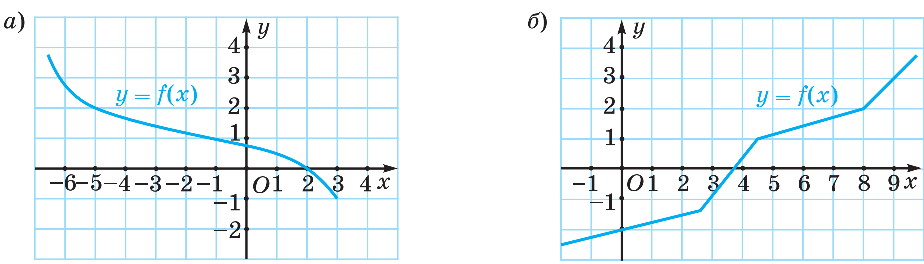


Рис. 9

2.4. Найдите функцию, обратную линейной функции $y = f(x)$:

а) $y = 4x - 1$; б) $y = -x + 1$; в) $y = 5x - 3$;
г) $y = 0{,}5x - 2$; д) $y = -0{,}5x - 1$; е) $y = -0{,}1x$.

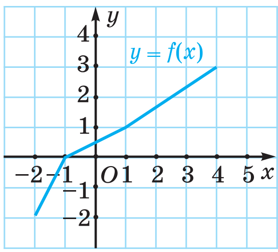
2.5. Приведите примеры графиков двух взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ таких, что $f(2) = 3$; $g(-2) = 1$.

2.6. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной к ней:

а) $y = -3x + 1$; б) $y = \sqrt{x - 4}$.

2.7. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 10). Постройте график обратной к ней функции.

а)



б)

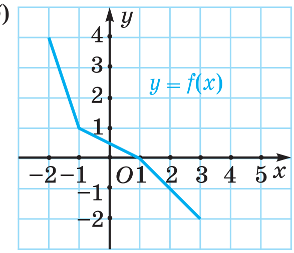


Рис. 10

2.8. Определите, является ли функция $y = -x^2 - 4x - 3$ при $x \in (-2; +\infty)$ обратимой. Если функция обратима, то найдите обратную к ней функцию.

2.9. Функция $y = f(x)$ имеет более одного нуля. Имеет ли она обратную функцию?

§ 3. Построение графиков функций $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$ с помощью преобразований графика функции $y = f(x)$

Построение графика функции $y = f(|x|)$

Пусть задан график некоторой функции $y = f(x)$ (рис. 11). Определим, какие преобразования графика этой функции нужно выполнить, чтобы получить график функции $y = f(|x|)$.

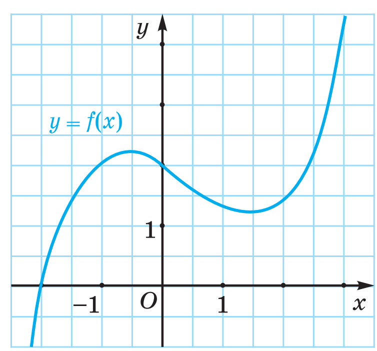


Рис. 11

Так как $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0, \end{cases}$ то

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \geqslant 0; \\ f(-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Поэтому, чтобы получить график функции $y = f(|x|)$, зная график функции $y = f(x)$ (см. рис. 11), можно рассмотреть его построение для $x \geqslant 0$ и $x < 0$.

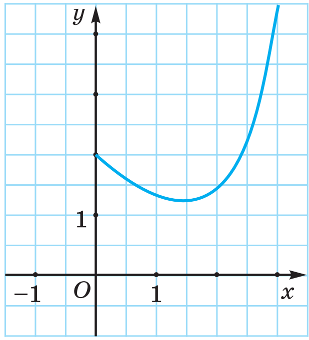


Рис. 12

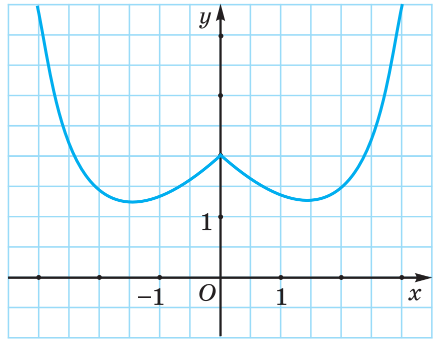


Рис. 13

Если $x \geqslant 0$, то график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ (рис. 12).

Если $x < 0$, то значения функции $y = f(|x|)$ при отрицательных значениях аргумента совпадают со значениями функции при противоположных им положительных значениях аргумента. Это значит, что точки графика функции $y = f(|x|)$ для $x < 0$ симметричны точкам графика функции $y = f(|x|)$ для $x \geqslant 0$ относительно оси ординат. Поэтому уберем часть графика функции $y = f(x)$, лежащую левее оси ординат, и отобразим симметрично относительно оси ординат часть графика функции $y = f(|x|)$, расположенную правее оси ординат.

На рисунке 13 изображен график функции $y = f(|x|)$.

Отметим, что функция $y = f(|x|)$ четная, поэтому для ее построения достаточно использовать свойство графика четной функции.

Алгоритм построения графика функции $y = f(|x|)$

① Построить график функции $y = f(x)$.

② Удалить часть графика $y = f(x)$, расположенную левее оси ординат.

③ Отобразить симметрично относительно оси ординат часть графика, расположенную правее оси ординат.

Пример 1. Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| - 5$.

Решение. Так как $|x|^2 = x^2$, то функцию $y = x^2 - 2|x| - 5$ можно рассматривать как $y = f(|x|)$, где $f(x) = x^2 - 2x - 5$.

① 1) $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх.

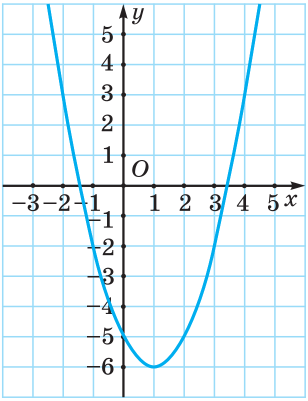


Рис. 14

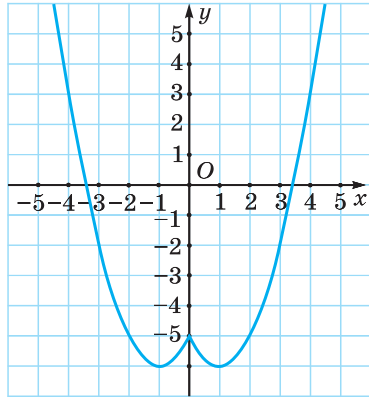


Рис. 15

2) Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$, $y_в = 1^2 - 2 - 5 = -6$, $(1; -6)$. Ось симметрии параболы $x = 1$.

3) Точки пересечения графика с осью абсцисс: $x^2 - 2x - 5 = 0$, $x_1 = 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}4$; $x_2 = 1 - \sqrt{6} \approx -1{,}4$.

4) Точка пересечения графика с осью ординат $(0; -5)$.

5) Построим график функции $f(x) = x^2 - 2x - 5$ (рис. 14).

② Удалим часть графика, которая расположена левее оси ординат.

③ Отобразим симметрично относительно оси ординат часть графика, расположенную правее оси ординат (рис. 15).

Построение графика функции $y = |f(x)|$

Пусть задан график некоторой функции $y = f(x)$ (рис. 16). Определим, какие преобразования графика этой функции нужно выполнить, чтобы получить график функции $y = |f(x)|$.

Так как $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0; \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0, \end{cases}$

то часть графика функции $y = |f(x)|$, лежащая выше оси абсцисс, совпадет с графиком функции $y = f(x)$. Также останутся без

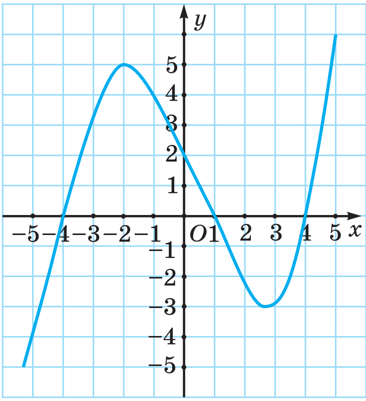


Рис. 16

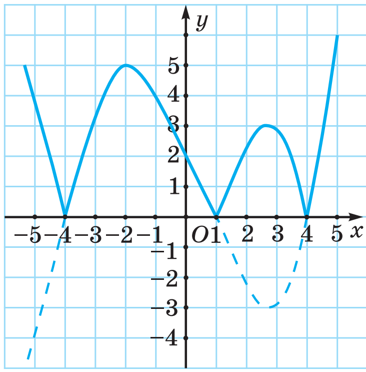


Рис. 17

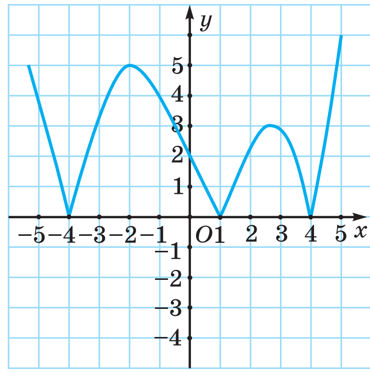


Рис. 18

изменения точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс (рис. 17). Часть графика $y = f(x)$, лежащая ниже оси абсцисс, заменится на симметричную ей относительно оси абсцисс (рис. 18).

Алгоритм построения графика функции $y = |f(x)|$

① Построить график функции $y = f(x)$.

② Отобразить симметрично относительно оси абсцисс часть графика, расположенную ниже оси абсцисс.

③ Удалить часть графика, расположенную ниже оси абсцисс.

Пример 2. Постройте график функции $f(x) = |x^2 - 2x|$.

Решение.

① Для получения параболы $y = x^2 - 2x$ воспользуемся алгоритмом построения графика квадратичной функции.

1) $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх.

2) Координаты вершины параболы:

$x_в = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$, $y_в = 1^2 - 2 = -1$, $(1; -1)$. Ось симметрии параболы $x = 1$.

3) Точки пересечения графика с осью абсцисс: $x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

4) Точка пересечения графика с осью ординат $(0; 0)$.

5) Построим график функции $f(x) = x^2 - 2x$ (рис. 19, *а*).

② Отобразим симметрично относительно оси абсцисс часть графика, расположенную ниже оси абсцисс (рис. 19, *б*).

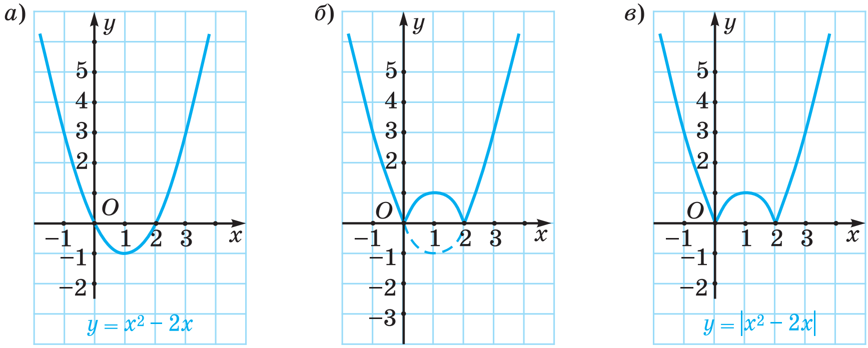


Рис. 19

③ Удалим часть графика, которая расположена ниже оси абсцисс (рис. 19, *в*).

Пример 3. Постройте график функции $y = \left|x^2 - 6|x| + 4\right|$.

Решение.

Так как функция $y = \left|x^2 - 6|x| + 4\right|$ четная, то построим сначала график функции $y = \left|x^2 - 6x + 4\right|$ (рис. 20, *а*). Отобразим правую часть построенного графика симметрично относительно оси ординат и получим график функции $y = \left|x^2 - 6|x| + 4\right|$ (рис. 20, *б*).

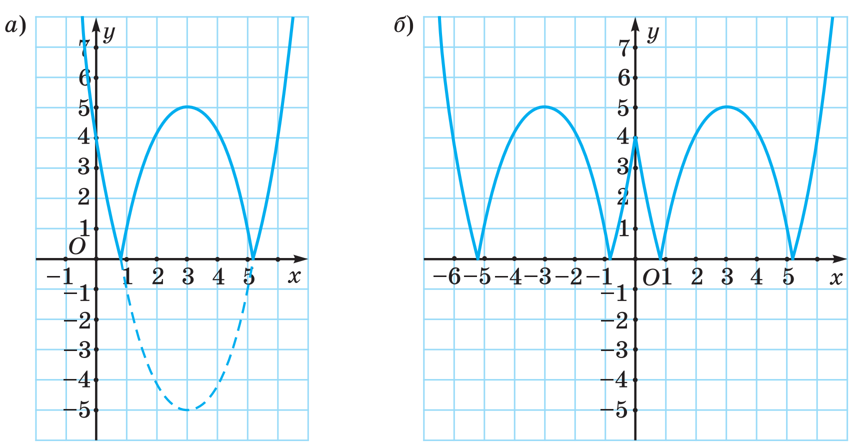


Рис. 20

3.1. Какой из графиков, изображенных на рисунках 21—24, может быть графиком функции: а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$?

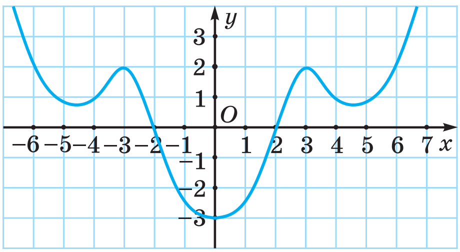


Рис. 21

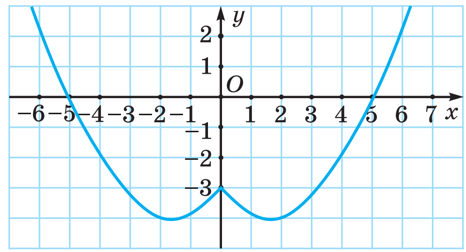


Рис. 22

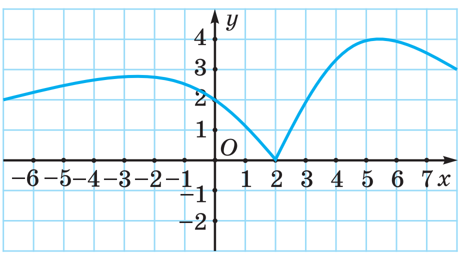


Рис. 23

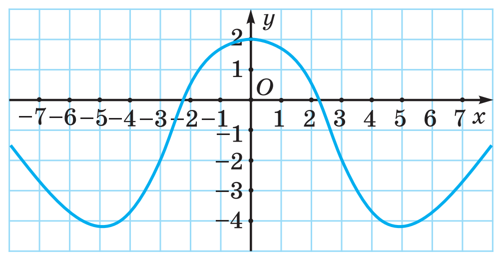


Рис. 24

3.2. Какой из графиков, изображенных на рисунках 25—27, может быть графиком функции: а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$; в) $y = |f(|x|)|$?

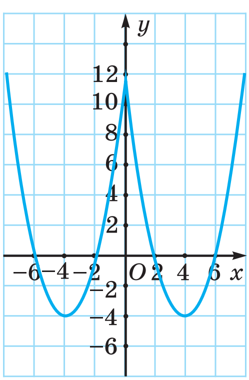


Рис. 25

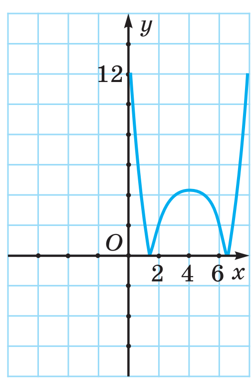


Рис. 26

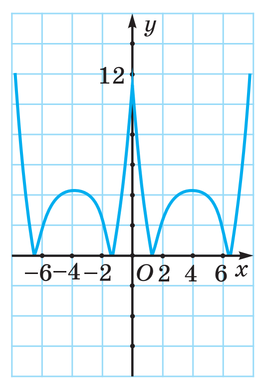


Рис. 27

3.3. На рисунке 28 изображен график функции $y = f(x)$. Перенесите рисунок в тетрадь и постройте график функции:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$;

в) $y = |f(|x|)|$.

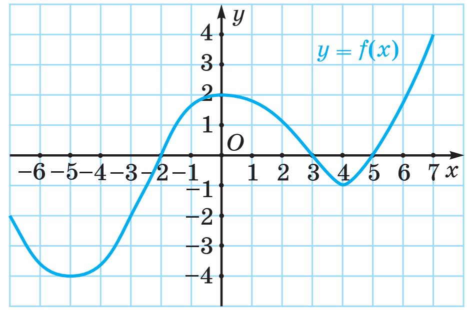


Рис. 28

3.4. Постройте график функции:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$;

в) $y = |f(|x|)|$, если:

1) $f(x) = x^2 - 6x - 7$; 2) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$.

3.5. Постройте график функции:

а) $y = |\sqrt{x} - 4|$; б) $y = \sqrt{|x|} - 4$; в) $y = |\sqrt{|x|} - 4|$.

3.6. Постройте график функции:

а) $y = \left|\frac{6}{x-1}\right|$; б) $y = \frac{6}{|x|-1}$; в) $y = \left|\frac{6}{|x|-1}\right|$.

3.7. Постройте график функции:

а) $y = |x^2 - 4|$; б) $y = |\sqrt{x+3} - 1|$;

в) $y = |2x - 3|$; г) $y = \left|-\frac{8}{x}\right|$.

3.8. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; б) $y = \sqrt{|x| - 2} + 1$;

в) $y = -3|x| + 4$; г) $y = \frac{12}{|x|}$.

3.9. Постройте график функции:

а) $y = |-x^2 - 2|x| + 8|$; б) $y = |\sqrt{|x| + 4} - 3|$;

в) $y = |0{,}5|x| + 2|$; г) $y = \left|-\frac{4}{|x|+3}\right|$.

§ 4. Функции $y = [x]$, $y = \{x\}$ и их свойства

Определение 1

Целой частью числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данное число.

Например, целая часть числа 2,3 равна 2, а целая часть числа −3,4 равна −4. Для обозначения целой части вводят символ $[a]$, читают «целая часть числа a, или антье от a» (от фр. *antier* — целый). Рассмотренные примеры записывают в виде: $[2{,}3] = 2$; $[-3{,}4] = -4$.

Так как каждому действительному числу соответствует его единственная целая часть, то на множестве всех действительных чисел определена функция $y = [x]$.

Свойства функции $y = [x]$

1. Область определения функции $y = [x]$. $D([x]) = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции $y = [x]$. $E([x]) = \boldsymbol{Z}$ по определению целой части числа.

3. Нули функции $y = [x]$. $x \in [0; 1)$, так как целая часть числа $0 \leqslant a < 1$ равна нулю.

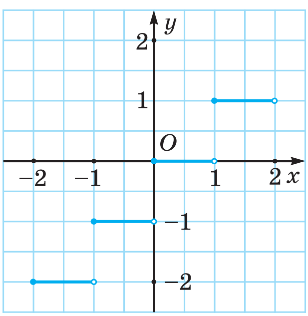


Рис. 29

4. Промежутки знакопостоянства функции $y = [x]$. $y > 0$, $x \in [1; +\infty)$, $y < 0$, $x \in (-\infty; 0)$.

5. Функция $y = [x]$ не убывающая, так как для любых действительных значений аргумента таких, что $x_1 > x_2$, следует $[x_1] \geqslant [x_2]$.

6. Если $n \leqslant x < n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $[x] = n$.

График функции $y = [x]$ изображен на рисунке 29.

Пример 1. Постройте график функции $y = [x^2]$.

Решение.

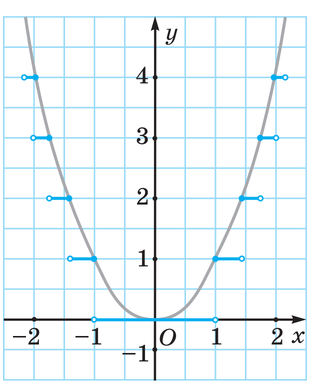


Рис. 30

1. Построим график функции $y = x^2$.

2. Проведем прямые $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Отметим точки пересечения этих прямых с графиком функции $y = x^2$, принадлежащие графику $y = [x^2]$.

4. Каждую часть графика между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$ заменим ее проекцией на прямую $y = n$.

Получим график функции $y = [x^2]$ — ступенчатую фигуру, состоящую из частей прямых $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 30).

Алгоритм построения графика функции $y = [f(x)]$

① Построить график функции $y = f(x)$.

② Провести прямые $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Отметить точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$. Каждую часть графика между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$ заменить ее проекцией на прямую $y = n$.

Пример 2. Постройте график функции $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

Решение. График функции $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ изображен на рисунке 31.

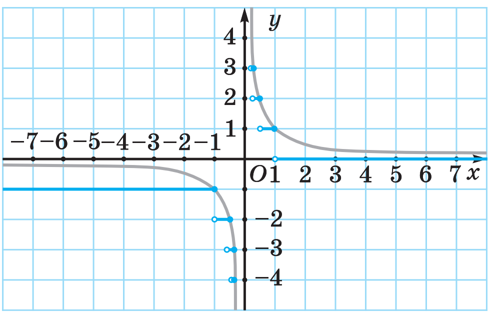


Рис. 31

Пример 3. Постройте график функции $y = [x]^2$.

Решение.

① Построим график функции $y = x^2$.

② Проведем прямые $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Отметим точки пересечения этих прямых с графиком функции $y = x^2$, которые принадлежат графику функции $y = [x]^2$.

Части графика между прямыми $x = n$ и $x = n + 1$ заменим их проекциями на прямую $y = n^2$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Получим график функции $y = [x]^2$ — ступенчатую фигуру, состоящую из частей прямых $y = n^2$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 32).

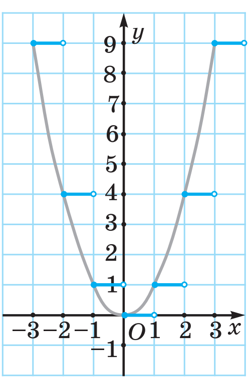


Рис. 32

Алгоритм построения графика функции $\boldsymbol{y = f([x])}$

① Построить график функции $y = f(x)$.

② Провести прямые $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Отметить точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$. Каждую часть графика между прямыми $x = n$ и $x = n + 1$ заменить ее проекцией на прямую $y = f([n])$.

Пример 4. Постройте график функции $y = \frac{1}{[x]}$.

Решение. График функции $y = \frac{1}{[x]}$ изображен на рисунке 33.

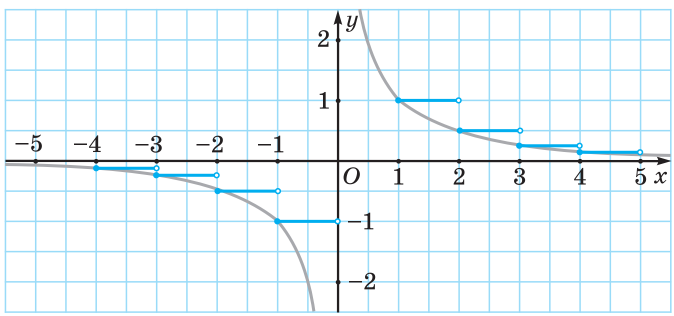


Рис. 33

Определение 2

Дробной частью числа a называется разность между числом a и его целой частью: $\{a\} = a - [a]$.

Например, $\{2,4\} = 2,4 - 2 = 0,4$; $\{-2,4\} = -2,4 - (-3) = 0,6$.

Так как каждому действительному числу соответствует его единственная целая часть, то на множестве всех действительных чисел определена функция $y = \{x\}$.

Свойства функции $\boldsymbol{y = \{x\}}$

1. Область определения функции $y = \{x\}$. $D(\{x\}) = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции $y = \{x\}$. $E(\{x\}) = [0; 1)$ по определению дробной части числа.

3. Нули функции $y = \{x\}$. $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, так как дробная часть целого числа равна нулю.

4. Промежутки знакопостоянства функции $y = \{x\}$. $\{x\} > 0$ для всех действительных чисел, кроме $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Функция $y = \{x\}$ возрастает на каждом из промежутков $[n; n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

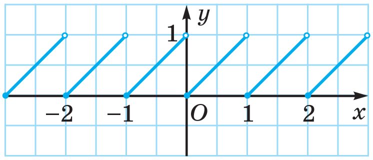


Рис. 34

6. Если $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\{n\} = 0$.

7. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом, равным 1, так как $\{x\} = \{x+1\}$.

График функции $y = \{x\}$ изображен на рисунке 34.

Пример 5. Постройте график функции $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$.

Решение.

1. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$.
2. Проведем прямые $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
3. Часть графика между прямыми $y = 0$ и $y = 1$ оставим без изменений.
4. Каждую часть графика между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$ перенесем на $|n|$ единиц вниз, если $n > 0$, или вверх, если $n < 0$.

Получим график функции $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$, он расположен в полосе между прямыми $y = 0$ и $y = 1$, не пересекает прямую $y = 1$ (рис. 35).

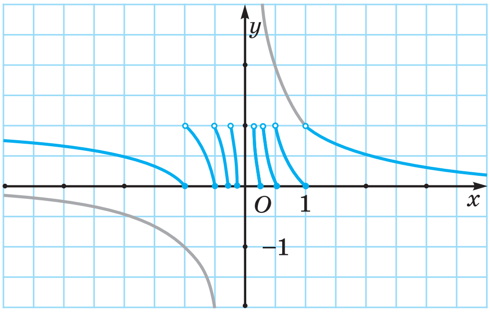


Рис. 35

Алгоритм построения графика функции $y = \{f(x)\}$

① Построить график функции $y = f(x)$.

② Провести прямые $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Часть графика $y = f(x)$ между прямыми $y = 0$ и $y = 1$ оставить без изменений.

④ Каждую часть графика $y = f(x)$ между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$ перенести на $|n|$ единиц вниз, если $n > 0$, или вверх, если $n < 0$.

Полученный график функции $y = \{f(x)\}$ расположен в полосе между прямыми $y = 0$ и $y = 1$ и не пересекает прямую $y = 1$.

Пример 6. Постройте график функции $y = \{x^2\}$.

Решение.

1. Построим график функции $y = x^2$.

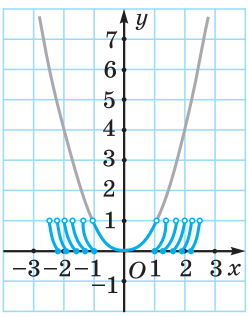


Рис. 36

2. Проведем прямые $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Часть графика $y = \{x^2\}$ между прямыми $y = 0$ и $y = 1$ оставим без изменений.

4. Части графика между прямыми $y = n$ и $y = n + 1$ перенесем на n единиц вниз $(n > 0)$.

Полученный график функции $y = \{x^2\}$ расположен в полосе между прямыми $y = 0$ и $y = 1$ и не пересекает прямую $y = 1$ (рис. 36).

Пример 7. Постройте график функции $y = \frac{1}{\{x\}}$.

Решение.

1. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$.

2. Проведем прямые $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Часть графика между прямыми $x = 0$ и $x = 1$ оставим без изменений.

4. Каждую часть графика между прямыми $x = n$ и $x = n + 1$ преобразуем, выполнив сдвиг части графика между прямыми $x = 0$ и $x = 1$ на $|n|$ единиц вдоль оси абсцисс вправо, если $n > 0$, и на $|n|$ единиц вдоль оси абсцисс влево, если $n < 0$.

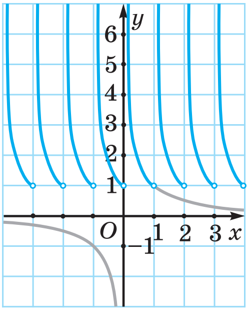


Рис. 37

График функции $y = \frac{1}{\{x\}}$ изображен на рисунке 37.

Алгоритм построения графика функции $y = f(\{x\})$.

① Построить график функции $y = f(x)$.

② Провести прямые $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Часть графика между прямыми $x = 0$ и $x = 1$ оставить без изменений.

④ Каждую часть графика $y = f(x)$ между прямыми $x = n$ и $x = n + 1$ преобразовать, выполнив сдвиг части графика между прямыми $x = 0$ и $x = 1$ на $|n|$ единиц вдоль оси абсцисс вправо, если $n > 0$, и на $|n|$ единиц вдоль оси абсцисс влево, если $n < 0$.

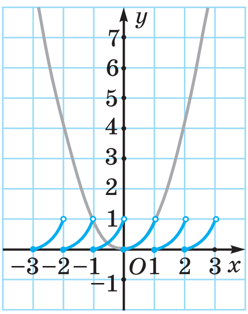


Рис. 38

Пример 8. Постройте график функции $y = \{x\}^2$.

Решение. График функции $y = \{x\}^2$ изображен на рисунке 38.

4.1. Вычислите целые и дробные части чисел:

а) 1,2; −1,2; б) 0,9; −0,9; в) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$;

г) 10,01; −10,01; д) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$.

4.2. Найдите значение выражения $[2{,}252] - \left\{1\frac{2}{7}\right\} - \left\{-1\frac{2}{7}\right\} + [\pi]$.

4.3. Плата за багаж зависит от его массы и рассчитывается по следующему закону: за первые 30 кг она составляет 20 р., а за каждые последующие полные или неполные 10 кг возрастает на 10 р. Постройте график зависимости стоимости перевозки багажа от его массы.

4.4. Стоимость звонка со стационарного телефона на мобильный зависит от его продолжительности и составляет 1,5 р. за каждую полную или неполную минуту. Постройте график зависимости стоимости звонка от времени разговора.

4.5. Постройте график функции:

а) $y = [x^3]$; б) $y = \{x^3\}$;

в) $y = [x]^3$; г) $y = \{x\}^3$.

§ 5. Многочлены

Определение многочлена

Целые рациональные выражения называют многочленами (полиномами).

Многочлен представляет собой сумму одночленов.

Степенью многочлена называется наибольшая степень его членов.

Например, $P(x) = x^5 + 4x^2 - 2x + 3$ — многочлен пятой степени, так как его член x^5 имеет наибольшую степень, равную пяти.

Операции с многочленами

Правила действий с многочленами

- Чтобы сложить многочлены, достаточно последовательно записать все их члены с теми же знаками и привести подобные слагаемые.
- Чтобы вычесть из одного многочлена другой, достаточно к одному многочлену прибавить многочлен, противоположный другому (два многочлена называются *противоположными*, если все члены одного многочлена противоположны членам другого).
- Чтобы умножить один многочлен на другой, достаточно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.
- Чтобы разделить многочлен на одночлен, достаточно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и результаты сложить.

При выполнении действий с многочленами можно использовать формулы сокращенного умножения.

Формулы сокращенного умножения

1. $(P_1 - P_2)(P_1 + P_2) = P_1^2 - P_2^2$.
2. $(P_1 \pm P_2)^2 = P_1^2 \pm 2P_1P_2 + P_2^2$.
3. $(P_1 \pm P_2)^3 = P_1^3 \pm 3P_1^2P_2 + 3P_1P_2^2 \pm P_2^3$.
4. $(P_1 \pm P_2)(P_1^2 \mp P_1P_2 + P_2^2) = P_1^3 \pm P_2^3$.
5. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + b^{n-1})$, если $n \in N$.

Например, $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

6. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 - \ldots + b^{n-1})$, если $n \in N$, n — нечетное.

Например, $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$.

Делимость многочленов. Приемы разложения многочлена на множители

Делимость многочленов

Определение

Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, если существует такой многочлен $T(x)$, что выполняется равенство $P(x) = Q(x)\cdot T(x)$.

Разделить многочлен $M(x)$ на многочлен $P(x)$ с остатком $(P(x) \neq 0)$ — значит найти такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, что выполняется равенство $M(x) = P(x)Q(x) + R(x)$, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $P(x)$.

Деление многочленов можно выполнить «уголком»:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^4 - 3x^3 + 2x^2} \end{array} & \begin{array}{|l} x^2 - 3x + 2 \\ \hline x^2 + 6x + 20 \text{ — частное} \end{array} \\
-\begin{array}{l} 6x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{6x^3 - 18x^2 + 12x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} 20x^2 - 17x + 6 \\ \underline{20x^2 - 60x + 40} \end{array} & \\
43x - 34 \text{ — остаток.} &
\end{array}
$$

Таким образом,

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 6x + 20) + 43x - 34.$$

Приемы разложения многочлена на множители

Применение формул сокращенного умножения

Например,

$$x^4 - 10x^2 + 169 = x^4 + 26x^2 + 169 - 36x^2 = (x^2 + 13)^2 - 36x^2 =$$
$$= (x^2 + 13 - 6x)(x^2 + 13 + 6x).$$

Применение способа группировки

Например, разложим на множители многочлен $M(x) = x^3 - 3x + 2$:

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2).$$

Применение метода неопределенных коэффициентов

Суть метода состоит в том, что определяется степень сомножителей (многочленов), на которые раскладывается данный многочлен, коэффициенты этих многочленов вычисляются путем перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной.

Например, разложим на множители многочлен

$$M(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 6.$$

Его можно представить в виде произведения квадратных трехчленов: $M(x) = (x^2 + px + q)(x^2 + bx + c)$. Раскроем скобки в записанном выражении: $M(x) = x^4 + (b + p)x^3 + (c + pb + q)x^2 + (cp + qb)x + qc$.

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие коэффициенты. Запишем следующую систему равенств:

$$\begin{cases} b + p = 5, \\ c + pb + q = 1, \\ cp + qb = -13, \\ qc = 6. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим: $p = 2$, $q = -3$, $b = 3$, $c = -2$, следовательно,

$$M(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 6 = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x - 2) =$$
$$= (x+3)(x-1)(x^2 + 3x - 2).$$

Применение теорем о корнях многочлена

Теорема Безу

Рассмотрим один из частных случаев деления с остатком — деление многочлена $M(x)$ на двучлен $x - c$.

Пусть дан многочлен

$$M(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0.$$

Заменим в нем переменную x каким-нибудь ее значением — действительным числом c, получим действительное число $d = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0$. Это число называется *значением многочлена* $M(x)$ *при* $x = c$.

Этьен Безу
(31.03.1730—27.09.1783)

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $M(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ на двучлен $x - c$ равен значению этого многочлена при $x = c$.

Доказательство.

Разделим многочлен $M(x)$ на двучлен $x - c$ с остатком и запишем его в виде

$$M(x) = (x - c)Q(x) + R(x). \qquad (1)$$

Так как степень многочлена $R(x)$ меньше степени делителя, т. е. двучлена $x - c$, то степень $R(x)$ равна 0, значит, $M(x) = (x - c)Q(x) + R$, где R — действительное число.

Известно, что если многочлены равны, то их значения равны при любом значении переменной, в том числе и при $x = c$.

Подставим $x = c$ в (1):

$M(c) = (c - c)Q(c) + R$, следовательно, $M(c) = R$.

Например, остаток от деления многочлена $M(x) = x^3 - 3x + 2$ на двучлен $x - 2$ равен значению многочлена при $x = 2$, т. е.

$$M(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4.$$

Схема Горнера

Деление многочлена на двучлен $x - c$ удобно выполнять при помощи способа, называемого *схемой Горнера*.

Уильям Джордж Горнер
(09.06.1786—22.09.1837)

Пусть дан многочлен

$$M(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \qquad (2)$$

степени n.

Разделим его на двучлен $x - c$. Получим:

$$M(x) = (x - c)P(x) + r, \qquad (3)$$

где многочлен $P(x)$ имеет степень $n - 1$, т. е.

$$P(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Тогда равенство (3) можно записать в виде:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 =$$
$$= (x - c)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0\right) + r, \text{ т. е.}$$
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = b_{n-1}x^n + \left(b_{n-2} - cb_{n-1}\right)x^{n-1} +$$
$$+ \left(b_{n-3} - cb_{n-2}\right)x^{n-2} + \ldots + \left(b_0 - cb_1\right)x + \left(r - cb_0\right).$$

Многочлены от одной переменной равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной, значит,

$$a_n = b_{n-1}; \quad a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}; \quad \ldots; \quad a_1 = b_0 - cb_1; \quad a_0 = r - cb_0.$$

Выразим коэффициенты частного $P(x)$:

$$b_{n-1} = a_n; \quad b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}; \quad \ldots; \quad b_0 = cb_1 + a_1; \quad r = cb_0 + a_0.$$

Эти вычисления отразим в таблице, называемой схемой Горнера.

В ее верхней строке — коэффициенты многочлена $M(x)$, в первой ячейке второй строки — число c, далее располагаются коэффициенты частного и остаток от деления $M(x)$ на $x - c$.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}$	...	$b_0 = cb_1 + a_1$	$r = cb_0 + a_0$

Пример 1. Разделим многочлен $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 7$ на двучлен $x - 2$ с остатком, используя схему Горнера.

Решение.

В первой строке таблицы запишем коэффициенты данного многочлена.

В первой ячейке второй строки запишем нуль данного двучлена $(x = 2)$.

В каждой следующей ячейке запишем коэффициенты частного и остаток, вычисленные по схеме Горнера:

	3	2	−6	1	−7
2	**3**	**8**	**10**	**21**	35

Неполным частным является многочлен третьей степени $3x^3 + 8x^2 + 10x + 21$, остаток от деления многочлена $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 7$ на двучлен $x - 2$ равен 35, т. е.

$$3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 7 = \left(3x^3 + 8x^2 + 10x + 21\right)(x - 2) + 35.$$

Теоремы о корнях многочлена

Рассмотрим случай, когда многочлен $M(x)$ делится на двучлен $x-c$ без остатка.

Корнем многочлена называется такое значение c переменной x, при котором значение многочлена равно нулю.

Число a называется *корнем кратности k* многочлена $M(x)$, если многочлен $M(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$.

Теорема 2

Если известны n корней многочлена $M(x)$ n-й степени, то верно тождество $M(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, где a_n — старший коэффициент многочлена $M(x)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — его корни, среди которых могут быть кратные.

Следствие 1 из теоремы Безу. Действительное число c является корнем многочлена $M(x)$ тогда и только тогда, когда $M(x)$ делится на $x-c$ без остатка: $M(x)=Q(x)\cdot(x-c)$.

Следствие 2. Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

Пример 2. Найдите целые корни многочлена

$$M(x)=x^4-6x^3+3x^2+26x-24$$

и разложите многочлен на множители.

Решение. Если многочлен имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена, т. е. среди чисел ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±24.

Начнем проверку с чисел, меньших по модулю.

	1	−6	3	26	−24
1	1	−5	−2	24	0
−1	1	−6	4	20	
2	1	−3	−8	8	
−2	1	−7	12	0	

Найдены два корня многочлена $M(x)$: $x=1$ и $x=-2$ — и определены коэффициенты многочлена $Q(x)$, полученного при делении $M(x)$ на

$(x-1)(x+2)$. Его степень — вторая, поэтому многочлен $M(x)$ можно представить в виде $M(x)=(x-1)(x+2)\left(x^2-7x+12\right)$. Можно найти еще два корня многочлена: $x = 4$ и $x = 3$, решив уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Итак, многочлен $M(x)$ имеет четыре целых корня: -2, 1, 3 и 4, а его разложение на множители имеет вид: $M(x)=(x-1)(x+2)\,(x-3)(x-4)$.

Пример 3. Найдите рациональные корни многочлена

$$M(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1$$

и разложите многочлен на множители.

Решение. Целые корни данного многочлена находятся среди делителей свободного члена, т. е. 1 и -1.

Проверим числа ± 1, можно проверить дробные числа со знаменателем, равным первому коэффициенту: $\pm\frac{1}{2}$.

	2	−5	−1	3	1
1	2	−3	−4	−1	0
−1	2	−5	1	−2	
$\frac{1}{2}$	2	−2	−5	$-\frac{7}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	2	−4	−2	0	

$$M(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1 = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x-2\right) =$$
$$=(x-1)(2x+1)\left(x^2-2x-1\right).$$

Итак, многочлен $M(x)$ имеет только два рациональных корня: 1 и $-\frac{1}{2}$.

Пример 4. Найдите кратность корня $x = 1$ многочлена

$$M(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$$

и разложите этот многочлен на множители.

Решение.

	1	−2	1	1	−2	1
1	1	−1	0	1	−1	0
1	1	0	0	1	0	
1	1	1	1	2		

Кратность корня $x = 1$ многочлена $M(x)$ равна 2:

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2\left(x^3+1\right).$$

5.1. Разделите «уголком» многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, назовите частное и остаток:

а) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6,$ $\quad Q(x) = x - 2;$

б) $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 - 7x + 1,$ $\quad Q(x) = x + 3;$

в) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 11,$ $\quad Q(x) = x^2 + 1;$

г) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 17,$ $\quad Q(x) = x^2 + 2.$

5.2. Найдите остатки от деления многочлена $P(x)$ на x; $x + 1$; $x - 5$; $3x + 2$:

а) $P(x) = x^2 - 5x + 4;$

б) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 1;$

в) $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3x - 7;$

г) $P(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1.$

5.3. Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 - x^2 - 8x + 12;$

б) $2x^3 + 7x^2 - 28x + 12;$

в) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16;$

г) $6x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 11x + 3.$

5.4. Разложите на множители многочлен:

а) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15;$

б) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24.$

5.5. Найдите сумму коэффициентов многочлена

$$\left(2 - 5x + x^3\right)^{211}\left(3 - 7x + 9x^2 - 5x^3\right)^{135}.$$

5.6. При каких значениях a многочлен $x^3 + 6x^2 + ax + 5$ делится без остатка на $x^2 + x + 1$?

5.7. Известно, что многочлен $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ делится на трехчлен $x^2 + 3x - 1$. Найдите частное от деления первого многочлена на второй и значения коэффициентов a и b.

5.8. Многочлен $P(x)$ при делении на $x - 1$ дает остаток 3, а при делении на $x - 2$ дает остаток 5. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x^2 - 3x + 2$.

5.9. Многочлен $P(x)$ делится на $x - 1$ без остатка, а при делении на $x + 2$ дает остаток 3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x^2 + x - 2$.

5.10. Сократите дробь:

а) $\frac{3x^2 + 12x + 9}{x^6 + 6x^3 + 5}$; б) $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

5.11. Решите уравнение:

а) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$;

в) $x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 135x + 243 = 0$;

г) $16x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$.

§ 6. Единичная окружность. Градусная и радианная мера произвольного угла

$$180^\circ = \pi\,\text{рад}; \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{рад}; \qquad 1\,\text{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Пример 1. В прямоугольном треугольнике с углом 36° найдите радианную меру всех его углов.

Решение. Найдем второй острый угол этого треугольника:

$$90^\circ - 36^\circ = 54^\circ.$$

Найдем радианную меру углов по формуле $\alpha = n^\circ \frac{\pi}{180^\circ}$:

$90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$, $36^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5}$, $54^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{10}$.

6.1. Заполните в тетради таблицу.

Градусная мера угла	10°		-72°	225°			-450°		
Радианная мера угла		$\frac{\pi}{12}$			$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{9}$		$1{,}5\pi$	$-1{,}2\pi$

6.2. Отметьте на единичной окружности точку, которая получится при повороте точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат на угол:

а) 60°; -150°; 540°; -315°; 720°; -1110°;

б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{6}$; 5π; $-1{,}8\pi$; $3{,}5\pi$;

в) 1 рад; -2 рад; 3,5 рад; -4 рад; 6 рад; -10 рад.

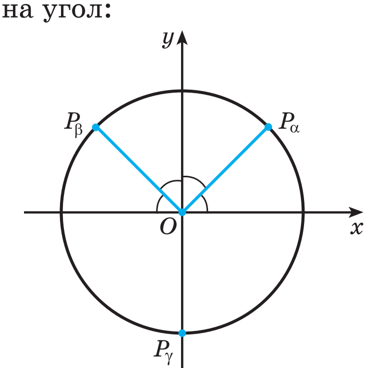


Рис. 39

6.3. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β и P_γ, соответствующие углам поворота α, β и γ (рис. 39). Определите:

а) градусные меры углов α, β и γ, если известно, что они заключены в промежутке от -360° до 0°;

б) радианные меры углов α, β и γ, если известно, что они заключены в промежутке от 2π до 4π;

в) градусные и радианные меры всех таких углов α, β и γ.

6.4. Запишите угол α, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, для которого точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{378°}$; б) $P_{-30°}$; в) $P_{450°}$; г) $P_{-540°}$.

6.5. Запишите угол β, $-2\pi \leqslant \beta \leqslant 0$, для которого точка P_β совпадает с точкой:

а) P_π; б) $P_{\frac{2\pi}{3}}$; в) $P_{-2,5\pi}$; г) $P_{3,5\pi}$.

6.6. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{0°}$; б) $P_{-135°}$; в) $P_{\frac{\pi}{6}}$; г) $P_{-\frac{\pi}{2}}$.

6.7. Определите, углом какой четверти является угол α, если:

а) $\alpha = 1081°$; б) $\alpha = -469°$; в) $\alpha = \frac{19\pi}{10}$;

г) $\alpha = -\frac{13\pi}{6}$; д) $\alpha = 3$; е) $\alpha = -5$.

6.8. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) $90°$; $-180°$; $540°$; $-270°$; $450°$; $-720°$;

б) π; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; -7π; $2,5\pi$; $-5,5\pi$.

6.9. Запишите все углы α, при повороте на которые точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат будет получена точка:

а) $P_\alpha(0; 1)$; б) $P_\alpha(1; 0)$; в) $P_\alpha(-1; 0)$; г) $P_\alpha(0; -1)$.

6.10. Запишите несколько углов α, на которые нужно повернуть точку $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат, чтобы получить точку:

а) $P_\alpha\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $P_\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6.11. На единичной окружности отмечена точка $P_{\frac{\pi}{4}}$. Определите углы, соответствующие точке, симметричной точке $P_{\frac{\pi}{4}}$ относительно:

а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат.

6.12. Запишите несколько углов α, соответствующих точке единичной окружности, ордината которой равна:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.13. Запишите все углы α, соответствующие точке единичной окружности, абсцисса которой равна:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.14. Определите число сторон правильного многоугольника, если радианная мера его внешнего угла равна $\frac{2\pi}{15}$.

6.15. Сколько точек получится, если отметить на единичной окружности все точки, соответствующие углам вида $\frac{\pi n}{8}$, где n — целое число?

6.16. В каждой строке одно из чисел — лишнее, найдите его и объясните почему:

а) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{6}$; $-\frac{10\pi}{3}$;

в) $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{19\pi}{4}$; г) π; −π; 3π; 0.

6.17. Слово «Круг» закодировано: $\frac{\pi}{12}$ / $\frac{\pi}{18}$ / $\frac{\pi}{21}$ / $\frac{\pi}{4}$.

Разгадайте код. Расшифруйте слово: 45° / 10° / 180° / 36° / $\frac{\pi}{21}$ / $\frac{\pi}{19}$.

§ 7. Определение синуса и косинуса произвольного угла

Абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α (рис. 40), называется **косинусом** угла α, а ордината этой точки — **синусом** угла α:

$$x_\alpha = \cos\alpha \qquad y_\alpha = \sin\alpha$$

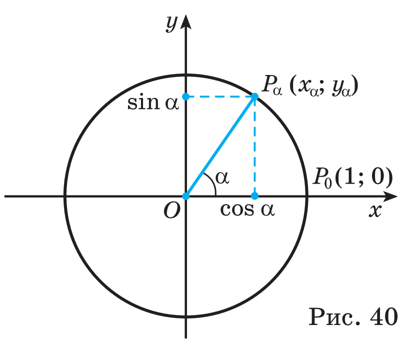


Рис. 40

Пример 1. Определите координаты точки P_α единичной окружности, соответствующей углу $\alpha = 1920^\circ$.

Решение. Так как $1920^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 120^\circ$, то $\cos 1920^\circ = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, а $\sin 1920^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда углу 1920° на единичной окружности соответствует точка с координатами $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sin\frac{8\pi}{3}$ и $\cos\frac{8\pi}{3}$; б) $\sin\frac{5\pi}{3}$ и $\cos\frac{5\pi}{3}$.

Решение.

а) Так как $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, то точка $P_{\frac{8\pi}{3}}$ совпадает с точкой $P_{\frac{2\pi}{3}}$. Поскольку $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, то точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ и $P_{\frac{2\pi}{3}}$ единичной окружности симметричны относительно оси ординат, а значит, их ординаты (синусы углов $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$) равны, а абсциссы (косинусы углов) противоположны, т. е. $\sin\frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos\frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (рис. 41).

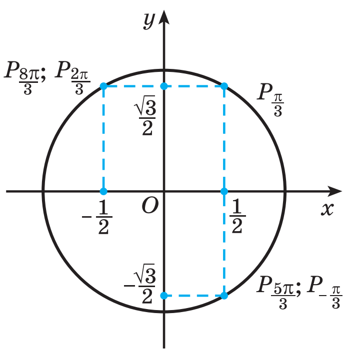


Рис. 41

б) Так как $\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, то точка $P_{\frac{5\pi}{3}}$ совпадает с точкой $P_{-\frac{\pi}{3}}$.

Значит, $\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Точки $P_{-\frac{\pi}{3}}$ и $P_{\frac{\pi}{3}}$ единичной окружности симметричны относительно оси абсцисс, а значит, их ординаты (синусы углов $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$) отличаются только знаком, а их абсциссы (косинусы углов $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$) равны. Так как $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (см. рис. 41).

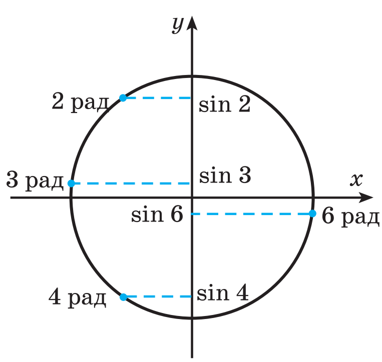


Рис. 42

Пример 3. Расположите в порядке возрастания числа sin2; sin3; 1; sin4; sin6.

Решение.

Отметим углы 2 рад; 3 рад; 4 рад и 6 рад на тригонометрической окружности (рис. 42) и получим, что $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 2 < 1$.

Ответ: $\sin 4$; $\sin 6$; $\sin 3$; $\sin 2$; 1.

7.1. Найдите значение выражения:

а) $\cos 270^\circ + \sin 180^\circ$; б) $\sin 90^\circ - 4\cos 0^\circ$;

в) $\cos(-360^\circ) - \sin 180^\circ$; г) $\sin(-270^\circ) - 3\sin(-450^\circ)$;

д) $-\sin 810^\circ + 3\cos 180^\circ$; е) $6\sin 0^\circ - 9\cos(-540^\circ)$;

ж) $\cos 720^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$; з) $3\cos(-450^\circ) + \sin^2 45^\circ$.

7.2. Найдите значение выражения:

а) $\cos\pi \cdot \cos(-2\pi)$; б) $\cos 7\pi - 2\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\frac{3\pi}{2} \cdot 2\cos(-9\pi) + \cos\frac{\pi}{3}$; г) $2\sin(-3\pi) + \cos(-\pi) + \sin^2\frac{\pi}{4}$;

д) $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \cos 6\pi - \cos^3\frac{\pi}{3}$; е) $\sin(-2{,}5\pi) - 3\cos(-7{,}5\pi) - \sin^2\frac{\pi}{3}$.

7.3. Сравните значения выражений $\sin\alpha$ и $\sin 2\alpha$, если известно, что:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; в) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; г) $\alpha = 7\pi$.

7.4. Известно, что $\beta = \frac{\pi}{4}$. Сравните значения выражений:

а) $\cos\beta$ и $\cos 2\beta$; б) $\cos 4\beta$ и $\sin 4\beta$; в) $\sin 3\beta$ и $\sin 5\beta$.

7.5. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{24}\right) + 3\sin 12\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

7.6. Вычислите:

а) $\sqrt{\left(2\sin\frac{\pi}{4} - 1\right)^2} - \sqrt{\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{6} + 2\right)^2} + \sqrt{\left(2\sin\frac{\pi}{3} - 2\right)^2}$.

7.7. Верно ли, что:

а) $\cos 45\pi = \cos(-\pi)$; б) $\sin 38{,}5\pi = \sin(-0{,}5\pi)$?

7.8. Воспользуйтесь определением синуса и косинуса произвольного угла и назовите два положительных и два отрицательных угла, для которых верно равенство:

а) $\sin\alpha = 1$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha = 0$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.9. Запишите все углы α, для которых известно, что:

а) $\sin\alpha = -1$; б) $\sin\alpha = 0$; в) $\cos\alpha = 1$; г) $\cos\alpha = -1$.

7.10. Возможно ли равенство:

а) $\sin\alpha = 1{,}2$; б) $\sin\alpha = -\frac{8}{9}$; в) $\cos\alpha = 0{,}2$; г) $\cos\alpha = -\sqrt{3}$?

7.11. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $3\sin\alpha + 8$; б) $5 - 2\cos\alpha$;

в) $4\sin^2\alpha - 1$; г) $2\cos^4\alpha + 9$.

7.12. Найдите все значения числа a, при которых возможно равенство:

а) $\sin\alpha = a - 5$; б) $\cos\alpha = a^2 - 8$;

в) $\sin\alpha = a^2 + a - 1$; г) $\cos\alpha = 5a - a^2 - 5$.

7.13. Сравните с нулем значения выражений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если известно, что:

а) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; б) $-\frac{5\pi}{2} < \alpha < -2\pi$;

в) $2{,}5\pi < \alpha < 3\pi$; г) $-19{,}5\pi < \alpha < -19\pi$.

7.14. Определите знак выражения:

а) $\sin 115^\circ \sin 214^\circ \sin 313^\circ$; б) $\cos 219^\circ \cos 372^\circ \sin(-512^\circ)$;

в) $\sin\frac{\pi}{17}\sin\frac{35\pi}{8}\cos\frac{16\pi}{7}$; г) $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\cos 2{,}4\pi$;

д) $\sin 3 \sin 5 \cos(-7)$; е) $\cos(-2)\sin(-10)\cos 5{,}5$.

7.15. Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\cos^2\alpha + \sin\alpha$; в) $\sin 2\alpha \cos\alpha$; г) $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$.

7.16. Известно, что $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$. Упростите выражение:

а) $|\sin\alpha| - \sin\alpha$; б) $\cos\alpha + |\cos\alpha|$; в) $\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}$; г) $\frac{5\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$.

7.17. Сравните:

а) $\sin 340^\circ$ и $\sin 350^\circ$; б) $\sin 200^\circ$ и $\sin(-230^\circ)$;

в) $\cos 79^\circ$ и $\sin 337^\circ$; г) $\cos\frac{17\pi}{19}$ и $\cos\frac{39\pi}{19}$;

д) $\cos 3^\circ$ и $\cos 3$; е) $\cos 6{,}4$ и $\sin 4{,}9$.

7.18. Сравните значения выражений $\sin\alpha$ и $\sin 2\alpha$, если известно, что:

а) $\alpha = 57^\circ$; б) $\alpha = \frac{5\pi}{7}$; в) $\alpha = 5$.

7.19. Запишите в порядке возрастания значения выражений:

а) $\sin 41^\circ$; $\sin 90^\circ$; $\sin 225^\circ$; $\sin 270^\circ$; $\sin 292^\circ$;

б) $\cos\frac{\pi}{12}$; $\cos 0$; $\cos\frac{\pi}{2}$; $\cos\frac{7\pi}{8}$; $\cos 2\pi$.

7.20. Возможно ли равенство:

а) $\sin\alpha = 2\sin 31^\circ$; б) $\cos\alpha = 2\cos 117^\circ$?

7.21. а) На единичной окружности отметьте точки, соответствующие углам α, равным 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$.

б) Отметьте точки, симметричные полученным точкам относительно оси абсцисс; оси ординат; начала координат.

в) Определите радианную меру всех углов, которым соответствуют отмеченные точки.

г) Найдите синус и косинус каждого из полученных углов.

7.22. С помощью единичной окружности и значений синусов и косинусов углов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ вычислите:

а) $\sin\frac{5\pi}{4}$; б) $\cos\frac{31\pi}{6}$; в) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

7.23. Найдите синусы и косинусы углов α, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\alpha = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\alpha = -\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

7.24. Выполняется ли равенство $\sin\alpha = \cos\alpha$ при каком-нибудь α? Проиллюстрируйте свое решение с помощью единичной окружности.

7.25. Запишите все углы, для которых выполняется равенство $\sin\alpha = -\cos\alpha$. Проиллюстрируйте свое решение с помощью единичной окружности.

7.26. Углом какой четверти является угол α, если выражение $\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ имеет смысл?

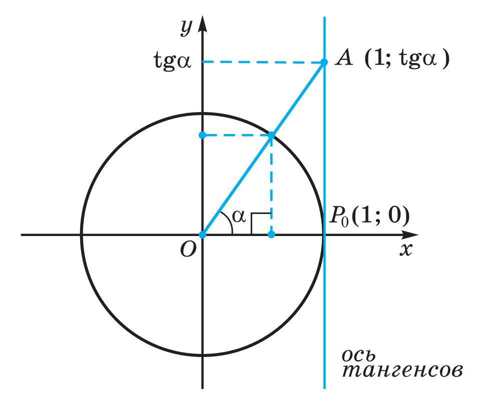
7.27. Определите, существует ли такое действительное число x, для которого выполняются условия $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и:

а) $x \in [\pi; 2\pi]$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

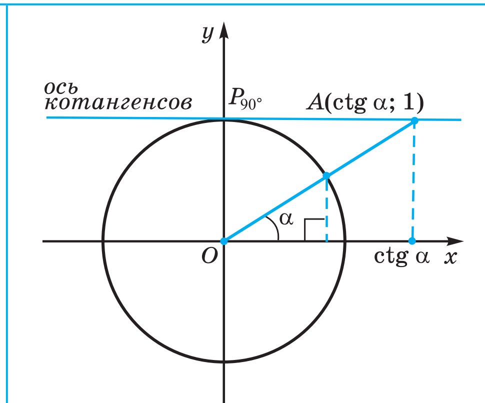
7.28. Определите, существует ли такое действительное число x, для которого выполняются условия $\sin x = -1$ и:

а) $x \in (-\pi; \pi]$; б) $x \in \left[\frac{35\pi}{2}; \frac{37\pi}{2}\right]$.

§ 8. Определение тангенса и котангенса произвольного угла



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Пример. Пользуясь определениями тангенса и котангенса, вычислите: а) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. а) По определению тангенса $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}}$. С помощью единичной окружности получим, что $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) По определению котангенса $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$. С помощью единичной окружности получим, что $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.

8.1. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}180^\circ - \operatorname{tg}45^\circ$;
б) $\operatorname{ctg}270^\circ \cdot \operatorname{ctg}60^\circ$;
в) $\operatorname{tg}2\pi + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}$;
г) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;
д) $\operatorname{tg}5\pi + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
е) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

8.2. Сравните значения выражений $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \pi$.

8.3. Известно, что $\beta = \frac{\pi}{4}$. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{ctg}\beta$; б) $\operatorname{ctg}2\beta$; в) $\operatorname{ctg}6\beta$.

8.4. Найдите значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)}$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

8.5. Вычислите: $\sqrt{\left(3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}-2\right)^2} + \sqrt{\left(2-3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2}$.

8.6. Назовите два положительных и два отрицательных угла α, для которых не существует $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$.

8.7. Определите все значения α, при которых:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; в) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

8.8. Сравните:

а) $\operatorname{tg}340^\circ$ и $\operatorname{tg}350^\circ$; б) $\operatorname{ctg}200^\circ$ и $\operatorname{ctg}(-230^\circ)$;

в) $\operatorname{ctg}79^\circ$ и $\operatorname{tg}337^\circ$; г) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{19}$ и $\operatorname{tg}\frac{39\pi}{19}$;

д) $\operatorname{ctg}4^\circ$ и $\operatorname{ctg}4$; е) $\operatorname{tg}6{,}4$ и $\operatorname{tg}4{,}9$.

8.9. Сравните значения выражений $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}2\alpha$, если известно, что:

а) $\alpha = 57^\circ$; б) $\alpha = \frac{5\pi}{7}$; в) $\alpha = 5$.

8.10. Запишите в порядке возрастания значения выражений:

а) $\operatorname{tg}41^\circ$; $\operatorname{tg}110^\circ$; $\operatorname{tg}225^\circ$; $\operatorname{tg}360^\circ$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{11}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{9}$; $\operatorname{ctg}2{,}1\pi$.

8.11. Сравните с нулем значения выражений $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$;

в) $4{,}5\pi < \alpha < 5\pi$; г) $-13{,}5\pi < \alpha < -13\pi$.

8.12. Определите знак выражения:

а) $\operatorname{tg}165^\circ\operatorname{tg}314^\circ\operatorname{tg}353^\circ$; б) $\operatorname{ctg}229^\circ\operatorname{ctg}382^\circ\operatorname{tg}(-543^\circ)$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{19}\operatorname{ctg}\frac{43\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{7}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{3}\right)\operatorname{tg}3{,}1\pi$;

д) $\operatorname{tg}2\operatorname{ctg}3\operatorname{tg}(-4)$; е) $\operatorname{ctg}(-1)\operatorname{tg}(-8)\operatorname{ctg}4{,}5$.

8.13. Известно, что $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$; б) $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha$.

8.14. Известно, что $0{,}5\pi < \alpha < \pi$. Упростите выражение:

а) $|\mathrm{tg}\,\alpha| - \mathrm{tg}\,\alpha$; б) $\mathrm{ctg}\,\alpha + |\mathrm{ctg}\,\alpha|$; в) $\frac{|\mathrm{tg}\,\alpha|}{\mathrm{tg}\,\alpha}$; г) $\frac{3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{|\mathrm{ctg}\,\alpha|}$.

8.15. Верно ли, что:

а) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$; б) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3}$;

в) $\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$; г) $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2} = \mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{2}$?

8.16. Вычислите:

а) $\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{4}$; б) $\mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{6}$; в) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$;

д) $\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3}$; е) $\mathrm{ctg}\,\frac{19\pi}{6}$; ж) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; з) $\mathrm{ctg}\,\frac{21\pi}{4}$.

8.17. Выполняется ли равенство $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\alpha$ при каком-нибудь α? Проиллюстрируйте свое решение с помощью единичной окружности.

8.18. Запишите все углы, для которых выполняется равенство $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\mathrm{tg}\,\alpha$. Проиллюстрируйте свое решение с помощью единичной окружности.

8.19. Углом какой четверти является угол α, если выражение $\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha}$ имеет смысл?

8.20. Определите, существует ли такое действительное число x, для которого выполняются условия $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и:

а) $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

8.21. Определите, существует ли такое действительное число x, для которого выполняются условия $\mathrm{tg}\,x = -1$ и:

а) $x \in (-\pi; 0]$; б) $x \in \left[\frac{35\pi}{2}; 18\pi\right]$.

8.22. Определите, существует ли такое действительное число x, для которого выполняются условия $\mathrm{tg}\,x = 3$ и $x \in [0; \pi]$.

§ 9. Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества)

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Пример 1. Могут ли синус и косинус одного угла быть равными соответственно $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$?

Решение. Для ответа на вопрос достаточно проверить справедливость равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (т. е. выполняется ли условие принадлежности точки P_α единичной окружности).

Так как $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$ то могут.

Пример 2. Упростите выражение

$$\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Решение.

$$\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha -$$

$$- 2\cos\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha - 2 + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha - 2 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha + 1\right) - 2 + \left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right) - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= 1 - 2 + 1 - 2 + 1 = -1.$$

Пример 3. Найдите наименьшее значение выражения

$$5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha + 1.$$

Решение. $5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha + 1 = 5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + 1 =$

$$= \left(5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha + 1 = 5\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha + 1 =$$

$$= 5\cdot 1 + \cos^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha + 6.$$

Так как наименьшее значение $\cos^2\alpha$ равно нулю, то наименьшее значение выражения $\cos^2\alpha + 6$, а значит, и данного выражения равно 6.

9.1. Могут ли синус и косинус одного и того же угла одновременно быть равными нулю?

9.2. Могут ли одновременно выполняться равенства:

а) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; б) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$?

9.3. Найдите $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3\frac{3}{7}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

9.4. Найдите $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\cos\alpha > \sin\alpha$.

9.5. Найдите $\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

9.6. Упростите выражение:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

9.7. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; б) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$.

9.8. Упростите выражение:

а) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$; б) $\frac{1 - \cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1}$; г) $\sin^2\alpha + \frac{1}{(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha)^2}$.

9.9. Докажите тождество $\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha - \sin^4\alpha = 1$.

9.10. Упростите выражение $\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}$.

9.11. Докажите, что значение выражения

$$(2\sin\alpha + 3)(2\sin\alpha - 3) + (2\cos\alpha + 5)(2\cos\alpha - 5)$$

не зависит от α.

9.12. Найдите наименьшее значение выражения $7\cos^2\alpha + 8\sin^2\alpha - 4$.

9.13. Упростите выражение $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, зная, что $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$.

9.14. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha + 2\sin\alpha}$, зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 7$;

б) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, зная, что $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}75$.

9.15. Докажите, что $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \geqslant 2$.

9.16. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}25$, найдите значение выражения $\frac{4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 3\cos^2\alpha}$.

9.17. Упростите выражение $\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}$, если известно, что α — угол третьей четверти.

9.18. Найдите значение выражения $A = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$, зная, что $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

9.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$; б) $5\sin^2\alpha + 8\cos^2\alpha$.

9.20. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = -8$.

9.21. Найдите $\sin\alpha + \cos\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$ и $3\pi < \alpha < 3{,}5\pi$.

9.22. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$.

9.23. Зная, что $\operatorname{tg}^2\alpha + 25 = 10\operatorname{tg}\alpha$, найдите значение выражения $\frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

9.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$; б) $1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$.

9.25. Определите, какие из следующих равенств верны при всех $x \in \boldsymbol{R}$:

а) $\sin^2 5x + \cos^2 5x = 5$; б) $\sin^2\frac{x}{5} + \cos^2\frac{x}{5} = \frac{1}{5}$;

в) $\sin^2\frac{x}{5} + \cos^2\frac{x}{5} = 1$; г) $\sin^2 5x + \cos^2 5x = 1$.

9.26. Постройте график функции $y = \sin^2 \sqrt{x - 3} + \cos^2 \sqrt{x - 3}$.

9.27. Постройте график функции

$$y = -5\sin^2\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right) - 5\cos^2\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right).$$

9.28. Постройте график функции $y = 2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{8}$.

§ 10. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Их свойства и графики

Пример 1. Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{2}\sin 3x$; б) $y = 3\cos\frac{x}{2}$.

Решение. а) Выполним сжатие графика функции $y = \sin x$ к оси ординат в 3 раза (расстояние от каждой точки графика функции $y = \sin x$ до оси ординат уменьшится в 3 раза) и получим график функции $y = \sin 3x$ (рис. 43).

Затем выполним сжатие графика функции $y = \sin 3x$ в 2 раза к оси абсцисс (расстояние от каждой точки графика функции $y = \sin 3x$ до оси абсцисс уменьшится в 2 раза) и получим график функции $y = \frac{1}{2}\sin 3x$ (см. рис. 43).

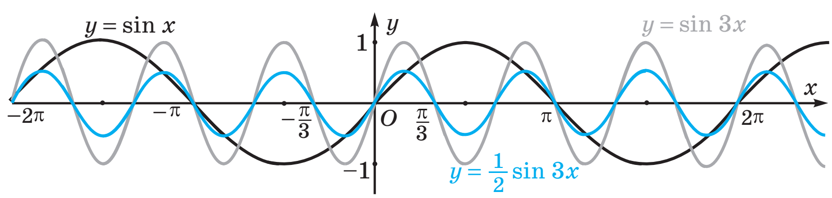


Рис. 43

б) Выполним растяжение графика функции $y = \cos x$ от оси ординат в 2 раза (расстояние от каждой точки графика функции $y = \cos x$ до оси ординат увеличится в 2 раза) и получим график функции $y = \cos\frac{x}{2}$ (рис. 44).

Затем выполним растяжение графика функции $y = \cos\frac{x}{2}$ в 3 раза от оси абсцисс (расстояние от каждой точки графика функции $y = \cos\frac{x}{2}$ от оси абсцисс увеличится в 3 раза) и получим график функции $y = 3\cos\frac{x}{2}$ (см. рис. 44).

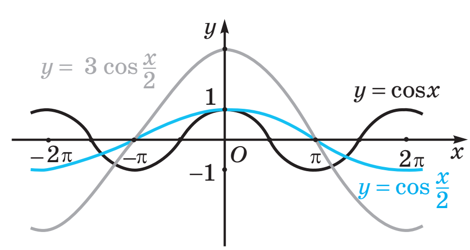


Рис. 44

Пример 2. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x}{|2x|}\cos x + 0{,}5\cos x$; б) $y = -\frac{1}{2}(\sin|x| - \sin x)$.

Решение. а) Раскроем модуль:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ y = \frac{x}{2x}\cos x + 0{,}5\cos x,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ y = -\frac{x}{2x}\cos x + 0{,}5\cos x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ y = 0{,}5\cos x + 0{,}5\cos x,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ y = -0{,}5\cos x + 0{,}5\cos x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ y = \cos x,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ y = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

График данной функции изображен на рисунке 45.

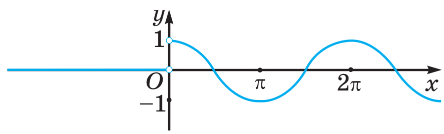


Рис. 45

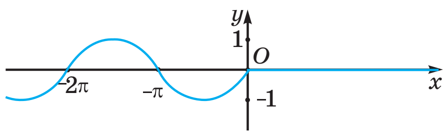


Рис. 46

б) $y = -\frac{1}{2}(\sin|x| - \sin x)$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ y = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ y = \sin x.\end{cases}\end{array}\right.$ График данной функции изображен на рисунке 46.

Пример 3. Постройте график функции $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

Решение.

$y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x > 0,\\ y = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 0,\\ y = -1.\end{cases}\end{array}\right.$ График данной функции изображен на рисунке 47.

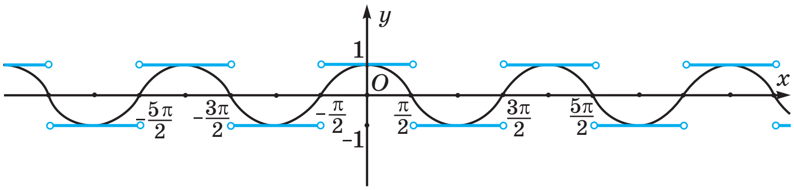


Рис. 47

Пример 4. Определите наименьший положительный период функции:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos\frac{x}{3}$.

Решение. Для решения заданий такого вида докажем два свойства.

1. Если T — период функции $f(x)$, то число kT — тоже период функции $f(x)$, где k — произвольное целое число, $k \neq 0$.

Доказательство.

$$f(x+kT) = f(x+(k-1)T+T) = f(x+(k-1)T) = f(x+(k-2)T+T) =$$
$$= f(x+(k-2)T) = \ldots = f(x+(k-k)T) = f(x).$$

2. Если T — период функции $f(x)$, то период функции $f(kx)$ (k — некоторое действительное число, не равное нулю) равен $\frac{T}{k}$.

Доказательство.

$f(kx+T) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)\right) = f(kx) \Rightarrow T' = \frac{T}{k}$, где T' — период функции $f(kx)$.

а) Наименьший положительный период функции $y = \sin t$ равен $T = 2\pi$. Воспользуемся доказанными свойствами и получим, что наименьший положительный период функции $y = \sin 2x$ равен $T' = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

б) Наименьший положительный период функции $y = \cos t$ равен 2π. Воспользуемся доказанными свойствами и получим, что наименьший положительный период функции $y = \cos\frac{x}{3}$ равен $T' = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Пример 5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$.

Решение. Пусть $\cos x = t$, тогда функция $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$ принимает вид $f(t) = 2t^2 + 2t - 1$ при $t \in [-1; 1]$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции $f(t) = 2t^2 + 2t - 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

Найдем абсциссу вершины параболы $t_{\text{в}} = -\frac{1}{2}$. Так как абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[-1; 1]$, то найдем значение функции в вершине параболы и на концах данного отрезка.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -1{,}5;$

$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) - 1 = -1;$

$f(1) = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 1 = 3.$

Таким образом, наибольшее значение данной функции равно 3, а наименьшее значение равно $-1{,}5$.

10.1. Определите, принадлежит ли графику функции $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ точка:

а) $A(0; 0{,}5)$; б) $B\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$; в) $C\left(\frac{\pi}{6}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $D(4\pi; 1{,}5)$.

10.2. Верно ли, что график функции $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ проходит через точку:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)$; б) $B\left(-\frac{3\pi}{4}; -1\right)$; в) $C\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; г) $D\left(\frac{7\pi}{12}; 2\right)$?

10.3. Найдите $f(x_0)$, если:

а) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$, $x_0 = \frac{4\pi}{3}$;

б) $f(x) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$, $x_0 = \frac{11\pi}{6}$;

г) $f(x) = 7 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = -\frac{2\pi}{3}$.

10.4. Найдите значение функции $y = \frac{1}{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 5$ при значении аргумента, равном:

а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) 0; г) $\frac{2\pi}{3}$.

10.5. Найдите ординату точки пересечения графика функции $f(x) = 2\sin x + \cos x$ и прямой:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{6}$; в) $x = \pi$; г) $x = \frac{\pi}{4}$.

10.6. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ принимает значение, равное:

а) 0; б) -1; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$.

10.7. Найдите все значения аргумента, при которых выполняется равенство $f(x) = 1$, если $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

10.8. Найдите наименьшее и наибольшее целые значения функции:

а) $y = 1{,}2\cos\frac{x}{5} + 3$; б) $y = -3{,}28\sin\left(9x + \frac{\pi}{12}\right) - 1$.

10.9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на отрезке:

а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; б) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$.

10.10. Найдите множество значений функции:

а) $y = |\sin x| + 4$; б) $y = |\cos 2x| - 3$;

в) $y = 5 - 2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$; г) $y = 4{,}2 - 0{,}3|\cos 5x|$.

10.11. Найдите множество значений функции:

а) $y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$; б) $y = \cos^2 x + \cos x + 3$.

10.12. Верно ли, что периодом функции $y = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi x}{5} + 1\right) - 15$ является число:

а) 10; б) 15; в) -20; г) -100?

10.13. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \cos 8x$; б) $y = \sin 5x$;

в) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$; г) $y = \cos\left(\frac{x}{7} - \frac{\pi}{10}\right)$;

д) $y = 3\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$; е) $y = 4\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{2x}{5}\right)$;

ж) $y = \sin\left(\frac{\pi x}{7} + 8\right) + 2$; з) $y = 8\sin\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) - 3$.

10.14. Докажите, что функция $y = f(x)$ является четной:

а) $f(x) = x^4 \cdot \cos 2x$; б) $f(x) = \frac{\sin^2 x - 1}{|x|}$;

в) $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{x^2 - 9}$; г) $f(x) = \cos 6x - \sin^4 x$.

10.15. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечетной:

а) $f(x) = \sin x \cdot \cos 5x$; б) $f(x) = \frac{\cos x + 2}{x^3 - 16x}$;

в) $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2 - 4}$; г) $f(x) = \frac{\cos 7x}{x^3} - \sin^5 x$.

10.16. Исследуйте на четность функцию $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

10.17. График функции $y = f(x)$ получен сдвигом графика функции $g(x) = \cos x$ на $\frac{\pi}{3}$ единицы влево вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вниз вдоль оси ординат. Найдите значение выражения $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

10.18. Постройте график функции:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = 3\cos x$; в) $y = -\sin\frac{x}{2}$;

г) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$; д) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$; е) $y = -2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right) + 1$.

10.19. Постройте график функции:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sqrt{\cos^2 x}$; в) $y = |\sin x| + \sin x$;

г) $y = \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 - \cos x$; д) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$; е) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$.

10.20. Постройте график функции:

а) $y = \frac{|x|}{2x}\sin x + 0{,}5\sin x$; б) $y = \cos|x| + \cos x$.

10.21. Постройте график функции $y = 3\cos\frac{x}{2}$. Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;

б) промежутки убывания и возрастания функции;

в) наибольшее и наименьшее значения функции, а также значения аргумента, при которых они достигаются;

г) промежутки знакопостоянства функции.

10.22. Постройте график функции $y = |\sin 3x|$. Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;

б) промежутки убывания и возрастания функции;

в) наибольшее и наименьшее значения функции, а также значения аргумента, при которых они достигаются;

г) промежутки знакопостоянства функции.

10.23. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$.

10.24. В физике при изучении гармонических колебаний рассматривают функцию $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебаний, ω — частота колебаний, φ — начальная фаза.

Для функции $g(t) = 2\cos\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)$ определите:

а) частоту колебаний; б) период колебаний;

в) начальную фазу; г) амплитуду колебаний.

10.25. Известно, что функция $y = f(x)$ является четной и при $x \leqslant -\frac{\pi}{2}$ задается формулой $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Изобразите график этой функции при $x \geqslant \frac{\pi}{2}$.

§ 11. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Их свойства и графики

Пример 1. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|)$.

Решение.

$$y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|); \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = \operatorname{tg} x. \end{cases} \end{array}\right.$$

График данной функции изображен на рисунке 48.

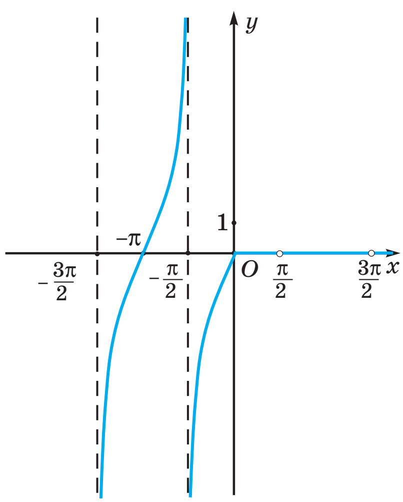


Рис. 48

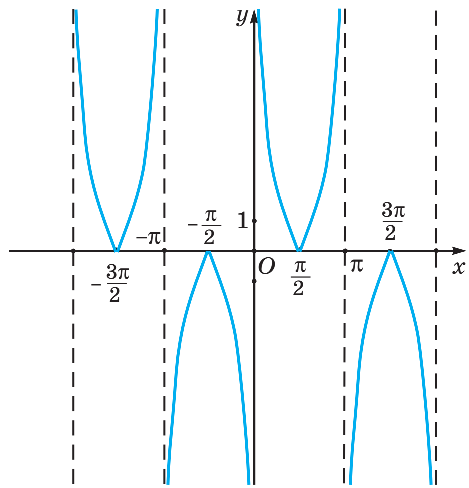


Рис. 49

Пример 2. Постройте график функции $y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$.

Решение.

$$y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}; \quad y = \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sin x}; \quad y = \frac{|\cos x|}{\sin x}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ y = \operatorname{ctg} x, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ y = -\operatorname{ctg} x. \end{cases} \end{array}\right.$$

График данной функции изображен на рисунке 49.

Пример 3. Постройте график функции $y = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}$.

Решение.

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

График данной функции изображен на рисунке 50.

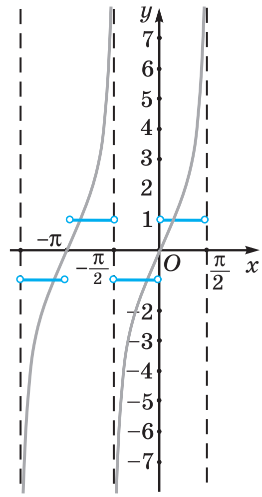


Рис. 50

Пример 4. Определите наименьший положительный период функции:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{5}$.

Решение. а) Так как наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} t$ равен π, то наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} 2x$ равен $T' = \frac{\pi}{2}$.

б) Так как наименьший положительный период функции $y = \operatorname{ctg} t$ равен π, то наименьший положительный период функции $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{5}$ равен $T' = \frac{\pi}{\frac{3}{5}} = \frac{5\pi}{3}$.

Пример 5. Исследуйте функцию на четность (нечетность):

а) $f(x) = -2\operatorname{tg} 3x + x$; б) $g(x) = 4x \cdot \operatorname{ctg} x - 3$.

Решение. а) Область определения данной функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Область определения симметрична относительно нуля; $f(-x) = -2\operatorname{tg}(-3x) + (-x) = 2\operatorname{tg} 3x - x = -f(x)$, значит, функция является нечетной.

б) Область определения данной функции — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. Область определения симметрична относительно нуля; $g(-x) = (-4x) \cdot \operatorname{ctg}(-x) - 3 = 4x \cdot \operatorname{ctg} x - 3 = g(x)$, значит, функция является четной.

11.1. Определите, принадлежит ли графику функции $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ точка:

а) $A(0; 0)$; б) $B\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; в) $C\left(\frac{3\pi}{4}; 1\right)$; г) $D\left(-\frac{\pi}{4}; 10\right)$.

11.2. Верно ли, что график функции $y = 3\operatorname{ctg}2x$ проходит через точку:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$; б) $B(-\pi; 0)$; в) $C\left(-\frac{\pi}{6}; -\sqrt{3}\right)$; г) $D\left(\frac{\pi}{8}; 3\right)$?

11.3. Найдите $f(x_0)$, если:

а) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;

б) $f(x) = -3\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 5,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = 2 - \operatorname{ctg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right),\ x_0 = \frac{7\pi}{6}$.

11.4. Найдите, если это возможно, ординату точки пересечения графика функции $f(x) = \operatorname{tg}x - 3\operatorname{ctg}x$ и прямой:

а) $x = \frac{\pi}{4}$; б) $x = -\frac{\pi}{6}$; в) $x = \frac{\pi}{3}$; г) $x = \pi$.

11.5. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ принимает значение, равное:

а) 0; б) -1; в) $\sqrt{3}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.6. Найдите все значения аргумента, при которых выполняется равенство $f(x) = 1$, если $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

11.7. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = \operatorname{tg}5x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{7}$; в) $y = \operatorname{ctg}8x$; г) $y = \operatorname{ctg}0{,}1x$.

11.8. Используя свойство периодичности функций $f(x) = \operatorname{tg}x$ и $f(x) = \operatorname{ctg}x$, вычислите:

а) $\operatorname{tg}405^\circ$; б) $\operatorname{ctg}390^\circ$; в) $\operatorname{tg}240^\circ$; г) $\operatorname{ctg}225^\circ$;

д) $\operatorname{ctg}810^\circ$; е) $\operatorname{tg}720^\circ$; ж) $\operatorname{ctg}780^\circ$; з) $\operatorname{tg}1110^\circ$.

11.9. Используя свойства периодичности функций $f(x)=\operatorname{tg}x$ и $f(x)=\operatorname{ctg}x$, докажите, что:

а) $\operatorname{tg}16^\circ=\operatorname{tg}556^\circ$; б) $\operatorname{ctg}(-13^\circ)=\operatorname{ctg}167^\circ$.

11.10. Верно ли, что периодом функции $y=4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}-2\right)+9$ является число:

а) 6; б) 9; в) −12; г) −42?

11.11. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y=\operatorname{tg}2x$; б) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{4}$; в) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{10}$;

г) $y=\operatorname{tg}\frac{3x}{5}$; д) $y=3\operatorname{tg}\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)$; е) $y=5\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{5}\right)$;

ж) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-5$; з) $y=7\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}-\frac{3x}{7}\right)+1$.

11.12. Исследуйте функцию на четность (нечетность):

а) $f(x)=2x\operatorname{tg}x$; б) $g(x)=x-\operatorname{tg}4x$;

в) $y=\operatorname{ctg}12x$; г) $g(x)=x\cdot\operatorname{ctg}2x$;

д) $f(x)=-\operatorname{tg}2x-x$; е) $g(x)=x\operatorname{tg}\frac{x}{5}$.

11.13. Постройте график функции:

а) $y=\operatorname{tg}2x$; б) $y=2\operatorname{ctg}x$; в) $y=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$;

г) $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}2x$; д) $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; е) $y=-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$.

11.14. Постройте график функции:

а) $y=|\operatorname{tg}x|$; б) $y=\sqrt{\operatorname{ctg}^2x}$; в) $y=|\operatorname{tg}x|-\operatorname{tg}x$;

г) $y=\left(\sqrt{\operatorname{ctg}x}\right)^2+\operatorname{ctg}x$; д) $y=\frac{|\operatorname{ctg}x|}{\operatorname{ctg}x}$; е) $y=\sqrt{-\operatorname{tg}^2x}$.

11.15. Постройте график функции $y=-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

11.16. Постройте график функции $y=\frac{\sqrt{1-\cos^2x}}{\cos x}$.

11.17. Постройте график функции $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;
б) промежутки убывания и возрастания функции;
в) промежутки знакопостоянства функции.

§ 12. Обратные тригонометрические функции

Пример 1. Найдите область определения выражения:

а) $\arcsin(x-1)$; б) $\arccos\left(x^2-1\right)$; в) $\operatorname{arctg}(x+3)$.

Решение.

а) По определению арксинуса числа $\arcsin(x-1)$ — это угол, синус которого равен $x-1$, т. е. $-1 \leqslant x-1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x \in [0; 2]$.

б) По определению арккосинуса числа $\arccos(x^2-1)$ — это угол, косинус которого равен x^2-1, т. е. $-1 \leqslant x^2-1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$, $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, $x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

в) По определению арктангенса числа $\operatorname{arctg}(x+3)$ — это угол, тангенс которого равен $x+3$, тогда $x+3 \in (-\infty; +\infty)$, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

а) $\sin\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$; б) $\sqrt{10}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

Решение.

а) Пусть $\alpha = \arccos\frac{1}{5}$, $\alpha \in (0; \pi)$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим:

$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Так как $\alpha \in (0; \pi)$, то $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

б) Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \alpha$. По определению арктангенса числа получим:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. По данному значению $\operatorname{tg}\alpha$ найдем $\sin\alpha$.

Так как $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, то $\cos^2\alpha = \frac{9}{10}$, а $\sin^2\alpha = 1-\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а значит, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Подставим найденное значение в заданное выражение и получим:

$\sqrt{10}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = 1.$

Функция $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$ не является монотонной на области определения и каждое свое значение принимает при различных значениях аргумента.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом промежутке функция возрастает, принимает все значения $y \in [-1; 1]$, а значит, имеет обратную функцию.

Определение

Функция, обратная $y = \sin x$ для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, называется $\arcsin x$.

Свойства функции $y = \arcsin x$

1. Область определения функции. $D(\arcsin x) = [-1; 1]$, так как $E(\sin x) = [-1; 1]$.

2. Множество значений функции. $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, так как $y = \sin x$ рассматривается для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Нули функции. $\arcsin x = 0$, если $x = 0$.

4. Промежутки знакопостоянства функции $y = \arcsin x$. $\arcsin x > 0$, если $x \in (0; 1]$; $\arcsin x < 0$, если $x \in [-1; 0)$.

5. Промежутки монотонности функции. Функция $y = \arcsin x$ возрастает на области определения.

6. Наибольшее значение функции равно $\frac{\pi}{2}$, наименьшее $-\frac{\pi}{2}$.

7. Функция $y = \arcsin x$ нечетная, так как область ее определения симметрична относительно нуля и $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Для построения графика функции $y = \arcsin x$ можно выполнить симметрию графика функции $y = \sin x$ для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$ (рис. 51).

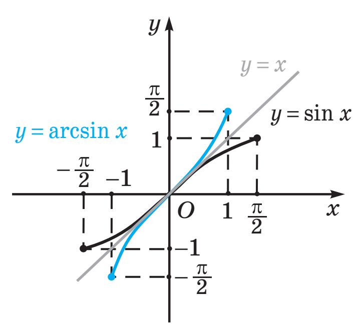


Рис. 51

Функции $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Аналогично определению функции $y = \arcsin x$ можно определить функцию $y = \arccos x$.

Для $x \in [0; \pi]$ существует функция, обратная функции $y = \cos x$, это функция $y = \arccos x$.

Существуют функции, обратные функциям $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Это функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ соответственно.

Отразим их свойства в таблице.

Функция / Свойства	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения функции	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множество значений функции	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Четность (нечетность) функции	Не является четной и не является нечетной	Нечетная	Не является четной и не является нечетной
Промежутки знакопостоянства функции	$\arccos x > 0$ для $x \in [-1; 1)$	$\operatorname{arctg} x > 0$ для $x \in (0; +\infty)$; $\operatorname{arctg} x < 0$ для $x \in (-\infty; 0)$	$\operatorname{arcctg} x > 0$ для $x \in (-\infty; +\infty)$
Нули функции	$x = 1$	$x = 0$	—
Промежутки возрастания функции	—	$(-\infty; +\infty)$	—
Промежутки убывания функции	$[-1; 1]$	—	$(0; \pi)$
Наибольшее значение функции	π	—	—
Наименьшее значение функции	0	—	—

Графики функций $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ изображены на рисунках 52—54.

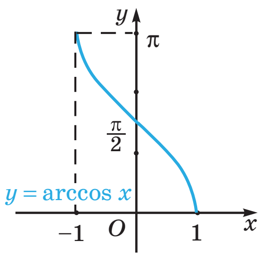


Рис. 52

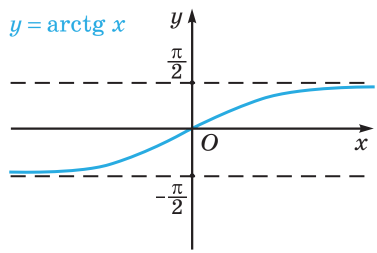


Рис. 53

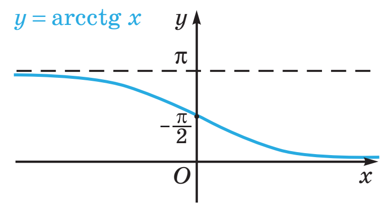


Рис. 54

Свойства тригонометрических функций

1. $\sin(\arcsin a) = a,\ a \in [-1;\ 1]$.
2. $\arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $\cos(\arccos a) = a,\ a \in [-1;\ 1]$.
4. $\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0;\ \pi]$.
5. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a,\ a \in \boldsymbol{R}$.
6. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.
7. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a,\ a \in \boldsymbol{R}$.
8. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ x \in (0;\ \pi)$.
9. $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ a \in [-1; 1]$.
10. $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2},\ a \in \boldsymbol{R}$.

Пример 3. Решите уравнение $\arccos(3x + 2) = \arccos(5x + 3)$.

Решение. Так как функция $y = \arccos x$ убывает на области определения, то из равенства значений функций следует равенство значений аргументов на области определения функций в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases} 3x + 2 = 5x + 3, \\ -1 \leqslant 3x + 2 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0{,}5, \\ -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -0{,}5.$$

Ответ: –0,5.

Пример 4. Найдите (в градусах) значение угла $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 676^\circ)$.

Решение.

Так как $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$ при $0 < \alpha < 180^\circ$, то

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 676^\circ) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}(720^\circ - 44^\circ)) =$$

$$= \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}(-44^\circ)) = \operatorname{arcctg}(-\operatorname{tg} 44^\circ) =$$

$$= \operatorname{arcctg}(-\operatorname{ctg} 46^\circ) = 180^\circ - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 46^\circ) = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ.$$

Ответ: 134°.

12.1. Выберите все верные равенства:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin 0 = 2\pi$; г) $\operatorname{acrsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

д) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$; е) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$;

ж) $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

12.2. Найдите значение выражения:

а) $\arcsin 1 - 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin 0{,}5\right)$.

12.3. Что больше: $\arccos(-0{,}3)$ или $\operatorname{arctg}(-0{,}3)$? Почему?

12.4. Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin(3 - 5x)$; б) $y = \arccos(x - 3) + \operatorname{arcctg}\sqrt{x - 3}$;

в) $y = \arccos(x^2 - x - 1)$; г) $y = \arcsin(|x - 2|)$.

12.5. Найдите множество значений функции:

а) $y = 4\pi - \arccos x$; б) $y = \frac{\pi}{10} - \operatorname{arcctg} x$;

в) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{12}$; г) $y = 3\arccos x - \frac{7\pi}{18}$.

12.6. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\arcsin\frac{3}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$, $\arcsin\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{10}\right)$, $\arccos\frac{\pi}{4}$.

12.7. Постройте график функции:

а) $y = \sin(\arcsin(2x - 3))$; б) $y = \cos\left(\arccos\left(x^2 - 1\right)\right)$.

12.8. Вычислите:

а) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

12.9. На одном из рисунков 55, *а—д* изображен график функции $y = \arcsin(x - 1)$. Выберите этот рисунок.

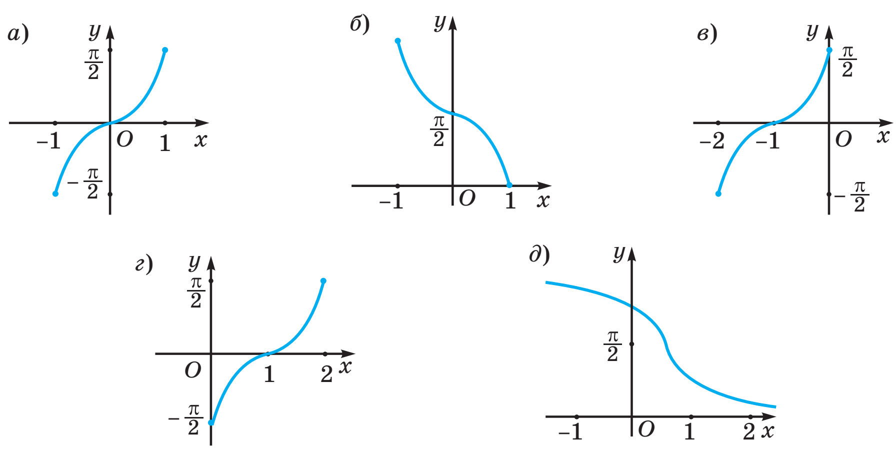


Рис. 55

12.10. Постройте график функции:

а) $y = \arccos(x + 3)$; б) $y = -\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$;

в) $y = 2\operatorname{arcctg}(x - 1)$; г) $y = \arcsin 2x$.

12.11. Решите уравнение:

а) $3\arccos(2x + 3) = \frac{5\pi}{2}$;

б) $6\operatorname{arctg}(7 - 2x) = -\pi$;

в) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;

г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(0{,}5 - x)) = x^2 - 4x + 2{,}5$.

12.12. Решите уравнение:

а) $\arcsin(2x-15)=\arcsin(x^2-6x-8)$;

б) $\operatorname{arcctg}(2x-1)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)$;

в) $3\arcsin^2 x-2\pi\arcsin x-\pi^2=0$;

г) $9\arccos^2 2x-3\pi\arccos 2x-2\pi^2=0$.

12.13. Найдите все корни уравнения $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\frac{5\pi^2}{36}$.

12.14. Решите неравенство:

а) $\arcsin(x-1)>-\frac{\pi}{6}$; б) $\arccos\frac{1}{x}\leqslant\frac{\pi}{3}$.

12.15. Найдите сумму целых решений неравенства:

а) $\arccos(x+5)<\arccos(x+4)$;

б) $\operatorname{arcctg}(8x^2-6x-1)\geqslant\operatorname{arcctg}(4x^2-x+8)$.

12.16. Вычислите:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$;

в) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{25\pi}{4}\right)\right)$.

12.17. Найдите значение выражения:

а) $\arccos(\cos 5)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)$;

в) $\arccos(\cos 6)$; г) $\arcsin(\sin 5)$.

12.18. Постройте график функции:

а) $y=\arccos(|x|)$; б) $y=|\operatorname{arctg} x|$;

в) $y=\left|\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x\right|$; г) $y=|\arcsin(x+1)|$.

12.19. Найдите количество корней уравнения

$$\arccos(4x^2-3x-2)+\arccos(3x^2-8x-4)=\pi.$$

12.20. Решите уравнение $2\arcsin x=-\pi-(x+1)^2$.

§ 13. Тригонометрические уравнения. Тригонометрические неравенства

	Решения уравнения $\sin x = a$	**Решения уравнения** $\cos x = a$
$\lvert a\rvert > 1$	Нет корней	Нет корней
$a = 0$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$
$\lvert a\rvert < 1, a \neq 0$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

Решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$	**Решения уравнения** $\operatorname{ctg} x = a$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

Пример 1. Найдите сумму корней уравнения $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, принадлежащих промежутку $(-\pi; 4\pi)$.

Решение.

$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$. Промежутку $(-\pi; \ 4\pi)$ принадлежат корни: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$. Найдем их сумму: $-\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = 3\pi$.

Ответ: 3π.

Пример 2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$.

Решение.

$2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$; $\cos(\pi(x-1)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pi(x-1) = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$;

$x - 1 = \pm\frac{1}{6} + 2n, \ n \in Z$; $\left[\begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{6} + 2k, \ k \in Z, \\ x = 1 - \frac{1}{6} + 2m, \ m \in Z; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{6} + 2k, \ k \in Z, \\ x = \frac{5}{6} + 2m, \ m \in Z. \end{array}\right.$

Наибольшим отрицательным корнем уравнения является число $-\frac{5}{6}$.

Ответ: $-\frac{5}{6}$.

Пример 3. Найдите количество корней уравнения $(\sin x + 1)\operatorname{tg} x = 0$ на промежутке $[0; 30\pi]$.

Решение.

$(\sin x + 1)\operatorname{tg} x = 0$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x = 0, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 0, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$ Если $\sin x = -1$, то $\cos x = 0$,

т. е. корнями исходного уравнения являются корни уравнения $\operatorname{tg} x = 0$, тогда $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. На промежутке $[0; 30\pi]$ находится 31 корень данного уравнения.

Ответ: 31.

Пример 4. Найдите нули функции $y = \operatorname{tg} x\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение.

Решим уравнение $\operatorname{tg} x\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$; $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \begin{cases} \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \begin{cases} \frac{x}{2} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Так как $\cos x = 0$ при $x = (-1)^n\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то система не имеет решений.

Таким образом, числа вида $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, являются нулями данной функции.

Ответ: πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5. Найдите наибольший корень уравнения

$$5\cos^2\frac{2\pi x}{3} - 5\cos\frac{2\pi x}{3} - \sin^2\frac{2\pi x}{3} = 3,$$

принадлежащий промежутку $[-2; 5]$.

Решение.

Пусть $t = \frac{2\pi x}{3}$, тогда уравнение примет вид $5\cos^2 t - 5\cos t - \sin^2 t = 3$. Решим полученное уравнение:

$$5\cos^2 t - 5\cos t - \left(1 - \cos^2 t\right) = 3;\ 6\cos^2 t - 5\cos t - 4 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos t = \frac{4}{3} \notin [-1; 1],\\ \cos t = -\frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \cos t = -\frac{1}{2}; \; t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}.$$

Тогда $\frac{2\pi x}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}; \; x = \pm 1 + 3n, \; n \in \boldsymbol{Z}.$

Наибольший корень уравнения, принадлежащий промежутку $[-2; 5]$, равен 5.

Ответ: 5.

Пример 6. Найдите число корней уравнения $7\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 6$ на промежутке $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

Представим уравнение $7\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 6$ в виде:

$$7\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 6\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right); \; \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 6\cos^2 x = 0.$$

Так как значения переменной, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получим $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0$.

Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда уравнение примет вид $t^2 + t - 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -3,\\ t = 2.\end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -3,\\ \operatorname{tg} x = 2.\end{array}\right.$

Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = -3$ и $y = 2$ (рис. 56) и найдем количество точек пересечения этих графиков на промежутке $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

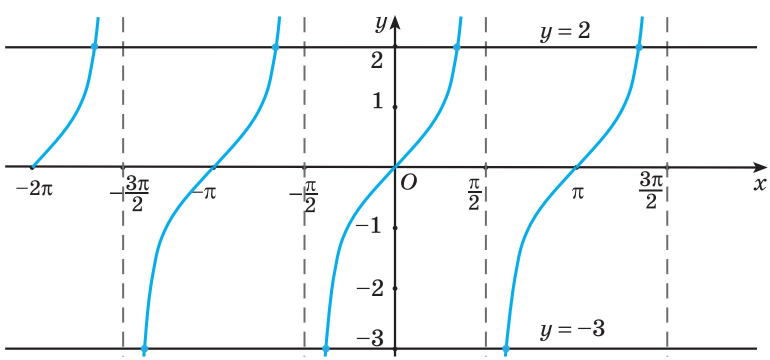


Рис. 56

На промежутке $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ данное уравнение имеет семь корней.

Ответ: 7.

Пример 7. Решите уравнение $4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0$.

Решение.

$4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0;$

$4\sin^3 x = \sin x - \cos x;$

$4\sin^3 x = (\sin x - \cos x)\cdot 1;$

$4\sin^3 x = (\sin x - \cos x)\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x);$

$4\sin^3 x = \sin^3 x + \sin x\cos^2 x - \cos x\sin^2 x - \cos^3 x;$

$3\sin^3 x + \sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x + \cos^3 x = 0.$

Разделим обе части уравнения на $\cos^3 x$ (предварительно убедившись, что значения переменной, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения): $3\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\,x + 1 = 0$. Пусть $\mathrm{tg}\,x = t$, тогда уравнение примет вид $3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$; $3t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 2t + 1 = 0$; $t(3t^2 - 2t + 1) + (3t^2 - 2t + 1) = 0$; $(t+1)(3t^2 - 2t + 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} t+1=0, \\ 3t^2 - 2t + 1 = 0. \end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности не имеет корней ($D < 0$), тогда $t = -1$, т. е. $\mathrm{tg}\,x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 8. Решите уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Решение.

Так как $\cos x \leqslant 1$, а $x^2 + 1 \geqslant 1$ для $x \in \boldsymbol{R}$, то уравнение $\cos x = x^2 + 1$ равносильно системе $\begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

Так как $\cos 0 = 1$, то $x = 0$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 0.

Пример 9. Решите уравнение $\sin x + \cos 4x = 2$.

Решение.

Так как значения $\sin x$ и $\cos x$ не превосходят 1, то равенство возможно лишь при условии:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ 4x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Обозначим $\bigcirc$ решения первого уравнения системы, а $\square$ — решения второго уравнения (рис. 57).

Решение исходного уравнения:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

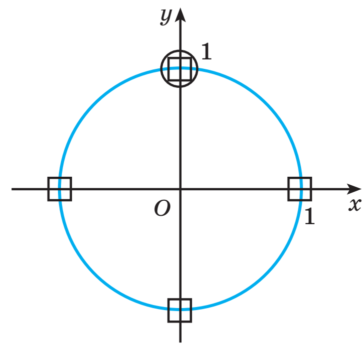


Рис. 57

Пример 10. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\frac{5x}{2} + \cos 3x = 2$.

Решение.

Так как значение косинуса любого угла не превосходит единицы, то данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos\frac{5x}{2} = 1, \\ \cos 3x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5x}{2} = 360^\circ n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ 3x = 360^\circ m,\ m \in \boldsymbol{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 144^\circ n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = 120^\circ m,\ m \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

НОК(144; 120) = 720, т. е. числа вида $144^\circ\ n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, будут совпадать с числами вида $120^\circ\ m,\ m \in \boldsymbol{Z}$, через каждые 720°, значит, корнями исходного уравнения являются значения переменной, равные $720^\circ k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -720°.

Ответ: -720°.

Пример 11. Докажите, что уравнение $\sqrt{x^4 + 10} = 3\sin x$ не имеет корней.

Решение.

Так как $x^4 + 10 \geqslant 10$ для $x \in \boldsymbol{R}$, то $\sqrt{x^4 + 10} \geqslant \sqrt{10} > 3$.

С другой стороны, $3\sin x \leqslant 3$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Так как левая часть уравнения больше трех, а правая — не превосходит трех для любых действительных значений переменной, то уравнение не имеет корней.

Пример 12. Найдите число корней уравнения $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}} = 0$ на промежутке $[0;\ 9\pi]$.

Решение.

$$\frac{1 + \cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}} = 0; \quad \begin{cases} 1 + \cos x = 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{3} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{3} \neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы: $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Промежутку $[0;\ 9\pi]$ принадлежат корни π; 3π; 5π; 7π; 9π.

При $x = \pi$ получим $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \neq 0$.

При $x = 3\pi$ получим $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{3} = \operatorname{tg}\pi = 0$.

При $x = 5\pi$ получим $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} \neq 0$.

При $x = 7\pi$ получим $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} \neq 0$.

При $x = 9\pi$ получим $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{3} = \operatorname{tg}3\pi = 0$.

Таким образом, три корня уравнения $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}} = 0$ принадлежат промежутку $[0;\ 9\pi]$.

Ответ: 3.

Пример 13. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\dfrac{\cos 3x}{1-2\sin x} = 0$.

Решение.

Уравнение $\dfrac{\cos 3x}{1-2\sin x} = 0$ равносильно системе

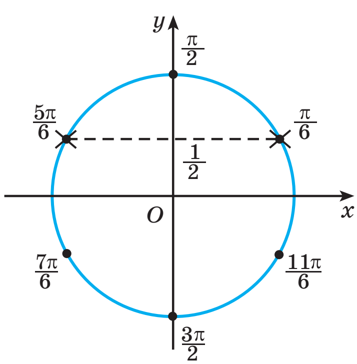


Рис. 58

$$\begin{cases}\cos 3x = 0,\\ 1-2\sin x \neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \sin x \neq \dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \sin x \neq \dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Отметим на единичной окружности числа вида $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 58). Учитывая условие $\sin x \neq \frac{1}{2}$, получим, что числа вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, не являются корнями данного уравнения.

Наименьшим положительным корнем уравнения является число $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 14. Найдите (в градусах) сумму корней уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{|\cos x|}$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.

Решение.

Если $\cos x > 0$, то уравнение принимает вид $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Условию $\cos x > 0$ удовлетворяют числа вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Из них только $\frac{\pi}{4} \in [0;\ 2\pi]$.

Если $\cos x < 0$, то уравнение принимает вид $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Условию $\cos x < 0$ удовлетворяют числа вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Из них только $\frac{3\pi}{4} \in [0;\ 2\pi]$.

Искомая сумма равна $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi = 180°$.

Ответ: 180°.

Тригонометрические неравенства

Пример 15. Решите неравенство $\sin x > 0{,}5$.

Решение.

Так как период функции $y = \sin x$ равен 2π, то рассмотрим решение неравенства $\sin x > 0{,}5$ на этом периоде, например на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

1. Отложим на оси ординат точку, соответствующую числу 0,5.

2. На единичной окружности отметим две точки, ординаты которых равны 0,5 (рис. 59).

3. Запишем угол, соответствующий одной из этих точек отрезка $[0;\ 2\pi]$. Это угол $\frac{\pi}{6}$.

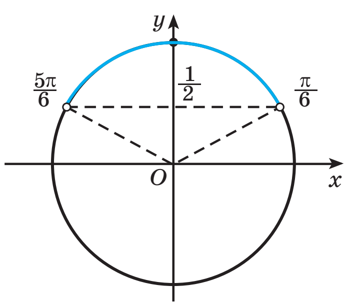


Рис. 59

4. В соответствии со знаком неравенства поворачивать точку по окружности следует через точку $\frac{\pi}{2}$.

5. Угол, соответствующий второй точке, — угол $\frac{5\pi}{6}$.

6. Следовательно, $x \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$. С учетом периодичности функции $y = \sin x$ получим ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Алгоритм решения неравенства $\sin x > a$ ($\sin x < a$), $|a| < 1$ ***с помощью единичной окружности***

① Отложить на оси ординат точку, соответствующую числу a.

② Отметить на единичной окружности две точки, ординаты которых равны a.

③ Записать угол, соответствующий одной из этих точек.

④ Определить в соответствии со знаком неравенства, по какой из двух дуг окружности нужно двигаться к другой отмеченной точке.

⑤ Двигаясь по окружности, определить угол, соответствующий второй отмеченной точке.

⑥ Записать ответ в виде промежутка от меньшего угла к большему, добавляя период.

Пример 16. Решите неравенство $\cos x < 0{,}5$.

Решение. Так как период функции $y = \cos x$ равен 2π, то рассмотрим решение неравенства $\cos x < 0{,}5$ на этом периоде, например на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

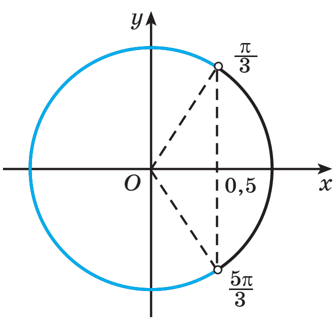


Рис. 60

1. Отложим на оси абсцисс точку, соответствующую числу 0,5.

2. На единичной окружности отметим две точки, у которых абсциссы равны 0,5 (рис. 60).

3. Запишем угол, соответствующий одной из этих точек из отрезка $[0;\ 2\pi]$. Это угол $\frac{\pi}{3}$.

4. В соответствии со знаком неравенства двигаться по окружности следует через точки $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

5. Угол, соответствующий второй точке, — угол $\frac{5\pi}{3}$.

6. Следовательно, $x \in \left(\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right)$. С учетом периодичности функции $y = \cos x$ получим ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Алгоритм решения неравенства $\cos x > a$ ($\cos x < a$), $|a| < 1$ ***с помощью единичной окружности***

① Отложить на оси абсцисс точку, соответствующую числу a.

② Отметить на окружности две точки, абсциссы которых равны a.

③ Записать угол, соответствующий одной из этих точек.

④ Определить в соответствии со знаком неравенства, по какой из двух дуг окружности нужно двигаться к другой отмеченной точке.

⑤ Двигаясь по окружности, определить угол, соответствующий второй отмеченной точке.

⑥ Записать ответ в виде промежутка от меньшего угла к большему, добавляя период.

Пример 17. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant 1$.

Решение.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π и определена для всех $x \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$, то рассмотрим решение неравенства на периоде, например на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает, а значение, равное 1, принимает при $x = \frac{\pi}{4}$. Решение неравенства на этом периоде есть интервал $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

С учетом периодичности получим ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 18. Решите неравенство $2\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3} - \sin\left(\arcsin\left(\operatorname{tg} x\right)\right)$.

Решение.

По свойству $\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1;\ 1]$ будем иметь

$$\sin\left(\arcsin\left(\operatorname{tg} x\right)\right) = \operatorname{tg} x, \text{ если } \operatorname{tg} x \in [-1;\ 1].$$

$$2\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3} - \sin\left(\arcsin\left(\operatorname{tg} x\right)\right) \Leftrightarrow 2\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3} - \operatorname{tg} x,\ \operatorname{tg} x \in [-1;\ 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3},\ \operatorname{tg} x \in [-1;\ 1] \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{tg} x \in [-1;\ 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

13.1. Решите уравнение:

а) $\sin\left(\frac{x}{8} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 765^\circ$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sin 900^\circ$.

13.2. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 7\cos 4x + 3$ и $y = 3\sin^2 4x$.

13.3. Найдите сумму корней уравнения $\cos\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

13.4. Найдите нули функции $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - 7x\right) + 1$.

13.5. Решите уравнение:

а) $\sin x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 0$;   б) $\cos x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

13.6. Найдите все корни уравнения:

а) $2\sin^2 x - \left(12 - \sqrt{2}\right)\sin x - 6\sqrt{2} = 0$;

б) $2\cos^2 x + \left(8 - \sqrt{3}\right)\cos x - 4\sqrt{3} = 0$.

13.7. Найдите число корней уравнения $\operatorname{ctg}^2 x - \left(\sqrt{3} - 1\right)\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$ на промежутке $\left[-\pi;\ 2\pi\right]$.

13.8. Решите уравнение:

а) $\sin^2 12x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 2x - \cos^2 12x + 1$;

б) $\cos^2 \frac{2x}{5} - 1 - \cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin^2 \frac{2x}{5}$.

13.9. Найдите сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней уравнения $2\cos^2 2x - 17\cos 2x - 9 = 0$.

13.10. Определите число корней уравнения на промежутке $[-12\pi;\ 5\pi]$:

а) $(\cos x - 1)\operatorname{ctg} x = 0$;   б) $(\cos x + 1)\left(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}\right) = 0$;

в) $(\sin x - 1)\left(\operatorname{tg} x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$;   г) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x - \sin x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$.

13.11. Найдите нули функции $y = \operatorname{ctg} x\left(\cos\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

13.12. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $f(x) = 5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 6\cos^2 x$ и прямой $y = 5$;

б) $f(x) = 3\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x$ и прямой $y = 2$;

в) $f(x) = 3\sin^2 \frac{x}{5} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5} + 4\cos^2 \frac{x}{5}$ и прямой $y = 3$.

13.13. Найдите (в градусах) среднее арифметическое корней уравнения $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[-120^\circ;\ 90^\circ]$.

13.14. Определите число корней уравнения
$\sin^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ на промежутке $\left[-2\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

13.15. Решите уравнение $4\cos^3 x - \cos x + \sin x = 0$.

13.16. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $\sin\frac{\pi x}{6} = x^2 - 6x + 10$;   б) $2\cos 2\pi x = x + \frac{1}{x}$.

13.17. Решите уравнение, используя множество значений функций синус и косинус:

а) $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2;$ б) $3\sin^2\frac{x}{3} + 5\sin^2 x = 8.$

13.18. Докажите, что уравнение $\sqrt{8+\cos x} = 3 + x^4$ имеет единственный корень.

13.19. Решите уравнение:

а) $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1-\sin x} = 0;$ б) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 - \cos x;$ в) $\frac{2\cos x + \sqrt{3}}{2\sin x - 1} = 0.$

13.20. Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = 0.$

13.21. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\frac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x} = 0.$

13.22. Решите уравнение:

а) $\cos x - |\sin x| = 0;$ б) $|\cos x| - \sqrt{3}\sin x = 0;$

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x = \frac{|\sin x|}{\sin x};$ г) $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x.$

13.23. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения $|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$

13.24. Найдите число корней уравнения $1 + 2\sin x|\cos x| = 0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$

13.25. Найдите число корней уравнения $\sin x - \frac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1}\cdot\sin^2 x = \sin^2 x$ на промежутке $[-\pi; 2\pi].$

13.26. Решите неравенство:

а) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2};$ б) $\sin 2x < -\frac{1}{2};$ в) $\sin x \geqslant \sqrt{3};$

г) $\cos\frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2};$ д) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2};$ е) $\cos x > -1{,}5;$

ж) $\operatorname{tg} 0{,}1x > \frac{\sqrt{3}}{3};$ з) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -1.$

13.27. Решите двойное неравенство:

а) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2};$ б) $0 < \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $1 \leqslant \operatorname{tg} x < 2;$ г) $-\sqrt{3} < \operatorname{ctg} x < 5.$

13.28. Решите неравенство $\sin\left(\arccos\left(x^2+\sqrt{3}x\right)\right)\geqslant 1$.

13.29. Найдите произведение корней уравнения $\sin\dfrac{\pi\left(x^2+1\right)}{7+x^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

13.30. Найдите наименьшее целое положительное число, принадлежащее области определения функции $f(x)=\sqrt{\cos^2\dfrac{\pi x}{12}-\sin^2\dfrac{\pi x}{12}-1}$.

13.31. Найдите число корней уравнения

$\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+1}+\sqrt{\cos^2 x-4\cos x+4}=1$ на отрезке $[0;\ 10]$.

§ 14. Формулы приведения

Пример 1. Определите, какие свойства и формулы были применены при упрощении выражения:

а) $\sin\left(540^\circ-\alpha\right)=\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\left(450^\circ+\beta\right)=\operatorname{tg}\left(90^\circ+\beta\right)=-\operatorname{ctg}\beta$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\gamma-270^\circ\right)=-\operatorname{ctg}\left(270^\circ-\gamma\right)=-\operatorname{tg}\gamma$;

г) $\cos\left(\varphi-810^\circ\right)=\cos\left(810^\circ-\varphi\right)=\cos\left(90^\circ-\varphi\right)=\sin\varphi$.

Решение.

а) Периодичность функции синус, формулы приведения;
б) периодичность функции тангенс, формулы приведения;
в) нечетность функции котангенс, формулы приведения;
г) четность и периодичность функции косинус, формулы приведения.

Пример 2. Вычислите $\sin\left(-\dfrac{20\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{21\pi}{4}}-2\operatorname{tg}^2\dfrac{7\pi}{4}$.

Решение.

1) $\sin\left(-\dfrac{20\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{20\pi}{3}=-\sin\left(6\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=$

$=-\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos^2\dfrac{21\pi}{4}=\cos^2\left(4\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)=\cos^2\dfrac{5\pi}{4}=\cos^2\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}^2\dfrac{7\pi}{4}=\operatorname{tg}^2\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4}=1$;

4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2-2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Вычислите значение выражения $\frac{\sin 127^\circ + 2\cos 143^\circ + \sin 540^\circ}{\cos 37^\circ}$.

Решение. Воспользуемся формулами приведения и получим:

$$\frac{\sin 127^\circ + 2\cos 143^\circ + \sin 540^\circ}{\cos 37^\circ} = \frac{\sin(90^\circ + 37^\circ) + 2\cos(180^\circ - 37^\circ) + \sin(360^\circ + 180^\circ)}{\cos 37^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 37^\circ - 2\cos 37^\circ + \sin 180^\circ}{\cos 37^\circ} = \frac{-\cos 37^\circ}{\cos 37^\circ} = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 4. Найдите значение выражения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arcctg} 4\right) + \cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Решение. Воспользуемся формулами приведения и получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arcctg} 4\right) + \cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 4) - \cos\left(\pi - \left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 4) + \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = 4 + \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

Ответ: $4\frac{1}{3}$.

Пример 5. Вычислите: $\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right)$.

Решение.

$$\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right) = \frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\left(2\pi + \frac{13\pi}{11}\right)\right) =$$

$$= \frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{11}\right) = \frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{11}\right)\right) =$$

$$= \frac{22}{\pi}\arcsin\left(-\cos\frac{2\pi}{11}\right) = -\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{11}\right) = -\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{11}\right)\right) =$$

$$= -\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{22}\right) = -\frac{22}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{22} = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 6. Решите уравнение $3\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5\cos x = 0$.

Решение. Воспользуемся формулами приведения и получим уравнение $3\sin x - 5\cos x = 0$.

Так как значения переменной, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ и получим: $3\operatorname{tg} x - 5 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{5}{3}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7.$

Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, то уравнение принимает вид $6(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 7$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$

Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, тогда $6t^2 - 5t + 1 = 0;$

$D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1 > 0;$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 6}$; $t_1 = \frac{1}{3}$; $t_2 = \frac{1}{2}.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{3}, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 8. Постройте график функции $y = \frac{|x|}{x}\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

Решение.

$y = \frac{|x|}{x}\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

Используем формулы приведения и получим $y = \frac{|x|}{x}\sin x + \sin x$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = \frac{x}{x}\sin x + \sin x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = -\frac{x}{x}\sin x + \sin x; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = \sin x + \sin x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = -\sin x + \sin x; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = 2\sin x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

График данной функции изображен на рисунке 61.

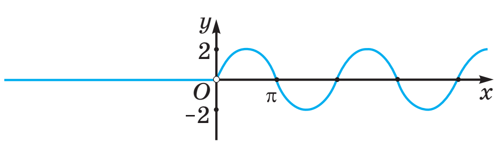


Рис. 61

14.1. Вычислите значение выражения:

а) $\dfrac{3\cos196^\circ + 12\cos164^\circ}{\cos16^\circ}$; б) $\dfrac{2\cos201^\circ - 16\sin111^\circ}{\cos21^\circ}$.

14.2. Найдите значение выражения

$$\sin^2 6{,}4\pi + \sin^2 2{,}9\pi - 4\,\mathrm{tg}\,1{,}4\pi \cdot \mathrm{tg}\,7{,}1\pi.$$

14.3. Используя формулы приведения, докажите, что:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

б) $\cos\left(\frac{17\pi}{12} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{25\pi}{13} - x\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{13} + x\right)$.

14.4. Найдите значение выражения

$$-\cos\left(\frac{27\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(-21\pi - \alpha),$$

если $\sin\alpha = -0{,}1$.

14.5. Вычислите:

а) $\sin\left(\pi - \arcsin\frac{2}{7}\right)$; б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \mathrm{arctg}(-5)\right)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,9\right) + \cos(\pi - \arccos(-0{,}9))$.

14.6. Найдите значение выражения:

а) $\cos\left(\pi + \arcsin\frac{4}{9}\right)$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos 0{,}6\right)$;

в) $5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right)$.

14.7. Упростите выражение:

а) $\sin^2(\pi - \alpha) + \mathrm{tg}^2(\alpha - \pi) \cdot \mathrm{tg}^2(1{,}5\pi + \alpha) + \sin(0{,}5\pi + \alpha)\cos(\alpha - 2\pi)$;

б) $\dfrac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)\right)^2 - 1}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha)}$;

в) $\left(\mathrm{ctg}(8{,}5\pi - \alpha)\cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)\right)^2 + \dfrac{2\sin^2(7\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}(\alpha - \pi)}$.

14.8. Найдите значение выражения:

а) $\mathrm{ctg}\,5^\circ\,\mathrm{ctg}\,15^\circ\,\mathrm{ctg}\,25^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{ctg}\,75^\circ\,\mathrm{ctg}\,85^\circ$;

б) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

14.9. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\sin(\alpha - \pi)}{\mathrm{ctg}(2\pi - \alpha)}$, если $\mathrm{ctg}(\alpha - \pi) = 0{,}75$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha - 270^\circ)\sin(\alpha + 270^\circ)}{\mathrm{tg}(\alpha + 180^\circ)}$, если $\sin(\alpha - 180^\circ) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

14.10. Вычислите: $\frac{96}{\pi}\arccos\left(\sin\left(-\frac{23\pi}{48}\right)\right)$.

14.11. Используйте формулы приведения и решите уравнение:

а) $2\cos^2 x - 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2\sin x + 2$;

б) $\dfrac{5}{\cos^2(3\pi - x)} = 17 + \mathrm{tg}^2(2\pi - x)$;

в) $\cos\left(1{,}5\pi + \frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(1{,}5\pi - \frac{x}{2}\right) = 0$.

14.12. Для функции $f(x) = 7\cos 4x + \mathrm{ctg}\,8x$ найдите:

а) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; б) $f\left(-\frac{5\pi}{16}\right)$.

14.13. Найдите значение выражения $\dfrac{\cos\left(\alpha - \frac{33\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{35\pi}{4} - \alpha\right)}$, если $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 8$.

14.14. Найдите сумму корней уравнения $3\cos(1{,}5\pi + x) = 2\cos^2 x$, принадлежащих промежутку $[0; \pi]$.

14.15. Найдите (в градусах) значение угла $\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{tg}\,658^\circ)$.

14.16. Используйте формулы приведения и решите неравенство:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \leqslant \frac{1}{2}$; б) $\cos(\pi + x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\mathrm{tg}(7{,}5\pi - 2x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

14.17. Решите уравнение $x^2 + 2\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)x + 1 = 0$.

§ 15. Синус, косинус, тангенс суммы и разности

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Пример 1. Найдите значение выражения $16\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Решение. Найдем значение выражения

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cos 45^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Вычислим значение искомого выражения:

$$16\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=$$

$$=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6-2\sqrt{12}+2}=$$

$$=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{8-4\sqrt{3}}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=8\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=8\cdot 1=8.$$

Ответ: 8.

Пример 2. Найдите значение выражения $\cos\left(\arcsin 0{,}6+\arccos\frac{5}{13}\right)$.

Решение.

Найдем значение выражения $\cos\left(\arcsin 0{,}6+\arccos\frac{5}{13}\right)$.

Пусть $\alpha=\arcsin 0{,}6$; $\beta=\arccos\frac{5}{13}$; $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\beta=\frac{5}{13}$. Поскольку $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=0{,}8$; $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{12}{13}$.

Получим

$$\cos\left(\arcsin 0{,}6+\arccos\frac{5}{13}\right)=\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{16}{65}.$$

Ответ: $-\frac{16}{65}$.

Пример 3. Найдите $2\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$; $\mathrm{tg}\beta = 2$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$; $\cos\alpha = 0{,}8$ или $\cos\alpha = -0{,}8$.

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha = -0{,}8$, тогда $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$.

По формуле тангенса суммы $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$ получим

$$2\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = 2\cdot\frac{-\frac{3}{4}+2}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 4. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{6} < 2\pi$.

Решение. Зная $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14}$, с помощью основного тригонометрического тождества найдем

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{13}{14}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{27}{196}} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Так как $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{6} < 2\pi$, то $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Воспользуемся формулами сложения:

$$\begin{cases}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14},\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{14};\end{cases} \quad \begin{cases}\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{13}{14},\\ \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{14};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = -\frac{13}{14},\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14};\end{cases} \quad \begin{cases}\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{13}{7},\\ \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{7}; \ \Big|\cdot\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{13}{7},\\ 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = \frac{9}{7}.\end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения системы и получим $4\cos\alpha = -\frac{4}{7}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{7}$.

Ответ: $-\frac{1}{7}$.

Пример 5. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

Решение.

Умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и получим:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ или } \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле косинуса разности:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}; \; x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

Решение.

Умножим обе части уравнения $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ на $\frac{1}{2}$ и получим: $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, или $\cos 60^\circ \cos x - \sin 60^\circ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Воспользуемся формулой косинуса суммы, тогда уравнение примет вид $\cos(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решим полученное уравнение:

$$\cos(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; x + 60^\circ = \pm 45^\circ + 360^\circ n, \; n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 60^\circ = 45^\circ + 360^\circ m, \; m \in \boldsymbol{Z}, \\ x + 60^\circ = -45^\circ + 360^\circ k, \; k \in \boldsymbol{Z}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -15^\circ + 360^\circ m, \; m \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -105^\circ + 360^\circ k, \; k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -15°.

Ответ: -15°.

Пример 7. Решите уравнение $3\sin x - 4\cos x = 5$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 5 и получим уравнение $\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1$. Поскольку $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, а $\sin\varphi = \frac{4}{5}$.

Тогда исходное уравнение принимает вид $\cos\varphi \sin x - \sin\varphi \cos x = 1$. По формуле синуса разности получим: $\sin(x - \varphi) = 1$, $x - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 8. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

Решение. Представим сумму $\sin x + \sqrt{3}\cos x$ в виде: $2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Так как $E(\sin t) = [-1;\ 1]$, то $E(f) = [-2;\ 2]$.

Ответ: $E(f) = [-2;\ 2]$.

Пример 9. Найдите (в градусах) значение выражения

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Так как $\frac{1}{2} > 0$ и $\frac{1}{3} > 0$, то $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; $\beta \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\alpha + \beta \in (0;\ \pi)$.

Найдем значение выражения $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$. Так как $\alpha + \beta \in (0;\ \pi)$, то $\alpha + \beta = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

15.1. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin(22^\circ + \alpha)\sin(23^\circ - \alpha) - \cos(22^\circ + \alpha)\cos(23^\circ - \alpha)$.

15.2. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin 58^\circ\cos 13^\circ - \cos 58^\circ\sin 13^\circ}{\cos 58^\circ\cos 13^\circ + \sin 58^\circ\sin 13^\circ}$;

б) $\frac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ - \cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ - \cos 49^\circ\cos 19^\circ}$;

в) $\frac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ - \cos 160^\circ\sin 370^\circ}{\sin 21^\circ\sin 81^\circ + \cos 159^\circ\cos 99^\circ}$;

г) $\frac{\operatorname{ctg} 40^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{ctg} 40^\circ\operatorname{tg} 20^\circ + 1}$.

15.3. Докажите тождество:

а) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}$;

б) $\frac{\cos(1{,}5\pi + \alpha) + 2\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sqrt{3}\sin(1{,}5\pi - \alpha)} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

15.4. Упростите выражение $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ и найдите его значение при $\beta=\frac{5\pi}{12}$.

15.5. Докажите, что $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2$.

15.6. Найдите значение выражения $\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{3}$.

15.7. Докажите, что значение выражения

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\alpha$$

не зависит от α.

15.8. Найдите $\sin(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{3}{4}$, причем $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

15.9. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y=\cos\frac{7x}{2}\cos x+\sin x\sin\frac{7x}{2}$; б) $y=\sin\frac{5x}{3}\cos x-\cos\frac{5x}{3}\sin x$.

15.10. Вычислите:

а) $\sin 15^\circ+\operatorname{tg}30^\circ\cos 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\sin 75^\circ$.

15.11. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}$ и прямой $y=1$;

б) $y=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x$ и прямой $y=1$.

15.12. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sqrt{3}-2\operatorname{tg}15^\circ}{1+\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}15^\circ}$.

15.13. Вычислите:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)-\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

в) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)+\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

15.14. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 50^\circ\cos 12^\circ-\sin 40^\circ\cos 78^\circ}{\cos 68^\circ-\sqrt{3}\sin 68^\circ}$.

15.15. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$; б) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; г) $5\cos x+12\sin x=13$.

15.16. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{6}+\cos\frac{\pi x}{6}-2=0.$$

15.17. Найдите число корней уравнения $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

15.18. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 35^\circ \operatorname{tg}^2 25^\circ}{\operatorname{tg}^2 35^\circ - \operatorname{tg}^2 25^\circ}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 50^\circ - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 50^\circ \operatorname{tg}^2 5^\circ}$.

15.19. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Найдите значение выражения $125\cos\gamma$, где γ — третий угол треугольника.

15.20. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{9}$; б) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$.

15.21. Проверьте, верно ли равенство $\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

15.22. Решите неравенство:

а) $\sin x \sin 3x < \cos 3x \cos x$;

б) $\sin x \cos\frac{5x}{2} \geqslant \cos x \sin\frac{5x}{2}$;

в) $\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x \leqslant \frac{1}{2}$;

г) $\cos 5x \cos 3x + \sin 5x \sin 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.23. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = |\cos x|$.

§ 16. Формулы двойного аргумента

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Пример 1. Найдите значение выражения

$$32 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}.$$

Решение. Умножим и разделим выражение на $\sin\frac{\pi}{48}$ и воспользуемся формулой синуса двойного угла:

$$32 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{23\pi}{48} = \frac{32 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \sin\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{16\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\right)\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{16\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{8\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\right)\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{8\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{4\cdot\left(2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{4\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{2\cdot\cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{48}\right)}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{2\cdot\sin\frac{\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Решение.

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\left(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 3. Вычислите: $\sin^4\frac{23\pi}{12} - \cos^4\frac{13\pi}{12}$.

Решение. Воспользуемся формулами приведения:

$$\sin^4\frac{23\pi}{12} - \cos^4\frac{13\pi}{12} = \sin^4\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) - \cos^4\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \sin^4\frac{\pi}{12} - \cos^4\frac{\pi}{12}.$$

По формуле разности квадратов получим:

$$\sin^4\frac{\pi}{12} - \cos^4\frac{\pi}{12} = \left(\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12} = -\left(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 4. Найдите значение выражения $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

Решение. По формуле синуса двойного аргумента получим:

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = 2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right).$$

Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Воспользуемся формулами $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Так как $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{9}{16} + 1}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, а $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$. Получим: $2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

Ответ: $\frac{24}{25}$.

Пример 5. Найдите нули функции $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3}$.

Решение. Для нахождения нулей функции решим уравнение $f(x) = 0$, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{4} + \sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3} = 0$; $\sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $2\sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin\frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2\pi x}{3} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Нулями функции $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3}$ являются все числа вида $(-1)^{n+1}\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Определите число корней уравнения $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного угла и получим: $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 0$; $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$; $\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z},\\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

На промежутке $[0;\ 2\pi]$ первое и второе уравнения совокупности имеют по два корня. Таким образом, на данном промежутке уравнение имеет четыре корня.

Ответ: 4.

Пример 7. Решите уравнение $15\sin x - \sin 2x = 15 + 15\cos x$.

Решение. $15\sin x - \sin 2x = 15 + 15\cos x$; $15\sin x - 15\cos x - \sin 2x = 15$; $15(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x = 15$. Пусть $\sin x - \cos x = t$, тогда $(\sin x - \cos x)^2 = t^2$; $\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$; $1 - 2\sin x\cos x = t^2$; $-2\sin x\cos x = t^2 - 1$.

Уравнение $15(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x = 15$ примет вид

$15t + t^2 - 1 = 15$; $t^2 + 15t - 16 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -16, \\ t = 1, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = -16, \\ \sin x - \cos x = 1. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет корней, так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Решим уравнение $\sin x - \cos x = 1$. Умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и получим: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 8. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x \cdot |\sin x| = 0{,}25$.

Решение. $\cos x \cdot |\sin x| = 0{,}25$.

1) При $\sin x \geqslant 0$ уравнение принимает вид

$\cos x \cdot \sin x = 0{,}25$; $2\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}$;

$\sin 2x = \frac{1}{2}$; $2x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = (-1)^n \cdot 15^\circ + 90^\circ n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим полученные числа на единичной окружности (рис. 62).

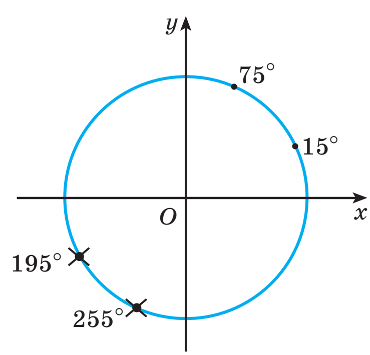


Рис. 62

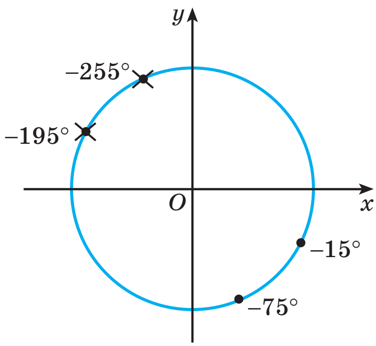


Рис. 63

С учетом условия $\sin x \geqslant 0$ получим, что корнями уравнения являются числа вида $15^\circ + 360^\circ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $75^\circ + 360^\circ k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) При $\sin x < 0$ имеем $-\cos x \cdot \sin x = 0{,}25$;

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$;

$$2x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = (-1)^{m+1} \cdot 15^\circ + 90^\circ m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\sin x < 0$, то $x = -15^\circ + 360^\circ l$, $l \in \boldsymbol{Z}$, и $x = -75^\circ + 360^\circ p$, $p \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 63).

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -15°.

Ответ: -15.

16.1. Найдите значение выражения:

а) $\cos^4 22{,}5^\circ - \sin^4 22{,}5^\circ$;

б) $4\sin 37^\circ 30' \cos 37^\circ 30' \sin 15^\circ$;

в) $\sin 7^\circ 30' \cos 7^\circ 30' \sin 75^\circ$.

16.2. Решите уравнение $\sin 3x - 3\cos 6x = 2$.

16.3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos^2 6x - \cos 12x = 0.$$

16.4. Вычислите:

а) $1 - 8\sin^2\frac{\pi}{24}\cos^2\frac{\pi}{24}$; б) $\dfrac{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$; в) $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}$.

16.5. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3)$; б) $\sin(2\arccos 0{,}6)$;

в) $\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; г) $\operatorname{ctg}(2\arccos 0{,}8)$.

16.6. Вычислите: $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}7\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}7\right)$.

16.7. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 2$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

16.8. Упростите выражение $\dfrac{4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{1-2\cos^2\alpha}$.

16.9. Найдите $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{13}{14}$ и $900^\circ<\alpha<990^\circ$.

16.10. Вычислите: $\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{ctg}15^\circ$.

16.11. Найдите значение выражения $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3$.

16.12. Найдите число корней уравнения

$$\cos4x+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+\cos^2 5x+\sin^2 5x=0$$

на промежутке $[-\pi;\ \pi]$.

16.13. Найдите значение выражения $\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}\right)\cos\frac{\pi}{8}$.

16.14. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y=\sin(-2x)\cos2x$;

б) $y=6\sin\frac{x}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{8}\right)$;

в) $y=\sin^2 4x-\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)$;

г) $y=\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$;

д) $y=\cos\frac{x}{12}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{12}\right)$;

е) $y=\cos^2 5x-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+5x\right)$.

16.15. Вычислите: $64\cos20^\circ\cos40^\circ\cos60^\circ\cos80^\circ$.

16.16. Решите уравнение:

а) $12\sin x-\sin2x=12+12\cos x$;

б) $7+\sin2x=7\sin x+7\cos x$.

16.17. Найдите значение выражения $\left(5\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)^2$, зная, что $\sin2\alpha=0{,}25$.

16.18. Решите неравенство:

а) $\sin5x\cos5x\leqslant\frac{1}{4}$;

б) $4\sin\frac{x}{7}\cdot\sin\left(\frac{x}{7}-\frac{\pi}{2}\right)>\sqrt{3}$;

в) $\sin^2\left(5x-\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}-5x\right)<1$;

г) $\sin^2 0{,}1x-\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-0{,}1x\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16.19. Найдите наибольший отрицательный корень (в градусах) уравнения $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

16.20. Найдите число корней уравнения $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos4x$ на промежутке $[-\pi;\ 1{,}5\pi]$.

16.21. Докажите, что если $\cos(\alpha+\beta)=0$, то $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.

16.22. Решите уравнение $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\frac{1}{2}$.

16.23. Найдите разность (в градусах) наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения $1 + 2\sin x|\cos x| = 0$.

16.24. Докажите тождество $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}$.

§ 17. Формулы преобразования суммы и разности синусов (косинусов) в произведение

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму (разность)

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

Пример 1. Разложите на множители сумму $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Решение. Выполним группировку и применим формулы суммы синусов и синуса двойного аргумента:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 2\sin 2x\cos x + 2\sin x\cos x =$$
$$= 2\cos x(\sin 2x + \sin x) = 2\cdot 2\cos x\left(\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 4\cos x\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Пример 2. Сравните с нулем значение выражения $\frac{2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 250^\circ}$.

Решение.

$$\frac{2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 250^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ)}{-\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 40^\circ - 2\sin\frac{40^\circ - 20^\circ}{2}\sin\frac{40^\circ + 20^\circ}{2}}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - 2\sin 10^\circ\sin 30^\circ}{-\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 40^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 10^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \cos 80^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ \sin 20^\circ}{-\sin 20^\circ} = -\sqrt{3} < 0.$$

Ответ: значение выражения меньше 0.

Пример 3. Упростите выражение $2\sin 10^\circ \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$.

Решение. Пусть $A = 2\sin 10^\circ \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$.

По формуле $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ получим, что $A = 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos(-30^\circ) - \cos 50^\circ) + \cos 50^\circ = \cos 30^\circ - \cos 50^\circ + \cos 50^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 4. Преобразуйте в произведение выражение $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x = \sin\frac{\pi}{3} + \sin x = 2\sin\frac{\frac{\pi}{3} + x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3} - x}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right).$$

Пример 5. Найдите значение выражения

$$100 \cdot (2\sin 5x \cos 7x - \sin 12x),$$

зная, что $\sin x + \cos x = 0{,}3$.

Решение.

По формуле $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$ преобразуем выражение

$$A = 100 \cdot (2\sin 5x \cos 7x - \sin 12x) =$$

$$= 100 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin(-2x)) - \sin 12x\right) =$$

$$= 100 \cdot (\sin 12x - \sin 2x - \sin 12x) = -100\sin 2x$$

Возведем обе части равенства $\sin x + \cos x = 0{,}3$ в квадрат и получим

$$(\sin x + \cos x)^2 = 0{,}09; \; \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0{,}09;$$

$$1 + 2\sin x \cos x = 0{,}09; \; 2\sin x \cos x = -1 + 0{,}09;$$

$$2\sin x \cos x = -0{,}91; \; \sin 2x = -0{,}91.$$

Тогда $A = -100\sin 2x = -100 \cdot (-0{,}91) = 91$.

Ответ: 91.

Пример 6. Упростите выражение $\left(\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}\right)^4$ и найдите его значение при $\alpha = \frac{\pi}{18}$.

Решение.

$$\left(\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}\right)^4 = \left(\frac{(\cos\alpha + \cos 5\alpha) - (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)}{(\sin\alpha + \sin 5\alpha) - (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha - 2\cos 3\alpha\cos\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha - 2\sin 3\alpha\cos\alpha}\right)^4 = \left(\frac{2\cos 3\alpha(\cos 2\alpha - \cos\alpha)}{2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha - \cos\alpha)}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}\right)^4 = (\operatorname{ctg} 3\alpha)^4\Big|_{\alpha = \frac{\pi}{18}} = \left(\operatorname{ctg}\left(3\cdot\frac{\pi}{18}\right)\right)^4 = \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 7. Найдите (в градусах) сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней уравнения $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

Решение.

Так как по формулам приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right),$$

то запишем уравнение $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ в виде

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right);\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0.$$

Воспользуемся формулой разности синусов:

$$2\sin\frac{3x - \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{2}\cos\frac{3x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + x}{2} = 0;\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2x = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0,\\ \cos 2x = 0;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x - \frac{\pi}{6} = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = 30^\circ + 180^\circ n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = 45^\circ + 90^\circ k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -45°. Наименьший положительный корень уравнения равен 30°. Их сумма равна -15°.

Ответ: -15°.

Пример 8. Найдите число корней уравнения
$\cos 6\pi x \sin 9\pi x = \cos \pi x \sin 14\pi x$ на промежутке $[3;\ 4]$.

Решение. $\cos 6\pi x \sin 9\pi x = \cos \pi x \sin 14\pi x;$

$$\frac{1}{2}\left(\sin(9\pi x + 6\pi x) + \sin(9\pi x - 6\pi x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(14\pi x + \pi x) + \sin(14\pi x - \pi x)\right);$$

$$\sin 15\pi x + \sin 3\pi x = \sin 15\pi x + \sin 13\pi x;$$

$$\sin 3\pi x = \sin 13\pi x;\ \sin 13\pi x - \sin 3\pi x = 0;$$

$$2\sin\frac{13\pi x - 3\pi x}{2}\cos\frac{13\pi x + 3\pi x}{2} = 0;\ \sin 5\pi x \cos 8\pi x = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 5\pi x = 0,\\ \cos 8\pi x = 0;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}5\pi x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 8\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \frac{n}{5},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{1}{16} + \frac{k}{8},\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Определим количество чисел вида $\frac{n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на промежутке $[3;\ 4]$. Для этого решим двойное неравенство $3 \leqslant \frac{n}{5} \leqslant 4;$ $15 \leqslant n \leqslant 20.$ Полученное неравенство имеет шесть целых решений.

Решим неравенство $3 \leqslant \frac{1}{16} + \frac{k}{8} \leqslant 4$ при $k \in \boldsymbol{Z}$:

$$48 \leqslant 1 + 2k \leqslant 64;\ 47 \leqslant 2k \leqslant 63;\ 23{,}5 \leqslant k \leqslant 31{,}5.$$

Данное неравенство имеет восемь целых решений.

Таким образом, на промежутке $[3;\ 4]$ исходное уравнение имеет 14 корней.

Ответ: 14.

17.1. Разложите на множители сумму:

а) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$; б) $\sin\alpha + 2\sin 5\beta + \sin 9\beta$.

17.2. Найдите значение выражения:

а) $\sin 72^\circ + \cos 222^\circ - \sin 12^\circ$; б) $\dfrac{\cos 78^\circ + \sin 228^\circ}{\sin^2 54^\circ - \cos^2 54^\circ}$.

17.3. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$; б) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$.

17.4. Найдите среднее арифметическое корней уравнения
$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x$$
на промежутке $\left[-\pi;\ 0{,}5\pi\right]$.

17.5. Докажите тождество $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

17.6. Найдите сумму различных корней уравнения
$$\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$$
на промежутке $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

17.7. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$.

17.8. Найдите число различных корней уравнения
$$\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x$$
на промежутке $\left[0;\ 2\pi\right]$.

17.9. Докажите, что значение выражения
$$\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right)$$
не зависит от α.

17.10. Найдите число корней уравнения $\sin x + \sin 5x + \sqrt{3}\sin 3x = 0$ на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

17.11. Найдите число различных корней уравнения $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$ на промежутке $\left[0;\ 2\pi\right]$.

17.12. Найдите значение выражения $\cos\dfrac{11\pi}{56}\cos\dfrac{3\pi}{56} - \sin\dfrac{5\pi}{21}\sin\dfrac{2\pi}{21} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

17.13. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$.

17.14. Найдите число решений уравнения
$$\sin 6x \cos 2x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x$$
на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{3}\right]$.

17.15. Решите уравнение:

а) $\cos 3x = \sin x$; б) $\sin 5x = \cos x$.

17.16. Решите уравнение $|\sin x| = \cos 5x$.

17.17. Существуют ли действительные значения α, при которых верно равенство $\sin\alpha + \sin 6\alpha = \sin 7\alpha$?

§ 18. Корень n-й степени из числа a $(n \geqslant 2,\ n \in N)$

Пример 1. Найдите значение выражения $\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^6$.

Решение. $\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^6 = (-2)^6 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8 = 256.$

Ответ: 256.

Пример 2. Найдите все значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt[6]{3x-1}$; б) $\sqrt[10]{x^2-4}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5x-x^2}}$; г) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}}$.

Решение.

а) Выражение $\sqrt[6]{3x-1}$ имеет смысл при $3x-1 \geqslant 0$, т. е. при $x \geqslant \dfrac{1}{3}$.

б) Выражение $\sqrt[10]{x^2-4}$ имеет смысл при $x^2-4 \geqslant 0$, т. е. при $x \in \left(-\infty;\ -2\right] \cup \left[2;\ +\infty\right)$.

в) Выражение $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5x-x^2}}$ имеет смысл при $5x-x^2 > 0$, $x^2-5x < 0$, т. е. при $x \in (0;\ 5)$.

г) Выражение $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}}$ имеет смысл при $x^2-4x+3 \neq 0$, т. е. при $x \neq 1$, $x \neq 3$.

Пример 3. Решите уравнение:

а) $8x^3 = 5$; б) $\dfrac{x^8}{2} = 3$; в) $0{,}2x^5 = -7$;

г) $(x-1)^{10} = -3$; д) $(3x-1)^5 = 32$; е) $(x-7)^4 = 81$;

ж) $(4-5x)^3 = 125$; з) $(0{,}1x-5)^6 = 0{,}000001$.

Решение.

а) $8x^3 = 5 \Leftrightarrow (2x)^3 = 5 \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$;

б) $\dfrac{x^8}{2} = 3 \Leftrightarrow x^8 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[8]{6}, \\ x = -\sqrt[8]{6}; \end{array}\right.$

в) $0{,}2x^5 = -7 \Leftrightarrow x^5 = -35 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-35} \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{35}$;

г) $(x-1)^{10} = -3 \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

д) $(3x-1)^5 = 32 \Leftrightarrow 3x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$;

е) $(x-7)^4=81 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-7=3, \\ x-7=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10, \\ x=4; \end{array}\right.$

ж) $(4-5x)^3=125 \Leftrightarrow 4-5x=5 \Leftrightarrow -5x=1 \Leftrightarrow x=-0{,}2;$

з) $(0{,}1x-5)^6=0{,}000001 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0{,}1x-5=0{,}1, \\ 0{,}1x-5=-0{,}1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=51, \\ x=49. \end{array}\right.$

18.1. Найдите значение выражения:

а) $0{,}3\sqrt[4]{625}+2\sqrt[7]{-128}-5\cdot\left(-\sqrt[10]{7}\right)^{10};$

б) $\left(-5\sqrt[3]{-2}\right)^3-\sqrt[8]{3^8}+\left(-0{,}1\sqrt[4]{5}\right)^4;$

в) $25\sqrt[3]{-0{,}008}+3\sqrt[5]{0{,}00032}-\left(-3\sqrt[5]{-2}\right)^5;$

г) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{100\,000}}\cdot\sqrt[4]{7\dfrac{58}{81}}-\sqrt[5]{-7\dfrac{19}{32}}+\sqrt[13]{-1}.$

18.2. Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt[8]{7x-2};$ б) $\sqrt[14]{9x^2-1};$ в) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^2+3x}};$ г) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^2-6x+8}}.$

18.3. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{81}-1};$ б) $\sqrt[12]{0{,}9-\sqrt[7]{-0{,}0000001}};$ в) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3\dfrac{13}{81}}+1\dfrac{1}{9}\cdot\sqrt[3]{-0{,}027}}.$

18.4. Решите уравнение:

а) $27x^3-1=0;$ б) $5x^6+2=0;$ в) $64x^3+3=0;$

г) $81x^4-5=0;$ д) $(7x+1)^3=27;$ е) $(x-5)^6=64;$

ж) $(2-3x)^5=-1;$ з) $(0{,}3x+5)^4=0{,}0016.$

18.5. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}};$ б) $\sqrt[4]{270\sqrt[4]{0{,}0081}};$ в) $\sqrt[4]{-2\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{-216}}.$

18.6. Решите уравнение:

а) $x^6+x^3-56=0;$ б) $x^{12}+8x^6-9=0;$

в) $x^8-82x^4+81=0;$ г) $64x^6-63x^3-1=0.$

18.7. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt[16]{x^2-25}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3-x^2}}$;   б) $\sqrt[8]{2x^2-5x+2}-\dfrac{x+7}{\sqrt[3]{4x^2-1}}$.

18.8. Найдите значение выражения $(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)$ при $a=\sqrt[4]{7}$, $b=\sqrt[8]{11}$.

18.9. Найдите, при каких значениях числа a уравнение $3x^{12}=2a-1$:

а) имеет два корня;

б) имеет один корень;

в) не имеет корней.

18.10. Найдите, при каких значениях числа a уравнение $x^8=a^2-16$:

а) имеет два корня;

б) имеет один корень;

в) не имеет корней.

§ 19. Свойства корней n-й степени $(n \geqslant 2,\ n \in N)$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}; \qquad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}};$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0)$$

$$\left(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ n \in N,\ m \in N,\ k \in N,\ n \geqslant 2,\ m \geqslant 2,\ k \geqslant 2\right)$$

Пример 1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$.

Решение.

Воспользуемся свойствами корней n-й степени и получим:

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[5]{\frac{2}{64}}+\sqrt[3]{3\cdot 9}=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}+\sqrt[3]{27}=\frac{1}{2}+3=3{,}5.$$

Ответ: 3,5.

Пример 2. Известно, что значение выражения $\dfrac{\sqrt[7]{a^7}-\sqrt[6]{a^6}}{-2a}$ равно -1. Найдите все возможные значения, которые может принимать a.

Решение. $\dfrac{\sqrt[7]{a^7}-\sqrt[6]{a^6}}{-2a}=-1$; $\dfrac{a-|a|}{-2a}=-1$; $\begin{cases}a-|a|=2a,\\ a\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}|a|=-a,\\ a\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ a\neq 0;\end{cases}$ $a<0$; $a\in(-\infty;\ 0)$.

Ответ: $a\in(-\infty;\ 0)$.

Пример 3. Вычислите: $\sqrt[6]{5^7\cdot\sqrt[7]{5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}$.

Решение. $\sqrt[6]{5^7\cdot\sqrt[7]{5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{49}\cdot5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}} =$

$$= \sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{54}}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[42]{5^{54}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{5^9}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{5^9\cdot5^{-2}} = \sqrt[7]{5^7} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 4. Найдите значение выражения $\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$.

Решение. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} =$

$$= \left|2+\sqrt{2}\right|-\sqrt{\left|3-2\sqrt{2}\right|} = 2+\sqrt{2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = 2+\sqrt{2}-\left|1-\sqrt{2}\right| =$$

$$= 2+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right) = 3.$$

Ответ: 3.

19.1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[7]{3^{14}\cdot5^7}$; б) $\sqrt[8]{2^{32}\cdot3^{24}}$; в) $\sqrt[6]{\dfrac{3^{18}\cdot13^6}{5^{12}\cdot2^{24}}}$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5\cdot3^{15}}{2^{10}\cdot5^{15}}}$.

19.2. Воспользуйтесь свойствами корней n-й степени и вычислите:

а) $\sqrt[8]{2^5\cdot5^9}\cdot\sqrt[8]{2^3\cdot5^7}$; б) $\dfrac{\sqrt[6]{2^{29}\cdot3^{16}}}{\sqrt[6]{2^5\cdot3^4}}$;

в) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{25}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{486}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[6]{128}}$.

19.3. Вычислите: $8\cdot\sqrt[3]{\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-2}}\cdot\sqrt{324}+\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[5]{-27}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1}{9}}}$.

19.4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{11-2\sqrt{10}}\cdot\sqrt[4]{11+2\sqrt{10}}$; б) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}-9}$.

19.5. Представьте выражение $\sqrt{a-b}$ в виде корня:

а) четвертой степени; б) шестой степени;

в) десятой степени; г) шестнадцатой степени.

19.6. Представьте в виде корней одной и той же степени выражения:

а) $\sqrt[9]{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt[6]{c}$; б) $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{b}$ и $\sqrt[15]{c}$.

19.7. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a}}$; б) $\sqrt[8]{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$;

г) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{a^{12}}}$; д) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}}$; е) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[5]{a}}$.

19.8. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt[9]{-7}\cdot\sqrt[18]{49}$;

в) $\sqrt{10}\cdot\sqrt[6]{10}\cdot\sqrt[12]{10}$; г) $\dfrac{\sqrt[8]{27^3}\cdot\sqrt[20]{\sqrt{27}}}{\sqrt[5]{27^4}}$.

19.9. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{-3^5}-\sqrt[5]{(-3)^5}$; б) $\sqrt[4]{(-7)^4}-\sqrt[3]{(-7)^3}$;

в) $\sqrt[7]{-5^7}-\sqrt[8]{(-5)^8}$; г) $\sqrt[3]{-10^3}+\sqrt[9]{(-10)^9}-\sqrt[4]{(-10)^4}$.

19.10. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения

$$\sqrt[8]{(-11)^8}+\sqrt[7]{5-\sqrt{26}}\cdot\sqrt[7]{5+\sqrt{26}}-\sqrt[4]{16\frac{1}{16}}:\sqrt[8]{257^2}+\sqrt[3]{25\cdot135}.$$

19.11. Верно ли, что значение выражения $\sqrt[4]{\left(\sqrt{\sqrt[5]{90}}-\sqrt[5]{10}\right)^4}-\sqrt{\sqrt[5]{90}}-\sqrt[5]{10}$ является рациональным числом?

19.12. Найдите значение выражения $\sqrt{25a^2}+\sqrt[3]{64a^3}-\sqrt[4]{16a^4}-\sqrt[6]{676}$ при $a=\sqrt[3]{26}-3$.

19.13. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{\left(4\sqrt{5}-9\right)^4}+\sqrt[4]{\left(4\sqrt{5}+9\right)^4}$; б) $\sqrt[6]{\left(3\sqrt{7}+8\right)^6}-\sqrt[6]{\left(3\sqrt{7}-8\right)^6}-16$.

19.14. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}$;

в) $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}$.

19.15. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\sqrt[4]{(2m-5{,}4)^4}$ при $-1 \leqslant m \leqslant 1$;

б) $\sqrt[6]{(3n-12{,}1)^6}-12{,}1$ при $-5 \leqslant n \leqslant 4$;

в) $\sqrt[8]{(2a-1{,}8)^8}-\sqrt[10]{(3{,}2a+1{,}6)^{10}}-2a-1{,}6$ при $-0{,}4 \leqslant a \leqslant 0{,}5$;

г) $\sqrt[4]{(9b-1)^4}+\sqrt[6]{(2b+3{,}4)^6}-b+3{,}5$ при $-2{,}8 \leqslant b \leqslant -1{,}8$.

19.16. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{(x-3)^4}+x$ при $x \geqslant 3$;   б) $y=-x\sqrt[8]{(x+1)^8}$ при $x \leqslant -1$.

19.17. Упростите выражение $\dfrac{\left(\sqrt[8]{a^2+5+2\sqrt{5}a}+\sqrt[4]{a+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[4]{a-\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{16a^2-80}}$.

19.18. Найдите значение выражения

$$\sqrt{12a+2\sqrt{36a^2-b^2}}-\sqrt{12a-2\sqrt{36a^2-b^2}}-2\sqrt{6a-b} \text{ при } a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}.$$

§ 20. Применение свойств корней n-й степени для преобразования выражений

Пример 1. Сократите дробь $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}}$.

Решение. $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}}=\dfrac{b\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{b\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{a\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}=\dfrac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a}}$.

Пример 2. Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt[4]{-a^{11}}$.

Решение. $\sqrt[4]{-a^{11}}=\sqrt[4]{-a^3\cdot a^8}=|a^2|\sqrt[4]{-a^3}=a^2\sqrt[4]{-a^3}$.

Пример 3. Внесите множитель под знак корня в выражении $(4-m)\sqrt[6]{2m-8}$.

Решение. Выражение $(4-m)\sqrt[6]{2m-8}$ имеет смысл при $2m-8 \geqslant 0$; $m \geqslant 4$, т. е. множитель $(4-m) \leqslant 0$. Тогда $(4-m)\sqrt[6]{2m-8}=-(m-4)\sqrt[6]{2m-8}=$ $=-\sqrt[6]{(m-4)^6(2m-8)}=-\sqrt[6]{2(m-4)^6(m-4)}=-\sqrt[6]{2(m-4)^7}$.

Пример 4. Упростите выражение $\sqrt[3]{\sqrt{11-4\sqrt{6}}-\sqrt{8}-\sqrt[6]{27}}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{\sqrt{11-4\sqrt{6}}-\sqrt{8}-\sqrt[6]{27}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{-2\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{\sqrt{12}} = -\sqrt[6]{12}.$$

Пример 5. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[4]{xy}\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}\right)}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[4]{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+1\right) = \left(-\sqrt[4]{xy}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+1\right) =$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \sqrt{xy}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = y+\sqrt{xy}.$$

Ответ: $y+\sqrt{xy}$.

20.1. Выберите неверное равенство:

а) $\sqrt{45a^3}=3a\sqrt{5a}$; б) $\sqrt[5]{-32x^6}=-2x\sqrt[5]{-x}$;

в) $\sqrt[4]{16(m-n)^4}=2|m-n|$; г) $\sqrt[8]{(-5)^8a^{12}}=5|a|\sqrt{|a|}$;

д) $\sqrt[6]{-64y^7}=-2y\sqrt[6]{-y}$.

20.2. Внесите множитель под знак корня в выражении $(7-m)\sqrt[6]{\dfrac{1}{m-7}}$.

20.3. Вычислите: $\dfrac{12\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5\sqrt[3]{5}}}{\left(\sqrt[4]{25}-1\right)\left(\sqrt[4]{25}+1\right)}$.

20.4. Представьте в виде корня выражение:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[4]{a}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[9]{a^4}}$.

20.5. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$ при $a=0{,}0625$.

20.6. Верно ли, что значение выражения является рациональным числом:

а) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}+\sqrt[5]{36\sqrt{6}}+26-4\sqrt{30}}$?

20.7. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$.

20.8. Упростите выражение $7\cdot\left(\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^{-1}\right)^{-2}:\dfrac{a-b}{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$ и найдите его значение при $a=196$, $b=36$.

20.9. Упростите выражение $\dfrac{a\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}:\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}-\left(\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab}\right)a+2$.

20.10. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right):\left(\dfrac{b}{\sqrt[4]{a^3}}+\dfrac{b\sqrt[4]{b}}{a}\right)$ при $a=68$, $b=4$;

б) $\left(\sqrt[8]{a^2+6+2a\sqrt{6}}+\sqrt[4]{a+\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[4]{a-\sqrt{6}}$ при $a=\sqrt{87}$;

в) $\sqrt[8]{\left(3\sqrt{x}-1\right)^8}-\sqrt{9x-12\sqrt{x}+4}$ при $x=1\frac{2}{9}$.

20.11. Найдите значение выражения $x_1^2+x_2^2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)x-1{,}5\sqrt{2}=0$.

20.12. Упростите выражение $\left(\dfrac{\left(x+\sqrt[3]{2ax^2}\right)\cdot\left(2a+\sqrt[3]{4a^2x}\right)^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right)^{-6}$.

§ 21. Свойства и график функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(n > 1,\ n \in N)$

Пример 1. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt[4]{20 - x - x^2} - \frac{3}{\sqrt[8]{14 - 5x - x^2}}.$$

Решение.

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 20 - x - x^2 \geqslant 0, \\ 14 - 5x - x^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x - 20 \leqslant 0, \\ x^2 + 5x - 14 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)(x-4) \leqslant 0, \\ (x+7)(x-2) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-5; 4], \\ x \in (-7; 2); \end{cases}$$

$x \in [-5;\ 2)$.

Ответ: $D(y) = [-5;\ 2)$.

Пример 2. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = \sqrt[4]{(x-2)^2 + 81}$;

б) $g(x) = \sqrt[3]{27 - (x-1)^2}$.

Решение.

а) По свойству квадратичной функции множеством значений подкоренного выражения является промежуток $[81;\ +\infty)$. По свойству монотонности функции $y = \sqrt[2k]{x}$, где $k \in N$, множеством значений данной функции является промежуток $[\sqrt[4]{81};\ +\infty)$, или $E(f) = [3;\ +\infty)$.

б) По свойству квадратичной функции множеством значений подкоренного выражения является промежуток $(-\infty;\ 27]$. По свойству монотонности функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$, где $k \in N$, множеством значений данной функции является промежуток $(-\infty;\ \sqrt[3]{27}]$, т. е. $E(g) = (-\infty;\ 3]$.

Пример 3. Расположите числа $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ в порядке возрастания.

Решение.

Представим числа $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ в виде корней с одинаковым показателем:

$-\sqrt[3]{7} = -\sqrt[6]{7^2} = -\sqrt[6]{49}$;

$-\sqrt{2\sqrt[3]{6}} = -\sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 6}} = -\sqrt{\sqrt[3]{48}} = -\sqrt[6]{48};$

$-\sqrt[3]{5\sqrt{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{5^2 \cdot 2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{50}} = -\sqrt[6]{50}.$

Так как $-\sqrt[6]{50} < -\sqrt[6]{49} < -\sqrt[6]{48}$, то $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}} < -\sqrt[3]{7} < -\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$.

Ответ: $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$; $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$.

21.1. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt[8]{x^2-4}}{\sqrt[4]{x-1}}$;

б) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[7]{x^2-5x}} + \sqrt[6]{x^2-x-20}$;

в) $f(x) = \sqrt[6]{x^3-2x^2} + \sqrt[10]{|x|-2}$.

21.2. Найдите множество значений функции:

а) $g(x) = \sqrt[6]{(x-1)^2+64}$; б) $h(x) = \sqrt[4]{(x+5)^2+81}$;

в) $g(x) = \sqrt[4]{x^2+4x+85}$; г) $h(x) = \sqrt[6]{x^2-2x+65}$;

д) $g(x) = \sqrt[5]{x^2-6x+41}$; е) $g(x) = \sqrt[8]{256-(x+3)^2}$.

21.3. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$; б) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{\sqrt[3]{30}}$ и $\sqrt[4]{10}$.

21.4. Даны функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и $g(x) = x^4$. Найдите значение выражения:

а) $f\left(g\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)\right)$; б) $g(f(0{,}125))$.

21.5. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$; б) $g(x) = \sqrt[4]{|x|}$;

в) $f(x) = -\sqrt[3]{|x|} - 2$; г) $g(x) = \sqrt[4]{|x-2|}$.

21.6. Функция $y = f(x)$ нечетная и для $x \geqslant 0$ задается формулой $f(x) = \sqrt[4]{x-1}$. Найдите значение выражения $f(-2) - f(-8)$.

§ 22. Иррациональные уравнения

Пример 1. Решите уравнение $x^2 + x = \sqrt{18 - x - x^2} - 2.$

Решение.

Пусть $t = \sqrt{18 - x - x^2}$, $t \geqslant 0$, тогда $t^2 = 18 - x - x^2$; $x^2 + x = 18 - t^2$. Исходное уравнение принимает вид $18 - t^2 = t - 2$; $t^2 + t - 20 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -5, \\ t = 4. \end{array}\right.$ Так как $t \geqslant 0$, то $t = 4$, т. е. $\sqrt{18 - x - x^2} = 4$; $18 - x - x^2 = 16$; $x^2 + x - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Ответ: -2; 1.

Пример 2. Решите уравнение:

а) $(x - 2) \cdot \sqrt[6]{x^2 - 9x + 8} = 0$;   б) $\frac{x - 3}{x - 1} \cdot \sqrt{(x - 1)(x - 2)} = 0.$

Решение.

а) Применим свойство о равенстве произведения нулю и получим:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 9x + 8 = 0, \\ \begin{cases} x - 2 = 0, \\ x^2 - 9x + 8 \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = 1, \\ \begin{cases} x = 2, \\ x \in (-\infty; 1] \cup [8; +\infty); \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 8.

б) $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x - 3}{x - 1} = 0, \\ (x - 1)(x - 2) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x - 1)(x - 2) = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: 2; 3.

Пример 3. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $x \cdot \sqrt{3x^2 + 13} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2.$

Решение.

$$x \cdot \sqrt{3x^2 + 13} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2.$$

Пусть $t = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13}$, тогда $t^2 - t - 2 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1. \end{array}\right.$ Так как $t \geqslant 0$, то

$t = 2$, значит, $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2$; $\begin{cases} x^2(3x^2 + 13) = 16, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^4 + 13x^2 - 16 = 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = -\frac{16}{3}, \\ x^2 = 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$.

Решение.

$\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$; $\begin{cases} 1 + \cos x = \sin^2 x, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos x + \cos^2 x = 0, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (1 + \cos x)\cos x = 0, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \cos x = 0, \end{array}\right. \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

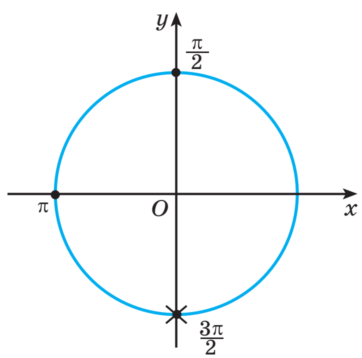


Рис. 64

На единичной окружности отметим точки, соответствующие значениям переменной, при которых $\cos x = -1$ и $\cos x = 0$ (рис. 64). С учетом условия $\sin x \geqslant 0$ получим

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} = 1$.

Решение.

Пусть $a = \sqrt[3]{2 - x}$; $b = \sqrt{x - 1}$, тогда $a^3 = 2 - x$; $b^2 = x - 1$ и $a^3 + b^2 = 1$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 1, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a^3 + b^2 = 1, \\ b = 1 - a; \end{cases} \quad \begin{cases} a^3 + (1 - a)^2 = 1, \\ b = 1 - a. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$a^3 + a^2 - 2a + 1 = 1;\ \ a(a+2)(a-1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0,\\ b = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}a = -2,\\ b = 3,\end{cases}\\ \begin{cases}a = 1,\\ b = 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{2-x} = 0,\\ \sqrt{x-1} = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x} = -2,\\ \sqrt{x-1} = 3,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x} = 1,\\ \sqrt{x-1} = 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 2,\\ x = 10,\\ x = 1.\end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2; 10.

Пример 6. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{1+4\cos 2x}$ и $y = \sqrt{1-4\cos x}$.

Решение.

Решим уравнение $\sqrt{1+4\cos 2x} = \sqrt{1-4\cos x}$;

$\sqrt{1+4(2\cos^2 x - 1)} = \sqrt{1-4\cos x}$. Пусть $\cos x = t$, тогда уравнение принимает вид $\sqrt{1+4(2t^2-1)} = \sqrt{1-4t}$; $\begin{cases}8t^2 - 3 = 1 - 4t,\\ 1 - 4t \geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2t^2 + t - 1 = 0,\\ t \leqslant 0{,}25;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t = -1,\\ t = 0{,}5,\end{array}\right.\\ t \leqslant 0{,}25;\end{cases}$ $t = -1.$

Тогда $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

22.1. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{5 - \sqrt{x + 1 + \sqrt{2x^2 + x + 3}}} = 1$.

22.2. Примените свойство о равенстве произведения нулю и решите уравнение:

а) $(x-4)\sqrt{8+x} = 0$;
б) $(x^2+8x+15)\sqrt{x+4} = 0$;
в) $(8-3x)\sqrt{10+3x-4x^2} = 0$;
г) $(1-2x)\sqrt{x+3} = 1-2x$;
д) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2$;
е) $\sqrt{16-x^2}\sqrt{x^2-3x-10} = 0$.

22.3. Решите уравнение $\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{x-2}}} + \sqrt{1+\sqrt{x-2}} = 6$.

22.4. Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-11}$.

22.5. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения

$$x\sqrt{x^2-15}+5\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2-15}=14.$$

22.6. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-15x+1}+\sqrt{2x^2-15x+8}=7$.

22.7. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{18-3x}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{18-3x}}$.

22.8. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения

$$\frac{x^2-2x-2}{\sqrt{x-2}}-3\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-2x-2}=0.$$

22.9. Найдите среднее арифметическое целых корней уравнения

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$$

22.10. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{x^2-2x-3}+\sqrt{-x^2-x}=\sqrt{x+1}$.

22.11. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3\sin x+1{,}5}=2\sin x$;

б) $\sqrt{1+4\cos x}=1-3\cos x$;

в) $\sqrt{1-4\sin x}=\sqrt{1-4\cos 2x}$.

22.12. Решите уравнение $2x\sqrt{7x+18}=x^2+7x+18$.

22.13. Решите уравнение $3x^2+x+2-4x\sqrt{x+2}=0$.

22.14. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$$

22.15. Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=2x-15+2\sqrt{x^2+5x}$.

22.16. Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $x^2+x+\sqrt{x-2}=13$.

22.17. Решите уравнение $\sqrt{x-2}=\sqrt[3]{5+x}-1$.

22.18. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\sqrt{1-4\sin x}$ и $y=\sqrt{1-4\cos 2x}$.

22.19. Решите уравнение относительно переменной x:

а) $\sqrt{x+4} = a - 2$; б) $\sqrt{8-x} = 2a + 2$;

в) $\sqrt{7+2x} = \sqrt{a-x}$; г) $\sqrt{x-a} = \sqrt{4-x}$.

22.20. Решите уравнение $(x-1)\sqrt{x-a} = 0$.

22.21. Найдите все значения числа a, при которых уравнения $x^2 - a = 0$ и $\sqrt{x} - a = 0$ равносильны.

§ 23. Иррациональные неравенства

Неравенства, содержащие переменную под знаком корня, называются **иррациональными.**

При решении иррациональных неравенств необходимо не только использовать свойства числовых неравенств и свойства корня n-й степени, но и учитывать знаки выражений в левой и правой частях неравенства.

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{x+2} > x$.

Решение.

Первый способ. Возвести обе части неравенства в квадрат можно при условии, что они неотрицательны. Поэтому при $x \geqslant 0$ данное неравенство равносильно неравенству $x + 2 > x^2$. Далее следует рассмотреть решение неравенства при $x < 0$. При этих значениях x левая часть неравенства больше правой при всех значениях переменной, при которых $\sqrt{x+2}$ существует.

Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x+2 > x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x+2 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x \in (-1; 2),\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x \geqslant -2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \in [0; 2),\\ x \in [-2; 0)\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-2; 2).$$

Ответ: $[-2; 2)$.

Второй способ. Неравенства можно решать, используя графики функций. Для решения данного неравенства построим графики функций $f(x) = \sqrt{x+2}$ и $g(x) = x$ (рис. 65).

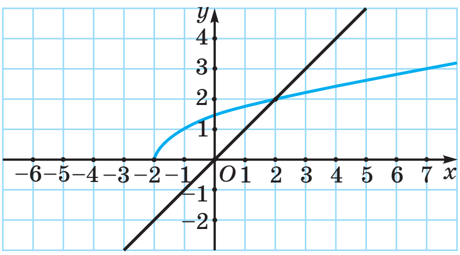
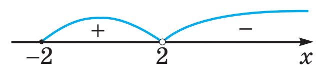


Рис. 65

Заметим, что для $x \in [-2; 2)$ график функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ расположен выше графика функции $g(x) = x$. Следовательно, значения функции $f(x)$ больше соответствующих значений функции $g(x)$ для $x \in [-2; 2)$, т. е. решение данного неравенства есть промежуток $[-2; 2)$.

Третий способ. Решим это неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+2} - x$.



1) $D = [-2; +\infty)$.

2) Нули функции: $x = 2$.

3) Определим знаки функции в каждом из промежутков, на которые точка $x = 2$ разбивает область определения функции $f(x)$. В соответствии со знаком неравенства выбираем ответ: $x \in [-2; 2)$.

Таким образом, решать иррациональные неравенства можно, выбирая различные способы или их комбинации.

Рассмотрим некоторые виды иррациональных неравенств и методы их решения.

1. Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$

Пример 2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{3-2x} > x$; б) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$; в) $\sqrt{x+7} \geqslant x + 1$.

Решение.

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x),\ n \in N \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n} \end{cases} \end{array}\right.$$

а) $\sqrt{3-2x} > x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 3 - 2x > x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [0; 1), \\ x \in (-\infty; 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1).$$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

б) $$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x + 3 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 > (x+3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x < -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -\frac{7}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -3), \\ x \in \left[-3; -\frac{7}{9}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{9}\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$.

в) Решим неравенство графически. Построим графики функций $f(x) = \sqrt{x+7}$ и $g(x) = x + 1$ (рис. 66).

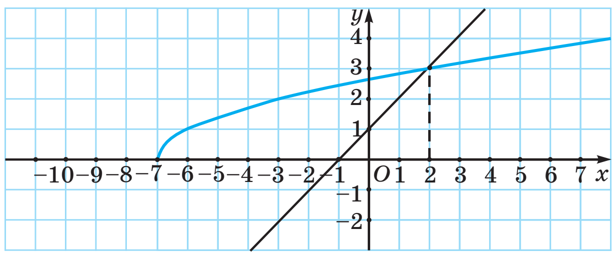


Рис. 66

Решениями неравенства $\sqrt{x+7} \geqslant x + 1$ будут те значения x, для которых график функции $f(x) = \sqrt{x+7}$ расположен не ниже графика функции $g(x) = x + 1$, т. е. $x \in [-7; 2]$.

Ответ: $[-7; 2]$.

2. Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$

Пример 3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{3 - 2x} < x$;

б) $\sqrt{2x - x^2} \leqslant x + 2$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x),\ n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n} \end{cases}$$

Решение.

а) $\sqrt{3 - 2x} < x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0, \\ 3 - 2x < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (1; 1{,}5].$$

Ответ: $x \in (1; 1{,}5]$.

б) $\sqrt{2x-x^2} \leqslant x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2 \geqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0, \\ 2x-x^2 \leqslant (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \leqslant 0, \\ x \geqslant -2, \\ 2x-x^2 \leqslant x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \leqslant 0, \\ x \geqslant -2, \\ x^2+x+2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2], \\ x \geqslant -2, \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 2].$

Ответ: $x \in [0; 2]$.

3. Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}\right)$, $n \in N$

Пример 4. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4}$; б) $\sqrt{2x+1} < \sqrt{3x-4}$;

в) $\sqrt{x^2+5x+6} > \sqrt{4x+6}$; г) $\sqrt{3x-4} \leqslant \sqrt{x^2-3x+1}$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Решение.

а) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 3x-4, \\ 3x-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant 1\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[1\frac{1}{3}; 5\right).$

Ответ: $\left[1\frac{1}{3}; 5\right)$.

б) $\sqrt{2x+1} < \sqrt{3x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 < 3x-4, \\ 2x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (5; +\infty).$

Ответ: $(5; +\infty)$.

в) $\sqrt{x^2+5x+6} > \sqrt{4x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+6 > 4x+6, \\ 4x+6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > 0, \\ x \geqslant -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ x \geqslant -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \\ x \in [-1{,}5; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1{,}5; -1) \cup (0; +\infty).$

Ответ: $[-1{,}5; -1) \cup (0; +\infty)$.

г) $\sqrt{3x-4} \leqslant \sqrt{x^2-3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \leqslant x^2-3x+1, \\ 3x-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5 \geqslant 0, \\ x \geqslant 1\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty), \\ x \in \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [5; +\infty).$

Ответ: $[5; +\infty)$.

4. Неравенство вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)}$ $\left(\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}\right)$, $n \in N$

Пример 5. Решите неравенство:

а) $\sqrt[5]{x^2-2} > \sqrt[5]{x}$; б) $\sqrt[5]{x^2-2} < \sqrt[5]{x}$; в) $\sqrt[5]{x^2+x-1} \leqslant \sqrt[5]{x+15}$.

Решение.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$
$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

а) $\sqrt[5]{x^2-2} > \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow x^2-2 > x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

б) $\sqrt[5]{x^2-2} < \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow x^2-2 < x \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$.

Ответ: $(-1; 2)$.

в) $\sqrt[5]{x^2+x-1} \leqslant \sqrt[5]{x+15} \Leftrightarrow x^2+x-1 \leqslant x+15 \Leftrightarrow x^2-16 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-4; 4]$.

Ответ: $[-4; 4]$.

5. Неравенство вида $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} > a$ $\left(\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} < a\right)$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$

Неравенство вида $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} > a$ $\left(\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} < a\right)$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$, можно решить методом интервалов.

Пример 6. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} > 5$;

б) $\sqrt{x-11} + \sqrt{x-3} < 4$;

в) $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} > 1$.

Решение.

а) *Первый способ*. Найдем нули функции $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}-5$, т. е. решим уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}=5$. Получим $x=3$. Эта точка разбивает область определения $D=\left[\frac{3}{4};\ +\infty\right)$ функции $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}$ на два промежутка. Определим знак функции в каждом из них, получим ответ $x\in(3;\ +\infty)$.

Ответ: $(3;\ +\infty)$.

Второй способ. Если $f(x)$ и $g(x)$ одномонотонные (обе убывающие или обе возрастающие), то их сумма также монотонна (убывающая или возрастающая соответственно). Функция $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}$ возрастает на всей области определения, а при $x=3$ принимает значение, равное 5, следовательно, для $x>3$ значения функции будут больше пяти, значит, неравенство будет верным при $x>3$.

б) Найдем нули функции $y=\sqrt{x-11}+\sqrt{x-3}$, т. е. решим уравнение $\sqrt{x-11}+\sqrt{x-3}=4$.

Получим $x=12$. Эта точка разбивает область определения $D=[11;\ +\infty)$ функции $y=\sqrt{x-11}+\sqrt{x-3}$ на два промежутка. Определим знак функции в каждом из них и получим $x\in[11;\ 12)$.

Ответ: $[11;\ 12)$.

в) Найдем нули функции $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}-1$, т. е. решим уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=1$. Нулем данной функции является $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Эта точка разбивает область определения функции $D=[-1;\ 1]$ на два промежутка. Определим знак функции в каждом из них и получим ответ $x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right]$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right]$.

23.1. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x+3}>4$; б) $\sqrt[4]{x-1}\geqslant 2$;

в) $\sqrt{x^2-6x+4}>4$; г) $\sqrt[6]{x-x^2+1}\geqslant 1$.

23.2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x-5}>-2$; б) $\sqrt[8]{x+2}\geqslant -1$;

в) $\sqrt{6-x}>0$; г) $\sqrt[4]{5x+1}\geqslant 0$.

23.3. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = \sqrt{x-2}$ расположен:

а) выше прямой $y = -1$;

б) не ниже прямой $y = -3$;

в) выше оси абсцисс;

г) не ниже оси абсцисс.

23.4. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2-x} > x$;
б) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$;

в) $\sqrt{x^2-4x} > x-3$;
г) $\sqrt{x^2-3x+2} \geqslant 2x-5$;

д) $\sqrt{6x-x^2-5} > 8-2x$;
е) $\sqrt{x^4-2x^2+1} \geqslant 1-x$.

23.5. Найдите, при каких значениях переменной значения выражения:

а) $\sqrt{x^2+7x+12}$ больше соответствующих значений выражения $6-x$;

б) $\sqrt{-x^2-8x-12}$ не меньше соответствующих значений выражения $x+4$.

23.6. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $\sqrt{x-8} < 7$;
б) $\sqrt{2x+3} \leqslant 5$;

в) $\sqrt[6]{x+3} < 2$;
г) $\sqrt[4]{x-1} \leqslant 3$.

23.7. Выберите неравенства, не имеющие решений:

а) $\sqrt{x+5} < -2$;
б) $\sqrt[4]{7-x} \leqslant -1$;

в) $\sqrt[6]{3-x} < 0$;
г) $\sqrt[8]{x+8} \leqslant 0$.

23.8. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x-1} < x-2$;
б) $\sqrt{7+3x} \leqslant 1-x$;

в) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
г) $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x-1$;

д) $\sqrt{144-x^2} \leqslant x+21$;
е) $x-1 > \sqrt{2x^2-3x-5}$.

23.9. Найдите все значения аргумента, при которых:

а) график функции $y = \sqrt{x^2-3x}$ расположен ниже прямой $y = 5-x$;

б) график функции $y = 4-x$ расположен не ниже графика функции $y = \sqrt{4x-x^2}$.

23.10. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x-1}$; б) $\sqrt{4-x} \leqslant \sqrt{3x-2}$;

в) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$; г) $\sqrt{x+2} < \sqrt{6-x}$;

д) $\sqrt{5x+7} < \sqrt{2-3x}$; е) $\sqrt{3+7x} < \sqrt{1-4x}$.

23.11. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{2x+7}$; б) $\sqrt{8x+44} \geqslant \sqrt{x^2-4}$;

в) $\sqrt{x+4} \leqslant \sqrt{x^2-2x+4}$; г) $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$;

д) $\sqrt{x^2+5x} < \sqrt{1-x^2+4x}$; е) $\sqrt{2x^2-x-6} \geqslant \sqrt{x^2-4}$.

23.12. Найдите все значения переменной, при которых значения выражения:

а) $\sqrt{\frac{1}{2-x}}$ меньше соответствующих значений выражения $\sqrt{3-x}$;

б) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ не больше соответствующих значений выражения $\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}}$.

23.13. Решите неравенство:

а) $\sqrt[3]{x+5} < \sqrt[3]{6}$; б) $\sqrt[5]{7-x} \geqslant -1$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x-10} \leqslant -2$; г) $\sqrt[3]{5x^2-13x-33} > -3$;

д) $\sqrt[3]{2x-1} < \sqrt[3]{4x+5}$; е) $\sqrt[5]{6-x} \geqslant \sqrt[5]{1+3x}$;

ж) $\sqrt[7]{x^2-3x-13} \leqslant \sqrt[7]{x^2-4x-1}$; з) $\sqrt[3]{2x^2-6x+1} > \sqrt[3]{x^2-4}$.

23.14. Решите неравенство $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+5} > 3$ двумя способами.

23.15. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leqslant 1$; б) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} < 3$;

в) $\sqrt{x+7} - 1 \geqslant \sqrt{x}$; г) $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} > 7$.

23.16. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15}$ расположен ниже прямой $y = 5$.

23.17. Воспользуйтесь методом замены переменной и решите неравенство:

а) $4\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} \geqslant 10$;

б) $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x} < 3$;

в) $\frac{2x+1}{x} - 2\sqrt{\frac{2x+1}{x}} \geqslant 3$.

23.18. Решите неравенство:

а) $(x+3)\sqrt{5-x} > 0$;

б) $(4 - x^2)\sqrt{x^2 - 1} \leqslant 0$;

в) $\sqrt{x^2 - 25} \cdot (x+3) < 0$;

г) $(3x^2 - 16x + 21)\sqrt{2x+5} \leqslant 0$;

д) $\sqrt{81 - x^4} \cdot (x+2) \leqslant 0$;

е) $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{16 - x^2} \geqslant 0$.

23.19. Решите неравенство:

а) $\frac{\sqrt{9-x}(x-15)}{x+19} \leqslant 0$;

б) $\frac{\sqrt{2x^2 + 15x - 17}}{10 - x} \geqslant 0$;

в) $\frac{6-2x}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}} \geqslant 0$;

г) $\frac{\sqrt{64 - x^6}}{x-1} \geqslant 0$;

д) $\frac{(x+2) \cdot \sqrt{6-x}}{x^2 + 8x + 16} \leqslant 0$;

е) $\frac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{x+10} \leqslant \frac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{2x+9}$.

23.20. Решите неравенство $\sqrt{x-1} < a$ относительно переменной x.

23.21. Решите неравенство $\sqrt{x+2} \geqslant a$ относительно переменной x.

23.22. Найдите все значения числа a, при которых равносильны неравенства:

а) $(x-a)\sqrt{x-2} > 0$ и $x > a$;

б) $(x-2)\sqrt{x-a} > 0$ и $x > a$.

§ 24. Определение производной функции

Пример 1. Найдите производную функции $y = C$.

Решение.

Так как $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$ то, $C' = 0$.

Пример 2. Найдите производную функции $f(x) = x^3$.

Решение.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной функции.

① $f(x_0) = x_0^3$; $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3$, тогда

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3;$$

$$\Delta f = (x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3) - x_0^3;$$

$$\Delta f = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

② $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2.$

③ $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2$ при $\Delta x \to 0$, значит, $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

24.1. Для функции $f(x) = -\dfrac{4}{x}$ найдите:

а) приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$;

б) приращение функции, если $x_0 = -2$; $\Delta x = 0{,}5$;

в) отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

г) к чему стремится отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю;

д) производную функции;

е) производную функции в точке $x = 3$.

24.2. Для функции $f(x) = x^3 - x^2$ найдите:

а) приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$;

б) приращение функции, если $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}1$;

в) отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

г) к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю;

д) производную функции;

е) производную функции в точке $x = 2$.

24.3. Найдите производную функции:

а) $f(x) = ax^2 + c$; б) $f(x) = \frac{k}{x}$.

§ 25. Правила вычисления производных

Таблица производных

$f(x)$	x^2	$kx + b$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	0

Правила вычисления производных

Производная суммы	$(U + V)' = U' + V'$
Производная произведения	$(UV)' = U'V + V'U$
Производная частного	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
Производная степени	$(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$

Пример 1. Найдите $f'(1)$, если $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)' \cdot 2\sqrt{x} - (2\sqrt{x})' \cdot (\sqrt{x} - 1)}{(2\sqrt{x})^2}; \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 1)}{4x};$$

$$f'(x) = \frac{1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}; \quad f'(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}; \quad f'(1) = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 2. Решите неравенство $g'(x) < 2f'(x)$, если $g(x) = 3x^2 + 2x$, $f(x) = x(3 - x^2)$.

Решение.

$g(x) = 3x^2 + 2x$, $g'(x) = 6x + 2$.

$f(x) = x(3 - x^2)$, $f'(x) = x'(3 - x^2) + x(3 - x^2)' = 3 - x^2 - 2x^2 = 3 - 3x^2$.

Решим неравенство

$$6x + 2 < 2(3 - 3x^2);\ 6x^2 + 6x - 4 < 0;\ x \in \left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{6}; \frac{-3 + \sqrt{33}}{6}\right).$$

Ответ: $\left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{6}; \frac{-3 + \sqrt{33}}{6}\right)$.

Пример 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 21t - 6$ (время измеряется в секундах, расстояние — в метрах). Найдите, в какой момент времени эта точка имеет наименьшую скорость и определите ее.

Решение. Так как $v(t) = s'(t)$, то $v(t) = t^2 - 8t + 21$. Выделив полный квадрат в правой части равенства, получим $v(t) = (t - 4)^2 + 5$, тогда наименьшее значение скорости равно $5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ при $t = 4$ с.

Ответ: 4 с, $5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

25.1. Вычислите $f'(1)$, если $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \sqrt{x}$.

25.2. Известно, что $f(x) = (2x - 3)\sqrt{x}$. Найдите $f'(1) + f(1)$.

25.3. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$.

25.4. Решите неравенство $2g'(x) \geqslant f'(x)$, если $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $f(x) = x(1 - x^2)$.

25.5. Найдите сумму целых решений неравенства $f'(x) + g'(x) \leqslant 0$, если $f(x) = 2x^3 + 12x^2$ и $g(x) = 9x^2 + 72x$.

25.6. Найдите сумму корней уравнения $f'(x) = f(x)$, если

$$f(x) = \frac{x}{2 - x} + 2.$$

25.7. Найдите сумму квадратов корней уравнения $f'(x) = 0$, если $f(x) = 4x + \frac{3}{x}$.

25.8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 15t - 7$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите, в какой момент времени точка имеет наименьшую скорость, и определите ее.

25.9. Найдите все значения a, при которых $f'(x) > 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$.

§ 26. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные тригонометрических функций

Производная сложной функции

Теорема

Пусть задана сложная функция $h(x) = f(g(x))$.

Если функция f имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, а функция g — в точке x_0, то сложная функция $h(x) = f(g(x))$ также имеет производную в точке x_0: $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Пример 1. Найдите производную сложной функции

$$y = f(g(x)) = (2x^2 - 1)^5.$$

Решение.

Представим данную функцию как композицию функций g и f:

$$x \xrightarrow{t = g(x)} 2x^2 - 1 \xrightarrow{y = f(t)} t^5.$$

Найдем произведение производной последней функции f и производной промежуточной функции g:

$$h'(x) = (t^5)' \cdot (t)' = 5t^4 \cdot (2x^2 - 1)'.$$

Выполним замену и также найдем производную промежуточной функции $h'(x) = 5(2x^2 - 1)^4 \cdot 4x = 20x(2x^2 - 1)^4$.

Пример 2. Найдите производную сложной функции

$$y = f(g(x)) = \sqrt{2x+7}.$$

Решение.

Представим данную функцию как композицию функций g и f:

$x \xrightarrow{t=g(x)} 2x+7 \xrightarrow{y=f(t)} \sqrt{t}$. Найдем производную последней функции f, а затем производную промежуточной функции g:

$$h'(x) = \left(\sqrt{t}\right)' \cdot (t)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (2x+7)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+7}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}.$$

Производная обратной функции

Пусть даны взаимно обратные функции f и g и производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует и отлична от нуля. Тогда производная функции g в точке $y_0 = f(x_0)$ равна $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Пример 3. Найдите производную функции $y = \sqrt{x}$.

Решение.

Функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$ взаимно обратны на множестве неотрицательных действительных чисел. Поскольку $f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$, то производная функции g в точке $y_0 = f(x_0)$ равна $(g)' = \frac{1}{(f)'} = \frac{1}{2y_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Следовательно, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Производные тригонометрических функций

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Производная функции $y = \sin x$

Вывод формулы производной функции $y = \sin x$ основан на двух утверждениях:

1) $\cos(x + \Delta x) \to \cos x$, если $\Delta x \to 0$;

2) $\frac{\sin x}{x} \to 1$, если $x \to 0$.

Для получения формулы производной найдем приращение функции $y = \sin x$:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

затем найдем отношение $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}$.

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

По допущению 1) $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$, если $\Delta x \to 0$,

по допущению 2) $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$, если $\Delta x \to 0$.

Тогда $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} \to \cos x$, если $\Delta x \to 0$. Таким образом, $\sin' x = \cos x$.

Пример 4. Найдите производную функции $h(x) = \sin(3x - 2)$.

Решение.

Представим данную функцию как композицию функций g и f:

$$x \xrightarrow{t = g(x)} 3x - 2 \xrightarrow{y = f(t)} \sin t.$$

Найдем производную последней функции f, а затем — производную промежуточной функции g:

$$h'(x) = \sin' t \cdot (3x - 2)' = \cos(3x - 2) \cdot 3 = 3 \cdot \cos(3x - 2).$$

Ответ: $3 \cdot \cos(3x - 2)$.

Производная функции $y = \cos x$

Представим функцию $y = \cos x$ в виде сложной функции

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

По правилу дифференцирования сложной функции представим функцию $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ в виде композиции функций g и f: $x \xrightarrow{t = g(x)} \frac{\pi}{2} - x \xrightarrow{y = f(t)} \sin t$.

Производная последней функции $\sin t$ равна $\cos t$; производная промежуточной функции $\frac{\pi}{2} - x$ равна -1. Поэтому

$$h'(x) = (\cos t)' \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

Производная функции $y = \operatorname{tg} x$

Представим функцию $y = \operatorname{tg} x$ в виде $y = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Применим правило производной частного функций:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производная функции $y = \operatorname{ctg} x$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 5. Найдите производную функции $h(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

Решение.

Представим данную функцию как композицию функций g и f: $x \xrightarrow{t = g(x)} \operatorname{tg} x \xrightarrow{y = f(t)} t^2$. Найдем производную последней функции f, а затем производную промежуточной функции g:

$$h'(x) = \left(t^2\right)' \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2t\frac{1}{\cos^2 x} = 2\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Ответ: $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

26.1. Используя таблицу производных и правила дифференцирования, найдите производную функции:

а) $f(x) = x\sin x$; б) $f(x) = \frac{\cos x}{2x}$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x$.

26.2. Найдите производную сложной функции:

а) $f(x) = (3x - 1)^4$; б) $f(x) = \sqrt{5x - 2}$;

в) $f(x) = \left(6x - 7x^3\right)^5$; г) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$;

д) $f(x) = \sin\frac{x}{9}$; е) $f(x) = \cos^2 x$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x^2 - 1\right)$; з) $f(x) = \operatorname{ctg}(2x - 5)$.

26.3. Сравните значения выражений $f'(-4)$ и $f'\left(-\sqrt{15}\right)$, если

$$f(x) = (4x + 15)^3.$$

26.4. Найдите $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = (8x^2 - 5)^4$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = \cos 2x - \frac{2}{\pi}x^2 - 6$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = \sqrt{19 - 2x}$, $x_0 = 2$; г) $f(x) = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

26.5. Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{5x^2 - 8x}$ в точке $x = -1$.

26.6. Вычислите $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x+1}$.

26.7. Вычислите:

а) $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$;

б) $f'(0{,}5\pi)$, если $f(x) = \frac{3}{\pi}x^2 \sin x$;

в) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, если $f(x) = \sin 3x \cos 3x$;

г) $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, если $f(x) = 7\cos^2 x$;

д) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = (x-2)^2 \cdot \cos x$;

е) $f'(\pi)$, если $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

26.8. Найдите (в градусах) решение уравнения
$\cos^2 x - 2f'(x) = \sin x \cdot f'(x)$, если $f(x) = \cos x$ и $180^\circ < x < 270^\circ$.

26.9. Найдите наименьший положительный корень уравнения $f'(x) = 0$, если $f(x) = 3 + \sin(\pi + x) - 2\cos\frac{5\pi + x}{2}$.

26.10. Решите уравнение $f'(x) = 1$, если $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3}$.

26.11. Дана функция $f(x) = a\sin 4x + b\cos 2x$. Найдите a и b, если известно, что $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 4$ и $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$.

26.12. Найдите число корней уравнения $f(x) = 0$, принадлежащих промежутку $\left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$, если $f(x) = \sqrt{3}x + \cos 2x + \sqrt{\pi}$.

26.13. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (время измеряется в секундах, расстояние — в метрах). Найдите скорость движения точки в момент времени $t_0 = 5$ с.

26.14. Решите неравенство:

а) $f'(x) > 0$, если $f(x) = \frac{x}{2} - \cos x$;

б) $f'(x) \leqslant 0$, если $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$;

в) $f'(x) < 0$, если $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;

г) $f'(x) \geqslant 0$, если $f(x) = \sin 5x \cos 5x$.

26.15. Решите уравнение $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} 3x$, $g(x) = 5 - 3x$.

26.16. Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x) = 3x - 12$;

б) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$, $g(x) = 3 - \sqrt{2}x$.

§ 27. Геометрический смысл производной. Связь между знаком производной функции и ее возрастанием или убыванием

Пример 1. Найдите, под каким углом к оси абсцисс наклонена касательная, проведенная к графику функции $f(x) = 2x^3 - x + 1$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение.

1) Найдем производную функции $f(x) = 2x^3 - x + 1$:

$$f'(x) = 6x^2 - 1.$$

2) График функции пересекает ось ординат в точке с абсциссой, равной нулю, т. е. $x_0 = 0$.

3) Найдем значение производной данной функции при $x_0 = 0$: $f'(0) = -1$.

4) $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$; $\operatorname{tg}\alpha = -1$; $\alpha = 135^\circ$.

Ответ: 135°.

Пример 2. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2}{x-1}$ в точке $x_0 = -1$.

Решение.

Уравнение касательной $f(x)$ функции в точке x_0 имеет вид

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$y(-1) = \frac{2}{-1-1} = -1;$

$y' = -\frac{2}{(x-1)^2};\ y'(-1) = \frac{2}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{2}.$

$y_{\text{кас}} = -1 - \frac{1}{2}\cdot(x+1);\ y_{\text{кас}} = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}.$

Ответ: $y_{\text{кас}} = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}.$

Пример 3. В какой точке кривой $y = x^3 - 9x + 2$ касательная параллельна прямой $y = 3x - 4$?

Решение.

Найдем производную функции $y = x^3 - 9x + 2$:

$$y' = \left(x^3 - 9x + 2\right)' = 3x^2 - 9.$$

Так как касательная параллельна прямой $y = 3x - 4$, то угловой коэффициент касательной равен 3, т. е. $y'(x_0) = 3;\ 3x_0^2 - 9 = 3;\ x_0 = \pm 2.$

Если $x_0 = 2$, то $y_0 = 2^3 - 9\cdot 2 + 2 = -8.$

Если $x_0 = -2$, то $y_0 = -2^3 - 9\cdot(-2) + 2 = 12.$

Ответ: (2; −8); (−2; 12).

Пример 4. Через точку (−2; −5) проходят две касательные к графику функции $y = 2{,}5 - \frac{5}{x}$. Чему равна сумма абсцисс точек касания?

Решение.

Точка (−2; −5) не принадлежит графику функции $y = 2{,}5 - \frac{5}{x}$.

$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

$y(x_0) = 2{,}5 - \frac{5}{x_0};$

$y' = \frac{5}{x^2};\ y'(x_0) = \frac{5}{x_0^2}.$

$y_{\text{кас}} = 2{,}5 - \frac{5}{x_0} + \frac{5}{x_0^2}(x - x_0);\ y_{\text{кас}} = 2{,}5 - \frac{5}{x_0} + \frac{5}{x_0^2}x - \frac{5}{x_0};$

$y_{\text{кас}} = \frac{5}{x_0^2}x + 2{,}5 - \frac{10}{x_0}.$

Так как касательные проходят через точку $(-2; -5)$, то

$$-5 = \frac{5}{x_0^2} \cdot (-2) + 2{,}5 - \frac{10}{x_0}; \;\; 3x_0^2 - 4x_0 - 4 = 0; \;\; \left[\begin{array}{l} x_0 = 2, \\ x_0 = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Сумма абсцисс точек касания равна $2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$.

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Пример 5. Докажите, что на графике функции $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ нет точек, в которых касательные параллельны осям координат.

Решение. Для данной функции производная существует для всех действительных значений аргумента, значит, не существует касательных к графику функции, параллельных оси ординат, поскольку $\operatorname{tg} 90°$ не существует.

Докажем, что на графике функции $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

Касательная к графику функции в точке x_0 параллельна оси абсцисс, если $y'(x_0) = 0$.

Найдем производную данной функции $y' = 3x^2 - 6x + 9$ и выясним, существуют ли значения аргумента, при которых значения производной равны нулю: $3x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = -72 < 0$, т. е. на графике функции $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

Пример 6. Выясните, является ли прямая $y = 12x - 16$ касательной к графику функции $y = x^3$.

Решение. Найдем абсциссы общих точек графиков функций $y = 12x - 16$ и $y = x^3$:

$$x^3 = 12x - 16; \;\; x^3 - 12x + 16 = 0; \;\; x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 12x + 16 = 0;$$

$$x^2(x-2) + 2\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0; \;\; x^2(x-2) + 2(x-2)(x-4) = 0;$$

$$(x-2)\left(x^2 + 2x - 8\right) = 0; \;\; (x-2)^2(x+4) = 0; \;\; \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -4. \end{array}\right.$$

Запишем уравнения касательных, проведенных к графику функции $y = x^3$, в точках с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = -4$.

$y' = 3x^2$.

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Если $x_1 = 2$, то $y_{кас} = 8 + 12(x - 2)$; $y_{кас} = 12x - 16$. Таким образом, прямая $y = 12x - 16$ является касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой 2.

Ответ: является.

Пример 7. Найдите критические точки функции
$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 7.$$

Решение.

1. Найдем производную данной функции:
$$f'(x) = \left(2x^3 + 6x^2 - 18x + 7\right)' = 6x^2 + 12x - 18.$$

2. Производная существует для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Поэтому критическими точками будут только те точки, в которых производная равна нулю.

3. Решим уравнение $6x^2 + 12x - 18 = 0$:

$6x^2 + 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$. Корни этого уравнения $x = -3$ и $x = 1$. Эти точки — критические точки функции
$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 7.$$

Пример 8. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - x^2$; б) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$.

Решение.

а) $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $f'(x) = \left(\dfrac{4}{x^2} - x^2\right)' = -\dfrac{8}{x^3} - 2x = -\dfrac{8 + 2x^4}{x^3}$.

При $x > 0$ $f'(x) < 0$, т. е. функция убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$.

При $x < 0$ $f'(x) > 0$, т. е. функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$.

б) $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

$$f'(x) = \left(\frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}\right)' = \frac{-10x + 32}{x^3}.$$

$f'(x) > 0$; $\dfrac{-10x + 32}{x^3} > 0$; $x \in (0;\ 3{,}2)$.

$f'(x) < 0$; $\dfrac{-10x + 32}{x^3} < 0$; $x \in (-\infty;\ 0)$ и $x \in (3{,}2;\ +\infty)$.

На промежутке (0; 3,2) функция $f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$ возрастает; на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и промежутке $(3,2;\ +\infty)$ функция $f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$ убывает. Так как в точке 3,2 функция непрерывна, то $(0;\ 3,2]$ — промежуток возрастания данной функции, $(-\infty;\ 0)$ и $[3,2;\ +\infty)$ — промежутки убывания данной функции.

Пример 9. Найдите все значения числа a, при которых функция $f(x)=\left(a^4-3a^2-4\right)x-2x^3$ убывает на всей числовой прямой.

Решение.

Функция $f(x)=\left(a^4-3a^2-4\right)x-2x^3$ убывает на всей числовой прямой, если $f'(x)<0$ при $x\in \boldsymbol{R}$.

$f'(x)=\left(a^4-3a^2-4\right)-6x^2.$

Так как $-6x^2\leqslant 0$ при $x\in \boldsymbol{R}$, то $f'(x)<0$ на всей числовой прямой, если $a^4-3a^2-4<0;$ $\left(a^2-4\right)\left(a^2+1\right)<0;$ $a^2-4<0;$ $(a-2)(a+2)<0;$ $a\in(-2;\ 2).$

Ответ: $a\in(-2;\ 2)$.

Пример 10. Найдите точки экстремума функции $f(x)=\frac{3+2x^2}{1-x}$.

Решение.

① $D(f)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty).$

② $f'(x)=\frac{\left(3+2x^2\right)'(1-x)-(1-x)'\left(3+2x^2\right)}{(1-x)^2}=\frac{4x(1-x)-(-1)\left(3+2x^2\right)}{(1-x)^2}=$

$=\frac{4x-4x^2+3+2x^2}{(1-x)^2}=\frac{-2x^2+4x+3}{(1-x)^2}.$

③ $f'(x)=0;$ $-2x^2+4x+3=0;$ $2x^2-4x-3=0;$

$D=4^2-4\cdot 2\cdot(-3)=40>0;$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{2\cdot 2}=\frac{2\left(2\pm\sqrt{10}\right)}{2\cdot 2}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}.$

④ При переходе через точку $x=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ производная меняет знак с «+» на «−», а при переходе через точку $x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$ производная меняет знак с «−» на «+», следовательно, $x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$ — точка минимума данной функции, а $x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ — точка максимума данной функции.

Ответ: $x_{\min} = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$; $x_{\max} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$.

27.1. Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точках пересечения графика с осью абсцисс:

а) $f(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2$; б) $f(x) = x^2 - x$.

27.2. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = \cos x$ в точке $A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

27.3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$ в точке $A\left(-2; \frac{1}{3}\right)$.

27.4. Под каким углом наклонена касательная, проведенная к графику функции $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ в точке ее пересечения с осью ординат?

27.5. Найдите угол, который образует кривая $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ с осью абсцисс в точке их пересечения.

27.6. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = \sqrt{7-x}$, в которой касательная к этому графику наклонена к оси Ox под углом $135°$.

27.7. Найдите сумму абсцисс (из промежутка $[0; 0{,}6\pi]$) точек касания, в которых касательная к графику функции $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ составляет с положительным направлением оси абсцисс угол $60°$.

27.8. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 5$ в точке пересечения этого графика с осью ординат.

27.9. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{x^3} + 2x$ в точке с координатами $(-1; -3)$.

27.10. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$ в точке с координатами $(-1; 1)$.

27.11. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \cos^2 x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

27.12. В какой точке кривой $y = x^4 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4 - 3x$?

27.13. Через точку $(2; -10)$ проходят две касательные к графику функции $y = 2x^2 - 8x$. Чему равно произведение абсцисс точек касания?

27.14. Найдите точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.

а) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

27.15. Найдите координаты точек, в которых касательные к графику функции:

а) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$;

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x$ параллельны прямой $y = -x + 5$.

27.16. Выясните, является ли прямая $y = 3x - 1$ касательной к графику функции $y = x^3$.

27.17. Найдите сумму абсцисс точек (из промежутка $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$), в которых касательная к графику функции $f(x) = \sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{2}\cos 2x$ параллельна оси абсцисс.

27.18. Докажите, что на графике функции $y = 2x^3 + x - 1$ нет точек, в которых касательные параллельны осям координат.

27.19. Найдите сумму критических точек функции

$f(x) = \sin 2x + 6\sin x + 2x$ на промежутке $\left(-100°; 300°\right]$.

27.20. Изобразите график какой-нибудь функции $y = f(x)$, для которой:

а) область определения функции — промежуток $[-5; 4]$;

б) множество значений функции — промежуток $[-2; 5]$;

в) $f'(x) < 0$ при $x \in (-5; -1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-1; 4)$; $f'(-1) = 0$;

г) $f(x) < 0$ только при $x \in (-4; 2)$; $f(-5) = 2$.

27.21. Изобразите график какой-нибудь функции $y = f(x)$, для которой:

а) область определения функции — промежуток $[-4; 5]$;

б) множество значений функции — промежуток $[-3; 4]$;

в) $f'(x) > 0$ при $x \in (-4; 1)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (1; 5)$; $f'(1) = 0$;

г) $f(x) > 0$ только при $x \in (-3; 4)$; $f(5) = -1$.

27.22. Найдите промежутки возрастания функции:

а) $f(x) = -x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 1$; б) $f(x) = 5x - \frac{4}{x}$.

27.23. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

27.24. Найдите наименьшее целое число из промежутка убывания функции $f(x) = x^3 + 10x^2 - 4$.

27.25 Найдите наибольшее целое отрицательное число из промежутка возрастания функции $f(x) = -\frac{(x-2)^2}{x+1}$.

27.26. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$; б) $f(x) = \cos x + x$.

27.27. Найдите точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.

27.28. На рисунке 67 изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите количество точек максимума функции.

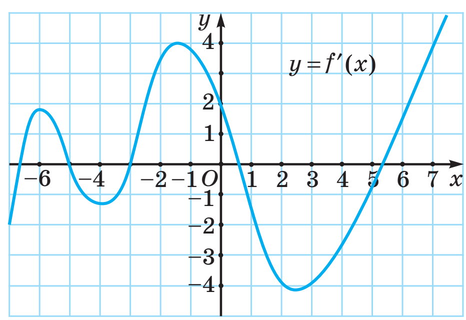


Рис. 67

27.29. Найдите максимум функции

$$f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 1.$$

27.30. Найдите минимум функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}.$$

27.31. Докажите, что функция $y = f(x)$ является возрастающей:

а) $f(x) = \cos 2x + 3x$; б) $f(x) = \sin x + x^3 + x$.

27.32. Докажите, что функция $y = f(x)$ является убывающей:

а) $f(x) = \sin 3x - 4x$; б) $f(x) = \cos 5x - 6x$.

27.33. Найдите все значения m, при которых функция $f(x) = \left(9 - 8m^2 - m^4\right)x^3 + 5x$ возрастает на всей числовой прямой.

27.34. Функция $y = f(x)$ четная. Известно, что $x = 5$ является точкой максимума данной функции, а $x = -3$ — точкой минимума. Имеет ли эта функция другие точки экстремума? Если да, то какие? Можно ли ответить на этот вопрос, если функция $y = f(x)$ является нечетной?

§ 28. Применение производной к исследованию функций

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ и постройте ее график.

Решение. Используем алгоритм исследования графика функции с помощью производной.

① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 - 9 = x^4 - 8x^2 - 9 = f(x)$, значит, функция $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ четная, т. е. ее график симметричен относительно оси ординат.

③ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Пусть $t = x^2$, тогда уравнение принимает вид

$$t^2 - 8t - 9 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t = 9, \\ t = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ x^2 = -1; \end{array}\right. \quad x^2 = 9; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

График функции пересекает ось абсцисс в точках (0; 3) и (0; −3).

④ $f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9$. График функции пересекает ось ординат в точке (0; −9).

⑤ $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f'(x) = 4x(x^2 - 4)$;

$f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$.

$x_{\min} = -2$, $f_{\min} = f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 - 9 = -25$;

$x_{\max} = 0$, $f_{\max} = f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9$;

$x_{\max} = 2$, $f_{\max} = f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 - 9 = -25$.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-25 min	↗	-9 max	↘	-25 min	↗

⑥ Построим график функции (рис. 68).

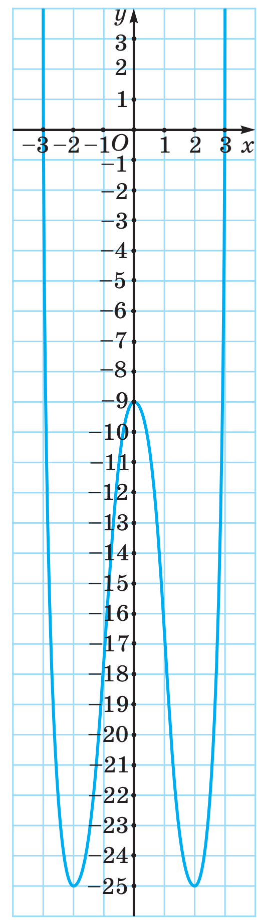


Рис. 68

Пример 2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ и постройте ее график.

Решение. Используем алгоритм исследования графика функции с помощью производной:

① $D(f) = \boldsymbol{R}$, так как $1 + x^2 \neq 0$.

② $f(-x) = \frac{3 \cdot (-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{3x}{1+x^2} = -f(x)$, значит, функция $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ нечетная, т. е. ее график симметричен относительно начала координат.

③ $\frac{3x}{1+x^2} = 0$; $x = 0$, график проходит через начало координат.

④ $f(0) = \frac{3 \cdot 0}{1+0^2} = 0$. Точка (0; 0) — единственная точка пересечения графика с осями координат.

⑤ $f'(x) = \frac{(3x)'(1+x^2) - (1+x^2)' 3x}{(1+x^2)^2}$; $f'(x) = \frac{3(1+x^2) - 2x \cdot 3x}{(1+x^2)^2}$;

$f'(x) = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$; $f'(x) = \frac{3(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

$x_{\min} = -1$, $f_{\min} = f(-1) = \frac{3 \cdot (-1)}{1+(-1)^2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$;

$x_{\max} = 1$, $f_{\max} = f(1) = \frac{3 \cdot 1}{1+1^2} = 1{,}5$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1{,}5; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-1{,}5$ min	↗	$1{,}5$ max	↘

⑥ Построим график функции (рис. 69).

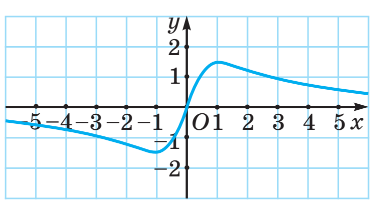


Рис. 69

28.1. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке 70:

а) $f(x) = -x^3 - x^2 - x$;

б) $f(x) = x^3 - x^2 + x$;

в) $f(x) = x^3 + x^2 - x$;

г) $f(x) = -x^3 + x^2 + x$;

д) $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

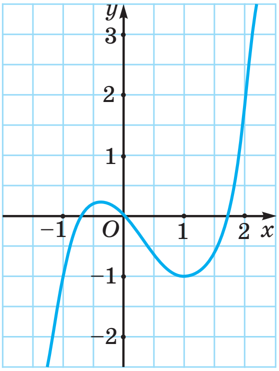


Рис. 70

28.2. Используйте алгоритм исследования графика функции с помощью производной и постройте график функции:

а) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 5$; б) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$;

в) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; г) $f(x) = x^3(2-x)$.

28.3. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$; б) $f(x) = \dfrac{6x-6}{x^2+15}$;

в) $f(x) = \dfrac{4x-4}{x^2+8}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

28.4. Исследуйте функцию $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$ с помощью производной. Определите, при каких значениях a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней.

28.5. Найдите количество корней уравнения в зависимости от числа a:

а) $x^4 - 2x^2 + 3 = a$; б) $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{4x^3}{3} = a$; в) $x^3 - 3x^2 + 4 = a$.

§ 29. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пример 1. Найдите сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ на отрезке $[-4; 2]$.

Решение. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ на отрезке $[-4; 2]$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9.$

$3x^2 + 6x - 9 = 0;\ \ x^2 + 2x - 3 = 0;\ \ x_1 = -3 \in [-4;\ 2];\ \ x_2 = 1 \in [-4;\ 2].$

$f(-4) = (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) + 2 = 22;$

$f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 2 = 29;$

$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 = -3;$

$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 = 4.$

$\max\limits_{[-4;\ 2]} f(x) = f(-3) = 29;$

$\min\limits_{[-4;\ 2]} f(x) = f(1) = -3.$

$29^2 + (-3)^2 = 850.$

Ответ: 850.

Пример 2. Найдите произведение наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = \frac{2}{x+1} - 4$ на отрезке $[1;\ 3]$.

Решение.

Если $f(x) = \frac{2}{x+1} - 4$, то $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$.

Так как нет значений переменной, при которых производная функции равна нулю, то свои наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка.

$$f(1) = \frac{2}{1+1} - 4 = -3;\ \ f(3) = \frac{2}{3+1} - 4 = -3\frac{1}{2}.$$

Произведение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[1;\ 3]$ равно $-3 \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) = 10{,}5.$

Ответ: 10,5.

Пример 3. Материальная точка движется по прямой согласно закону $s(t) = 9t^2 - \frac{t^3}{3}$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени из промежутка от 10 до 20 секунд скорость движения точки будет наибольшей и каково значение этой скорости?

Решение.

Если $s(t) = 9t^2 - \frac{t^3}{3}$, то $v(t) = s'(t) = 18t - t^2$.

Найдем наибольшее значение функции $v(t) = 18t - t^2$ на отрезке $[10;\ 20]$.

$$v'(t) = 18 - 2t;\ \ 18 - 2t = 0;\ \ t = 9 \notin [10;\ 20].$$

$$v(10) = 18 \cdot 10 - 10^2 = 80\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v(20) = 18 \cdot 20 - 20^2 = -40\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Таким образом, скорость движения точки будет наибольшей при $t = 10$ с и значение этой скорости равно $80\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Ответ: 10 с; $80\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Пример 4. Проект цеха по переработке овощной продукции предусматривает наличие нескольких одинаковых холодильных камер. Каждая из них имеет форму правильной четырехугольной призмы объемом 250 м^3. Для облицовки боковых стенок камеры будет использован материал, цена которого — 5 р. за 1 м^2, а для облицовки дна — 2 р. за м^2. При каких размерах холодильной камеры стоимость ее облицовки будет наименьшей?

Решение. Пусть x м — длина стороны основания призмы, тогда $\frac{250}{x^2}$ м — длина бокового ребра призмы (рис. 71). Так как для облицовки боковых стенок камеры используют материал, цена которого 5 р. за 1 м^2, то стоимость облицовки стенок холодильной камеры равна $S_1(x) = 5 \cdot 4x \cdot \frac{250}{x^2}$; $S_1(x) = \frac{5000}{x}$ р. Так как для облицовки дна используют материал, цена которого 2 р. за 1 м^2, то стоимость облицовки дна холодильной камеры равна $S_2(x) = 2 \cdot x^2$ р.

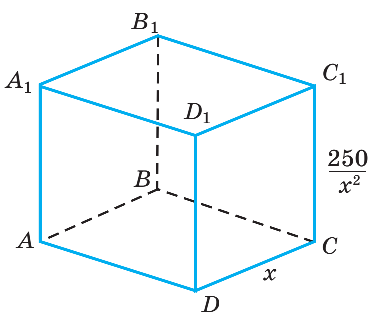
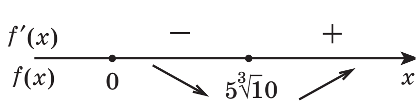


Рис. 71

Рассмотрим функцию $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$; $S(x) = 2x^2 + \frac{5000}{x}$ и найдем, при каком значении аргумента функция принимает свое наибольшее значение на промежутке $(0;\ +\infty)$.

$$S'(x) = 4x - \frac{5000}{x^2} = \frac{4x^3 - 5000}{x^2} = \frac{4(x^3 - 1250)}{x^2}.$$



$x_{\min} = 5\sqrt[3]{10}$ м.

Таким образом, стоимость облицовки холодильной камеры будет наименьшей, если ее размеры равны $5\sqrt[3]{10}$ м; $5\sqrt[3]{10}$ м и $\sqrt[3]{10}$ м.

Ответ: $5\sqrt[3]{10}$ м; $5\sqrt[3]{10}$ м и $\sqrt[3]{10}$ м.

29.1. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции:

а) $f(x) = \frac{x}{4+x} + 1$ на отрезке $[-3; 1]$;

б) $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2}$ на отрезке $[0; 2{,}5]$.

29.2. Найдите квадрат суммы наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 1$ на отрезке $[-1; 4]$.

29.3. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 1 + 2\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

29.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = x^2 + \frac{16}{x}$ на отрезке $[1; 9]$; б) $y = \frac{24}{x} + 1{,}5x$ на отрезке $[2; 8]$.

29.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right]$; б) $y = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

29.6. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

29.7. Выращенную клубнику отправляют в магазин в коробках, имеющих форму правильной четырехугольной призмы, периметр боковой грани которой равен 56 см. Какими должны быть размеры коробки, чтобы ее вместимость была наибольшей?

29.8. Необходимо изготовить сосуд емкостью 8 л, который имел бы форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Какое наименьшее количество материала потребуется на изготовление такого сосуда без крышки?

29.9. В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны по 4 см. Найдите, при какой длине большего основания площадь трапеции окажется наибольшей.

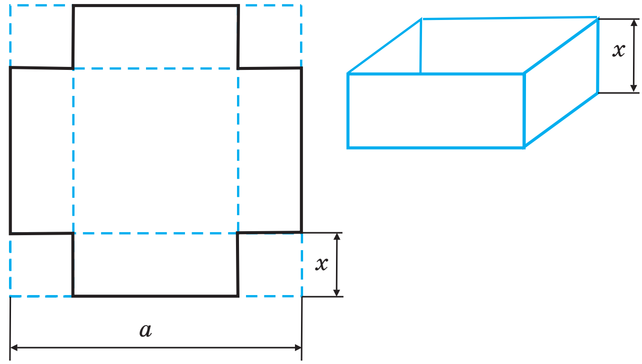


Рис. 72

29.10. Из квадратного листа жести со стороной 1 м надо сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по углам квадраты и загнув образовавшиеся края (рис. 72). Найдите, какой должна быть высота коробки, чтобы ее объем был наибольшим.

§ 30. Применение производной для решения уравнений, неравенств и практических задач

1. Решение уравнений с помощью производной

Решить уравнение — значит найти все корни уравнения или доказать, что уравнение корней не имеет. Одним из методов решения уравнений является определение корня так называемым «подбором». Этот метод используется в случаях, когда вычислением находится один или несколько корней уравнения, но решить уравнение с помощью тождественных преобразований не представляется возможным или решение приводит к громоздким преобразованиям. Если удается доказать, что уравнение не имеет других корней, кроме найденных, то задача решена. Если же доказать это не удается, то задача остается нерешенной и следует найти иной подход к поиску корней.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}} + 5x = 24$.

Решение. Анализируя «удобные» для вычисления корня значения переменой x, можно определить, что корень данного уравнения $x = 4$.

Докажем, что этот корень единственный, используя свойства монотонности функции.

1. Запишем данное уравнение в виде $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24=0.$

2. Пусть $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24.$

3. $D(f)=\boldsymbol{R}.$

4. $f'(x)=\frac{45}{\sqrt{x^2+9}(x^2+9)}+5;$ $\frac{45}{\sqrt{x^2+9}(x^2+9)}+5>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$

возрастает на всей области определения.

Так как функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, то уравнение $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$ имеет не более одного корня. Следовательно, подобранный корень — единственный корень данного уравнения.

Ответ: $x=4$.

Алгоритм* (I) *решения уравнений с помощью производной

① Определить, анализируя «удобные» для вычислений значения переменной, корень уравнения.

② Привести уравнение к виду $f(x)=0$.

③ Найти область определения функции $f(x)$.

④ Исследовать функцию $f(x)$ на монотонность на $D(f)$ или промежутках, принадлежащих $D(f)$.

⑤ Если функция возрастает (убывает) на рассматриваемом промежутке, то сделать вывод о единственности найденного корня уравнения.

Алгоритм* (II) *для определения числа корней уравнения

① Привести уравнение к виду $f(x)=0$.

② Найти область определения функции $f(x)$.

③ Исследовать функцию $f(x)$ на монотонность на $D(f)$ или промежутках, принадлежащих $D(f)$.

④ Если возможно, проверить знаки значений функции $f(x)$ на концах отрезка $[a;\, b]$ из $D(f)$.

⑤ Сделать вывод:

- если внутри интервала $(a;\ b)$ $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то существует не более одного значения c такого, что $f(c) = 0$;
- если внутри интервала $(a;\ b)$ производная $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ и $f(a)f(b) < 0$, то существует единственное значение c такое, что $f(c) = 0$.

Решим несколько уравнений, используя алгоритм I.

Пример 2. Решите уравнение $2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$.

Решение.

① Определяем, что корень данного уравнения $x = 1$.

② Данное уравнение приводим к виду $2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 0$.

③ Пусть $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$.

Найдем область определения функции $D(f) = [1;\ +\infty)$.

④ $f'(x) = \dfrac{4x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Так как $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, то

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на всей области определения.

⑤ Так как функция $f(x)$ возрастает на $D(f)$, то найденный корень уравнения

$2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$ — единственный.

$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$,

где $n \in N$, $n > 1$

Ответ: $x = 1$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt[4]{20x + 41} + \sqrt[4]{41 - 20x} = 4$.

Решение.

① Определяем, что один из корней данного уравнения $x = 2$.

② Данное уравнение приводим к виду $\sqrt[4]{20x + 41} + \sqrt[4]{41 - 20x} - 4 = 0$.

Пусть $f(x) = \sqrt[4]{20x + 41} + \sqrt[4]{41 - 20x} - 4$.

③ $D(f) = \left[-\dfrac{41}{20};\ \dfrac{41}{20}\right]$.

Отметим, что функция $f(x)$ является четной, поэтому $x = -2$ также является корнем данного уравнения. Таким образом, достаточно доказать, что функция $f(x)$ является монотонной на полуинтервале $\left[0;\ \frac{41}{20}\right)$.

④ $f'(x) = \frac{5}{\sqrt[4]{(20x+41)^3}} - \frac{5}{\sqrt[4]{(41-20x)^3}} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $\left[0;\ \frac{41}{20}\right)$.

⑤ Так как функция $f(x)$ убывает на полуинтервале $\left[0;\ \frac{41}{20}\right)$, то уравнение $\sqrt[4]{20x+41} + \sqrt[4]{41-20x} = 4$ в силу четности функции $f(x)$ других корней, отличных от $x = \pm 2$, не имеет.

Ответ: $x = \pm 2$.

Пример 4. Решите уравнение $3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) = 4$.

Решение.

① Заметим, что корнями данного уравнения являются значения $x = \pm 1$.

② Данное уравнение приводим к виду $3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) - 4 = 0$. Пусть $f(x) = 3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) - 4$.

③ $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Поскольку функция $f(x)$ является четной, достаточно доказать, что она является монотонной на полуинтервале $[0;\ +\infty)$.

④ $f'(x) = 18x^5 + 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(6x^5 + x^2 - 2x + 1\right) = 3\left(5x^5 + (x-1)^2\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на полуинтервале $[0;\ +\infty)$.

⑤ Так как функция $f(x)$ возрастает на полуинтервале $[0;\ +\infty)$, то уравнение $3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) = 4$ в силу четности функции $f(x)$ других корней, отличных от $x = \pm 1$, не имеет.

Ответ: $x = \pm 1$.

Пример 5. Доказать, что уравнение $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ имеет единственный корень.

Решение. Применим для доказательства алгоритм II.

① Данное уравнение приведем к виду $\cos x - \frac{\pi}{2} + x = 0$,

$$f(x) = \cos x - \frac{\pi}{2} + x.$$

② $D(f(x)) = \boldsymbol{R}$. Заметим, что $-1 \leqslant \frac{\pi}{2} - x \leqslant 1$, $\frac{\pi}{2} - 1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$, $\left[\frac{\pi}{2} - 1; \frac{\pi}{2} + 1\right] \subset \boldsymbol{R}$.

③ $f'(x) = -\sin x + 1$; $-\sin x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow f(x)$ не убывает для x, удовлетворяющих неравенству $\frac{\pi}{2} - 1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$.

④ Поскольку производная обращается в нуль в единственной точке $\frac{\pi}{2}$ из $\frac{\pi}{2} - 1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$, то для $x \neq \frac{\pi}{2}$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает.

⑤ $f\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - 1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) + 1 > 0$.

Следовательно, уравнение $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ имеет единственный корень.

Можно заметить, что этот корень равен $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

2. Доказательство неравенств с помощью производной

Пример 6. Доказать, что $\sin x < x$ для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x$. Исследуем ее на монотонность на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \in D(f)$; $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos x - 1 = 0$ для $x = 0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, откуда следует, что функция $f(x)$ убывает для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Обозначим через x_1 левую границу отрезка: $x_1 = 0$, $f(0) = 0$. Тогда в силу убывания функции $f(x) = \sin x - x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ по определению убывающей функции для любого x из этого отрезка получим $f(x) < f(0)$, т. е. $\sin x - x < 0$, или $\sin x < x$.

Пример 7. Доказать, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Перенесем все слагаемые в левую часть, чтобы получить неравенство вида $f(x) > 0$, где $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Проведем исследование функции $f(x)$ на монотонность для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \in D(f)$. Найдем производную функции $f(x)$: $f'(x) = -\sin x + x$. В примере 6 показано, что $\sin x - x < 0$, следовательно, при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает. Функция $f(x)$ непрерывна на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а производная функции равна нулю в одной точке этого отрезка, значит, функция возрастает на рассматриваемом отрезке.

Обозначим через x_1 левую границу отрезка: $x_1 = 0$, $f(0) = 0$.

По определению возрастающей функции $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. $f(x) > 0$ для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Значит, $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$, $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Пример 8. Доказать, что для $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

Доказательство.

① $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \geqslant 0$. Пусть $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2$.

② $D(f(x)) = \boldsymbol{R}$.

③ $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $\frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \Rightarrow x = 0$. Если $x < 0$, то $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает при $x < 0$. Для $x > 0$ имеем: $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает при $x > 0$. Значит, $x = 0$ — точка минимума функции, т. е. точка наименьшего значения функции $f(x)$ на $D(f)$.

④ Найдем значение функции $f(x)$ в точке $x = 0$: $f(0) = 0$.

⑤ Следовательно, $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

На основании решения рассмотренных задач можно составить алгоритм (III) доказательства неравенств с помощью производной.

① Привести неравенство к виду $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

② Найти область определения функции $f(x)$.

③ Исследовать функцию $f(x)$ на монотонность и экстремумы на $D(f(x))$ или промежутке, принадлежащем $D(f(x))$.

④ Представить 0 (в правой части неравенства) как $f(a)$ $(f(b))$.

⑤ Из неравенства $x > a$ $(x < b)$ сделать вывод:
- если функция возрастает, то

$f(x) > f(a) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < f(b) \Rightarrow f(x) < 0)$;
- если функция убывает, то

$f(x) < f(a) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) > f(b) \Rightarrow f(x) < 0)$.

Пример 9. Верно ли неравенство $\cos 2011 < 1 + \cos 2012$?

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде
$2011 + \cos 2011 < 2012 + \cos 2012$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \cos x$. Исследуя ее на монотонность $(f'(x) = -\sin x + 1 \geqslant 0)$, получим, что функция возрастает для $x \in \boldsymbol{R}$.

Пусть $x_1 = 2011$, $x_2 = 2012$, $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, $x_1 < x_2$, тогда $f(x_1) < f(x_2)$, откуда следует, что $2011 + \cos 2011 < 2012 + \cos 2012 \Leftrightarrow \cos 2011 < 1 + \cos 2012$.

Неравенство оказалось верным.

Пример 10. Верно ли неравенство $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$?

Решение.

1. Выполним некоторые преобразования: $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} - 2\sqrt[3]{3} < 0$,
$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}-1} - 2 < 0$.

2. Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} - 2$, тогда

$f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}-1} - 2$, так как $0 < \frac{\sqrt[3]{3}}{3} < 1$, то целесообразно рассматривать функцию на отрезке $[-1; 1]$.

3. $D(f(x)) = [-1; 1]$.

4. $f'(x) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} - \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 0 \Rightarrow x = 0, x \neq \pm 1.$ При $x \in (-1;\ 0)$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает; при $x \in (0;\ 1)$ имеем $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает; т. е. точка $x = 0$ — точка максимума, а так как данная точка единственная точка экстремума на отрезке $[-1;\ 1]$, то она является и точкой, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

5. $f(0) = 0$: $f(x) < f(0) = 0$ для $x \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

Следовательно, неравенство $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ верное.

На основании рассмотренных упражнений сформулируем алгоритм (IV) доказательства числовых неравенств с помощью производной.

① Привести неравенство к виду $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

② Определить функцию $f(x)$ и исследовать ее на монотонность и экстремумы.

③ Сравнить значения функции в точках x_1 и x_2.

Пример 11. Доказать, что $4\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}9^\circ < 3\operatorname{tg}6^\circ\operatorname{tg}10^\circ$.

Доказательство. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{\operatorname{tg}5^\circ}{5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg}9^\circ}{9^\circ} < \frac{\operatorname{tg}6^\circ}{6^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg}10^\circ}{10^\circ}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Пусть $x_1 = 5^\circ = \frac{\pi}{36}$, $x_2 = 6^\circ = \frac{\pi}{30}$. Так как x_1, $x_2 \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, то рассмотрим функцию на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg}x}{x^2}$, $f'(x) > 0$ для $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ возрастает.

x_1, $x_2 \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $x_1 < x_2$. На данном промежутке функция $f(x)$ возрастает. Используем определение возрастающей функции $f(x)$ на данном интервале: $f\left(\frac{\pi}{36}\right) < f\left(\frac{\pi}{30}\right) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}}{\frac{\pi}{36}} < \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{30}}{\frac{\pi}{30}}$. Также $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{20}} < \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}}{\frac{\pi}{18}}$. Перемножим эти неравенства и получим то, что и требовалось доказать.

3. Применение производной при решении практических задач

Пример 12. Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности $2S$ и отношением длины к ширине $5 : 2$. Найдите, какова длина кузова, если объем кузова наибольший.

Решение. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна $2S$. Отношение длины к ширине $5 : 2$, поэтому пусть длина кузова $a = 5x$, ширина кузова $b = 2x$. И пусть высота кузова — c.

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда:
$2S = 2(5cx + 2cx) + 10x^2$.

Из полученного уравнения выразим c: $c = \frac{2S - 10x^2}{14x}$.

Составим функцию $V(x)$: $V(x) = 10x^2 \frac{2S - 10x^2}{14x} = \frac{10}{7}Sx - \frac{50}{7}x^3$.

Найдем производную функции $V(x)$: $V'(x) = \frac{10}{7}S - \frac{150}{7}x^2$;
$\frac{10}{7}S - \frac{150}{7}x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{S}{15}}$.

$x = \sqrt{\frac{S}{15}}$ — максимальное значение, так как при $x < \sqrt{\frac{S}{15}}$ $V'(x) > 0 \Rightarrow V(x)$ возрастает; при $x > \sqrt{\frac{S}{15}}$ $V'(x) < 0 \Rightarrow V(x)$ убывает.

Найдем длину кузова a: $a = 5\sqrt{\frac{S}{15}} = \sqrt{\frac{5S}{3}}$.

Ответ: $a = \sqrt{\frac{5S}{3}}$.

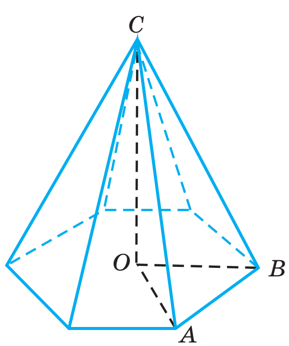


Рис. 73

Пример 13. В шалаше, который имеет форму правильной шестиугольной пирамиды, длина бокового ребра равна 1 м (рис. 73). При какой длине стороны основания шалаша его вместимость будет наибольшей?

Решение. По условию $CB = 1$. Пусть $AB = a$.

Объем пирамиды вычисляется по следующей формуле: $V = \frac{1}{3}Sh$. Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников, поэтому $AB = OB = OA = a$. Найдем высоту пирамиды: $h = \sqrt{1 - a^2}$.

Площадь основания шестиугольной пирамиды $S = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Составим функцию $V(a)$: $V(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-a^2}$. Найдем производную функции $V(a)$: $V'(a) = a\sqrt{3-3a^2} - \frac{a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{1-a^2}}$; $a\sqrt{3-3a^2} - \frac{a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{1-a^2}} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ — максимальное значение, которое принимает сторона правильной шестиугольной пирамиды, так как при $a < \sqrt{\frac{2}{3}}$ $V'(a) > 0 \Rightarrow V(a)$ возрастает; при $a > \sqrt{\frac{2}{3}}$ $V'(a) < 0 \Rightarrow V(a)$ убывает.

Ответ: $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Пример 14. Точки A и B расположены на смежных сторонах квадрата $KLMN$, на равных расстояниях от общей вершины. В квадрат $KLMN$ вписана трапеция $ABCD$ с основанием AB (рис. 74). Какова наибольшая площадь трапеции, если площадь квадрата равна 1?

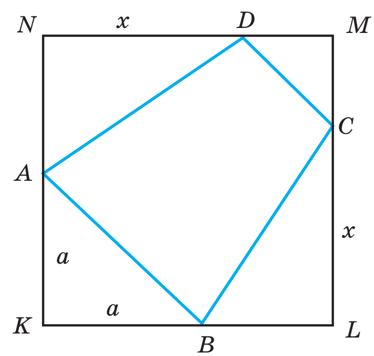


Рис. 74

Решение. Пусть в данный квадрат $KLMN$ вписана трапеция $ABCD$ так, что $A \in KN$, $B \in KL$, $AK = BK$.

Из подобия треугольников ABK и CDM следует, что $CM = DM$, поэтому $CL = DN$. Так как квадрат состоит из трапеции и четырех прямоугольных треугольников, то удобно обозначить $KL = 1$, $AK = a$ и $CL = x$. Очевидно, что $0 < a < 1$; $0 < x < 1$.

Пусть S — площадь трапеции, а S_1 — сумма площадей четырех треугольников, отсекаемых сторонами трапеции. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(a^2 + (1-x)^2 + 2(1-a)x\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2ax + a^2 + 1\right) = \frac{1}{2}\left((x-a)^2 + 1\right).$$

Составим функцию $S(x) = 1 - S_1$: $S(x) = 1 - \frac{1}{2}\left((x-a)^2 + 1\right)$. Исследуем полученную функцию на монотонность: $S'(x) = -(x-a) \Rightarrow x = a$.

$x = a$ — наибольшее значение, так как при $x < a$ $S'(x) > 0 \Rightarrow S(x)$ возрастает; при $x > a$ $S'(x) < 0 \Rightarrow S(x)$ убывает. Таким образом, при $x = a$ $S_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ максимальная площадь трапеции $S(x) = 1 - S_1 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

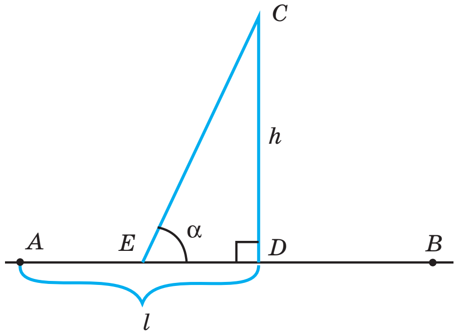


Рис. 75

Пример 15. Каким должен быть угол примыкания α (рис. 75) дороги (CE) к автомагистрали (AB), чтобы затраты времени на перевозки по маршруту AEC были наименьшими, если скорость движения автомобилей по магистрали планируется равной v_m, а по подъездной дороге — v_d $(v_m > v_d)$?

Решение.

Проведем из точки C перпендикуляр к прямой AB и обозначим длину отрезка CD через h, а длину отрезка AD через l. Тогда получим:

$$CE = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad DE = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Отсюда находим время движения автомобиля по маршруту AEC:

$$t = \frac{(l - h \cdot \operatorname{ctg}\alpha)}{v_m} + \frac{h}{v_d \sin\alpha}.$$

Так как точка A в наших рассуждениях зафиксирована условно, определяя лишь направление движения по магистрали, то α может изменяться в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Задача свелась к отысканию наименьшего значения функции $t(\alpha)$ на указанном промежутке.

Найдем производную:

$$t'(\alpha) = \frac{h}{v_d \sin^2\alpha}\left(\frac{v_d}{v_m} - \cos\alpha\right).$$

Так как $0 < \frac{v_d}{v_m} < 1$, то производная на рассматриваемом промежутке обращается в нуль лишь в одной точке $\alpha_0 = \arccos\frac{v_d}{v_m}$, причем $t'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in \left[0; \alpha_0\right]$ и $t'(\alpha) > 0$ при $\alpha \in \left[\alpha_0; \frac{\pi}{2}\right]$. Это означает, что на промежутке $\left[0; \alpha_0\right]$ функция $t(\alpha)$ убывает, а на промежутке $\left[\alpha_0, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает. Следовательно, рассматриваемая функция $t(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_0$ достигает наименьшего значения.

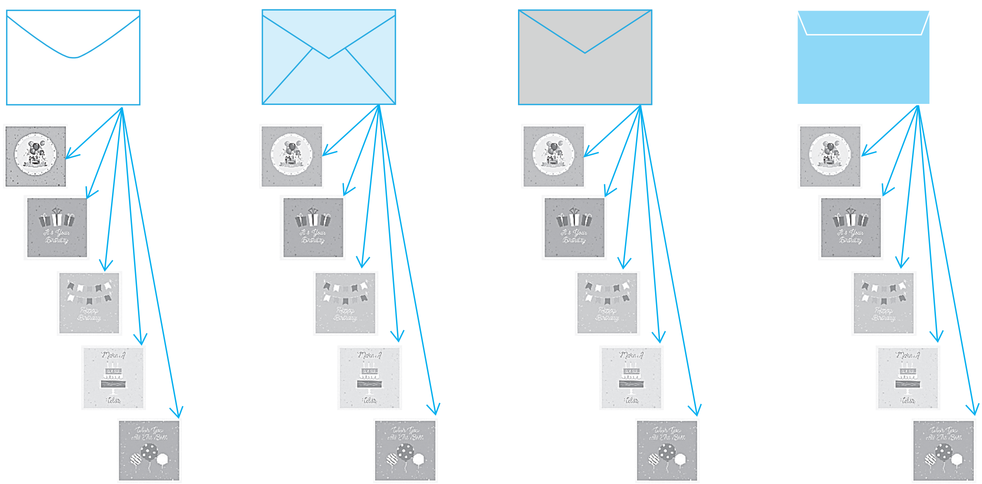
Ответ: угол примыкания определяется по формуле $\alpha_0 = \arccos\frac{v_d}{v_m}$.

§ 31. Правила комбинаторного сложения и умножения

Рассмотрим задачу. Сколькими способами можно выбрать открытку и конверт для поздравления, если предлагается 4 различных конверта и 5 различных открыток?

Решение. Один конверт из четырех можно выбрать четырьмя способами. После каждого выбора конверта можно выбрать одну открытку из пяти. Это можно сделать пятью способами.

Значит, имеется всего $4 \cdot 5 = 20$ способов выбора открытки и конверта для поздравлений (рис. 76).



$$\left.\begin{array}{l}\text{4 способа выбора конверта}\\ \text{5 способов выбора открытки}\end{array}\right\}\ 4 \cdot 5 = 20 \text{ способов}$$

Рис. 76

Ответ: 20 способами.

Рассмотренная задача относится к разделу математики, который называется «Комбинаторика».

Комбинаторика (от лат. *combina* — сочетать, соединять) изучает способы подсчета всевозможных комбинаций из некоторых элементов (объектов), составленных по определенным правилам.

Рассмотренную задачу можно решить по правилу комбинаторики, которое называется ***правилом произведения.***

Правило произведения
Если
1) объект $\boldsymbol{A}$ может быть выбран $\boldsymbol{m}$ различными способами,
2) после каждого такого выбора объект $\boldsymbol{B}$ можно выбрать $\boldsymbol{n}$ различными способами,
то выбрать **сначала $\boldsymbol{A}$, а потом $\boldsymbol{B}$** можно $\boldsymbol{m \cdot n}$ способами.

Пример 1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

Решение.

Первую цифру двузначного числа (объект A) можно выбрать четырьмя способами. Объект B — вторую цифру двузначного числа — также можно выбрать четырьмя способами.

По правилу произведения выбрать сначала объект A, затем объект B можно $4 \cdot 4 = 16$ способами.

Таким образом, из цифр 1, 2, 3 и 4 можно составить 16 двузначных чисел.

Ответ: 16 двузначных чисел.

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать одну согласную и одну гласную букву из слова «ремонт»?

Решение.

Объект A — согласная буква данного слова. Согласных в слове 4. Объект B — гласная буква данного слова, их в слове 2.

По правилу произведения выбор сначала объекта A, а затем объекта B может быть осуществлен $4 \cdot 2 = 8$ способами.

Ответ: 8 способами.

Пример 3. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, можно составить, если в меню представлены 2 первых, 6 вторых и 7 третьих блюд?

Решение.

Объект A — первое блюдо, объект B — второе блюдо, объект C — третье блюдо. По правилу произведения выбор сначала объекта A, а затем B и C может быть осуществлен $2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$ способами.

Ответ: 84 способами.

Пример 4. Для оформления двух игровых комнат в детском спортивном комплексе есть 6 различных проектов. Сколькими способами можно выбрать два из них, если проекты должны быть различными?

Решение. Объект A — проект для оформления первой комнаты. Его можно выбрать шестью способами. Объект B — проект для оформления второй комнаты. После выбора проекта для первой комнаты его можно выбрать пятью способами.

По правилу произведения выбор сначала объекта A, а затем B может быть осуществлен $6 \cdot 5 = 30$ способами.

Ответ: 30 способами.

Обобщение правила произведения

Если

1) объект A_1 может быть выбран m_1 различными способами,

2) после каждого выбора объектов $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, объект A_k может быть выбран m_k различными способами,

то выбрать сначала A_1, потом $A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}, A_k$ можно $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ способами.

Пример 5. Сколькими способами можно выбрать комплект из пары перчаток, шляпы и зонта, если имеется 5 видов перчаток, 7 видов шляп и 10 видов зонтов?

Решение. Перчатки могут быть выбраны пятью способами. После каждого выбора перчаток шляпу можно выбрать семью способами. После каждого выбора перчаток и шляпы зонт можно выбрать десятью способами. Следовательно, по правилу произведения, набор из перчаток, шляпы и зонта можно выбрать $5 \cdot 7 \cdot 10 = 350$ способами (рис. 77).

Рис. 77

Ответ: 350 способами.

Рассмотрим задачу. Сколькими способами можно выбрать одну экскурсию выходного дня, если бюро путешествий предлагает 4 экскурсии в старинные замки и 5 экскурсий в уникальные природные заповедники?

Эту задачу можно решить с помощью **правила суммы 1**.

Правило суммы 1

Если объект A может быть выбран $\boldsymbol{m}$ различными способами, а другой объект B можно выбрать $\boldsymbol{n}$ различными способами, причем ни один из способов выбора объекта A не совпадает ни с одним из способов выбора объекта B, то выбрать **либо $\boldsymbol{A}$, либо $\boldsymbol{B}$** можно $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ способами.

В нашем случае объект A — экскурсия в старинные замки, ее можно выбрать четырьмя способами, объект B — экскурсия в уникальные природные заповедники, ее можно выбрать пятью способами. Тогда по правилу суммы выбрать либо A, либо B можно $4 + 5 = 9$ способами.

Пример 6. Сколькими способами можно выбрать один цветок из 5 различных роз и 9 различных гвоздик?

Решение. Одну розу из пяти (объект A) можно выбрать пятью способами. Объект B — одну гвоздику из девяти, можно выбрать девятью способами. По правилу суммы выбрать либо объект A, либо объект B можно $5 + 9 = 14$ способами.

Таким образом, один цветок из 5 различных роз и 9 различных гвоздик можно выбрать 14 способами (рис. 78).

5 + 9 = 14 способов выбора одного цветка

Рис. 78

Ответ: 14 способами.

Пример 7. Сколькими способами можно выбрать один напиток, если предлагаются 3 цитрусовых и 7 ягодных напитков?

Решение. Объект A — цитрусовый напиток, объект B — ягодный напиток.

Объект A можно выбрать тремя способами, а объект B — семью способами.

По правилу суммы один напиток (т. е. либо объект A, либо объект B) можно выбрать $3 + 7 = 10$ способами.

Ответ: 10 способами.

Рассмотрим задачу. На показе мод в демонстрации первой коллекции участвовали 14 моделей, а второй — 18, при этом 5 моделей приняли участие в демонстрации обеих коллекций. Сколько всего моделей приняло участие в показе мод?

Так как при подсчете общего количества моделей сложением числа 14 с числом 18 дважды будут подсчитаны 5 моделей, принявших участие в демонстрации обеих коллекций, то решение этой задачи приводит к следующему правилу.

Правило суммы 2

Если некоторые способы выбора объектов A и B совпадают и число совпадений равно $\boldsymbol{k}$, то общее число различных способов выбора либо объекта A, либо B равно $\boldsymbol{m + n - k}$, **где** $\boldsymbol{m}$ ***— число выбора объекта*** A, $\boldsymbol{n}$ ***— число выбора объекта*** B.

В нашей задаче: $m = 14$, $n = 18$, $k = 5$, тогда $m + n - k = 27$.

Ответ: 27.

Пример 8. В классе из 25 школьников 15 человек занимаются теннисом, 13 — туризмом, 8 — теннисом и туризмом. Остальные — плаваньем. Сколько человек занимается плаваньем?

Решение. Объект A — школьник, занимающийся теннисом. Объект A можно выбрать 15 способами. Объект B — школьник, занимающийся туризмом. Объект B можно выбрать 13 способами. Так как 8 школьников занимаются и теннисом и туризмом, то 8 способов выбора объектов A и B совпадают (рис. 79).

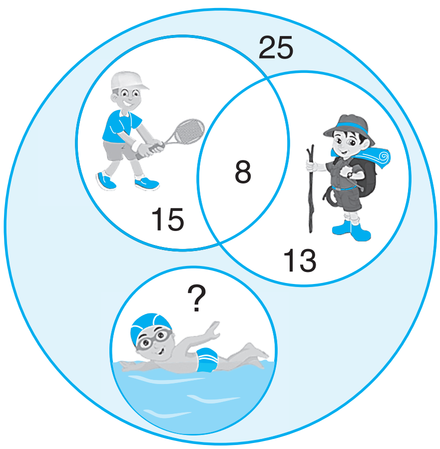


Рис. 79

Тогда по правилу суммы 2 общее число различных способов выбора либо объекта A, либо объекта B равно $15 + 13 - 8 = 20$.

Таким образом, 20 человек занимаются либо теннисом, либо туризмом.

По условию задачи остальные школьники занимаются плаваньем. Так как в классе 25 человек, то плаванием занимаются $25 - 20 = 5$ человек.

Ответ: 5 человек.

Пример 9. Во время каникул 15 учащихся одного класса посетили художественный музей, а 14 — исторический, причем 7 из этих одноклассников посетили оба музея. Сколько всего человек в классе, если известно, что каждый посетил хотя бы один из этих музеев?

Решение. Для решения задачи используем правило суммы 2. Объект A — учащийся, посетивший художественный музей, его можно выбрать 15 способами. Объект B — учащийся, посетивший исторический музей, его можно выбрать 14 способами. Так как 7 способов выбора объектов A и B совпадают, то имеем: $15 + 14 - 7 = 22$ (человека в классе).

Ответ: 22 человека.

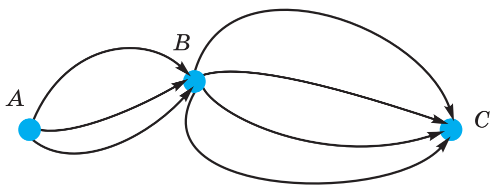


Рис. 80

31.1. Из города A в город B ведут три дороги, а из города B в город C ведут 4 дороги (рис. 80). Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

31.2. Кофейня предлагает в меню 10 видов кофе и 12 видов десертов. Сколькими способами можно сформировать заказ, состоящий из кофе с десертом?

31.3. Сколькими способами можно оклеить две комнаты обоями, если есть три различных вида обоев (комнаты могут быть оклеены одинаковыми обоями)?

31.4. Сколькими способами можно покрасить стены двух выставочных залов, если есть четыре различных вида краски (залы не могут быть окрашены одинаково)?

31.5. Сколькими способами можно выбрать различные пары из согласной и гласной букв из слова «комбинаторика»?

31.6. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 7, 8, 9?

31.7. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

31.8. Сколькими способами можно составить код, содержащий одну из букв a, b, c, d и одну из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

31.9. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2?

31.10. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 6, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза? Сколько из них четных?

31.11. Из города A в город B ведут две дороги, из города B в город C ведут 3 дороги и из города C в город D ведут три дороги (рис. 81). Сколькими способами можно проехать из города A в город D?

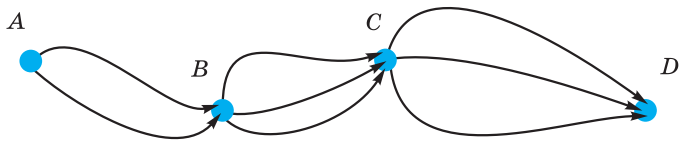


Рис. 81

31.12. Сколькими способами можно выбрать комплект из брюк, рубашки и пиджака, если имеется 3 брюк, 8 рубашек и 4 пиджака?

31.13. Сколькими способами можно выбрать набор из трех разных ручек, если есть 4 вида шариковых, 5 видов капиллярных и 3 вида гелевых ручек?

31.14. Имеется 6 видов ягод. Для приготовления компота берут 3 вида ягод. Сколько различных вариантов компота можно приготовить?

31.15. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр:

а) 1, 2, 3, 4; б) 0, 1, 2, 3?

31.16. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

31.17. Сколько неудачных попыток можно сделать, открывая замок, код которого состоит из четырех различных цифр?

31.18. Сколько наборов из 4 букв можно составить из 33 букв русского алфавита?

31.19. Сколькими способами можно заказать один напиток в кафе, если в меню имеется 5 видов сока и 4 вида морсов?

31.20. Сколькими способами можно выбрать один фрукт, если в вазе лежат 5 различных яблок, 4 различные груши и 2 различных апельсина?

31.21. В классе из 25 школьников 15 человек занимаются шахматами, 13 — футболом, 6 — шахматами и футболом. Остальные — дзюдо. Сколько человек занимается дзюдо?

31.22. В классе 25 человек, 15 из них занимаются спортом, а 13 человек занимаются музыкой. Сколькими способами можно выбрать спортсмена на соревнование, если в это же время проходит музыкальный конкурс?

31.23. На международной конференции среди 300 участников несколько человек знают китайский язык. Среди всех остальных — 100 знают английский и французский, 150 — английский и русский, 25 — русский, французский и английский. Сколько участников конференции знают китайский язык?

31.24. Сколько среди первых 100 натуральных чисел таких, которые делятся на 2, или на 3, или на 2 и на 3?

31.25. Сколько среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3?

31.26. Сколько среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

§ 32. Перестановки. Размещения

Рассмотрим задачу. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 3, 5, 6, 8 так, чтобы все цифры были различными?

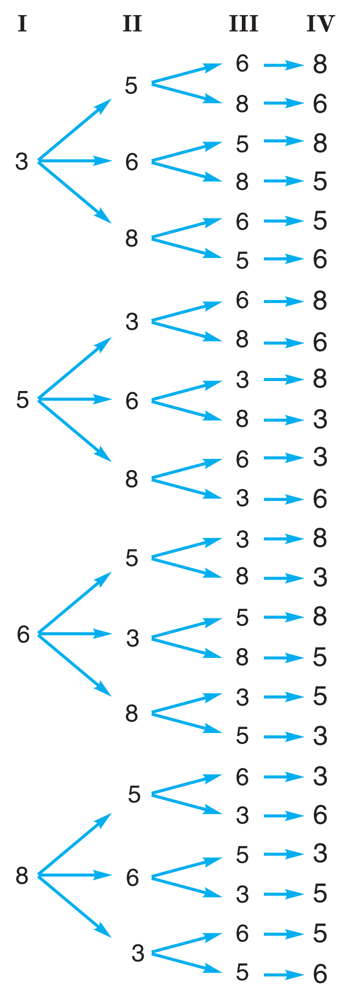


Рис. 82

Решение. На первое место можно поставить **любую из четырех цифр** (первый столбик на рисунке 82), ее можно выбрать **четырьмя** способами.

На второе — любую **из оставшихся трех цифр** (второй столбик), т. е. вторую цифру можно выбрать **тремя** способами.

На третье — любую **из оставшихся двух цифр** (третий столбик), т. е. третью цифру можно выбрать **двумя** способами.

На четвертое — **оставшуюся одну цифру** (четвертый столбик).

Всего будет столько различных четырехзначных чисел, сколько получилось «цепочек» от первой цифры до четвертой:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ числа.

Каждое из полученных четырехзначных чисел отличается от других только порядком расположения цифр. В этом случае говорят, что рассматриваются перестановки из четырех различных элементов.

Перестановками из n различных элементов называются наборы, каждый из которых содержит все эти n элементов, взятых в определенном порядке.

Различные перестановки из n данных элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n (от фр. *permutation* — перестановка).

Выведем формулу для подсчета числа перестановок из n элементов.

Пусть имеется n различных элементов, которые нужно распределить по n местам. Выбор первого элемента можно осуществить n способами (иначе говоря, на первое место можно поставить любой из этих n элементов).

После выбора первого элемента второй элемент можно выбрать $(n-1)$ способом (на второе место можно поставить любой из оставшихся $(n-1)$ элементов). Третий элемент можно выбрать $(n-2)$ способами и т. д.

Последний элемент можно выбрать только одним способом.

По правилу произведения получим, что n элементов можно выбрать $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами. Значит, число перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}$$

Для произведения первых n натуральных чисел применяют специальное обозначение $n!$ (читается «n факториал»). Это название происходит от латинского слова *factorialis* — действующий, производящий, умножающий.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Например, $2! = 1 \cdot 2 = 2$;

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$.

По определению: $1! = 1$, $0! = 1$.

Поскольку число перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n, то получаем формулу: $P_n = n!$.

В рассмотренной задаче число всевозможных четырехзначных чисел, составленных из четырех данных цифр так, чтобы все цифры были различными, равно числу перестановок из четырех элементов: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Пример 1. Вычислите: а) $5! - 4!$; б) $\frac{12!}{10!}$.

Решение.

а) $5! - 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 24 = 96$;

б) $\frac{12!}{10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 11 \cdot 12 = 132.$

Пример 2. Сколько существует прогнозов распределения трех команд на три призовых места?

Решение.

Так как каждый способ будет отличаться от другого только порядком расположения команд на пьедестале, то число таких способов равно числу перестановок из трех элементов: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6 прогнозов.

Пример 3. Сколькими способами 6 человек могут сесть в ряд на 6 стульев?

Решение.

Так как каждый из способов будет отличаться от другого только порядком расположения элементов, то количество способов рассадки будет равно числу перестановок из 6 элементов. По формуле числа перестановок из n элементов получим: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ способов.

Пример 4. Сколькими способами можно составить расписание на один день из шести уроков по шести различным предметам, если один из предметов — математика — должен быть первым уроком?

Решение.

Так как первый урок должен быть по предмету математика, то остается составить расписание на оставшиеся 5 уроков по 5 предметам. Каждое из расписаний будет отличаться от другого только порядком учебных предметов, поэтому их количество будет равно числу перестановок из 5 элементов. По формуле числа перестановок из n элементов получим: $P_5 = 5! = 120$ способов составить расписание.

В практических задачах часто бывает нужно подсчитать количество наборов, состоящих из m элементов, выбранных из n различных элементов этого вида. Например, рассмотрим задачу: сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 6, 8 так, чтобы все цифры были различными?

Решение.

На первое место в числе можно поставить любую из пяти цифр, ее можно выбрать пятью способами.

На второе — любую из четырех оставшихся цифр, т. е. вторую цифру можно выбрать четырьмя способами.

На третье — любую их трех оставшихся цифр, третью цифру можно выбрать тремя способами.

По правилу произведения получим, что из цифр 1, 3, 5, 6, 8 можно составить $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ различных трехзначных чисел так, чтобы все цифры были различными.

В этом случае говорят, что рассматриваются размещения из пяти элементов по три.

Размещениями из n различных элементов по m называются наборы, каждый из которых содержит m элементов из n, взятых в определенном порядке.

Размещения из n различных элементов по m отличаются друг от друга элементами или порядком их расположения.

Число всех размещений из n элементов по m обозначается A_n^m (от фр. слова *arrangent* — размещение, приведение в порядок) и читается «число размещений из n различных элементов по m».

Выведем формулу для подсчета числа всех размещений из n различных элементов по m. Выбор первого элемента можно осуществить n способами (на первое место можно поставить любой из этих n элементов). После выбора первого элемента второй элемент можно выбрать $(n-1)$ способом (на второе место можно поставить любой из оставшихся $(n-1)$ элементов). Третий элемент можно выбрать $(n-2)$ способами и т. д. Наконец, m-й элемент можно выбрать $(n-(m-1)) = (n-m+1)$ способом.

По правилу произведения получим, что m элементов из n можно выбрать $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ способами.

Значит, число всех размещений из n различных элементов по m можно вычислить по формуле $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

Эту формулу можно преобразовать.

Умножим и разделим произведение

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

на $(n-m)!$ и получим:

$$A_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m)!}{(n-m)!}.$$

В числителе дроби выражение $(n-m)!$ заменим на произведение $(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Тогда

$$A_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)!}.$$

Числитель полученной дроби представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n!$. Значит, $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Таким образом, получили формулу для вычисления числа размещений из n различных элементов по m при $m < n$.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

В рассмотренной задаче число всевозможных трехзначных чисел, составленных из пяти данных цифр, равно числу размещений из пяти элементов по три:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Пример 5. Сколько различных четырехцветных флажков можно составить из пяти различных горизонтальных цветных полос?

Решение.

Так как различные флажки будут отличаться один от другого либо цветом полос, либо порядком расположения полос (рис. 83), то число всех четырехцветных флажков из пяти различных цветных полос равно числу размещений из пяти элементов по четыре:

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

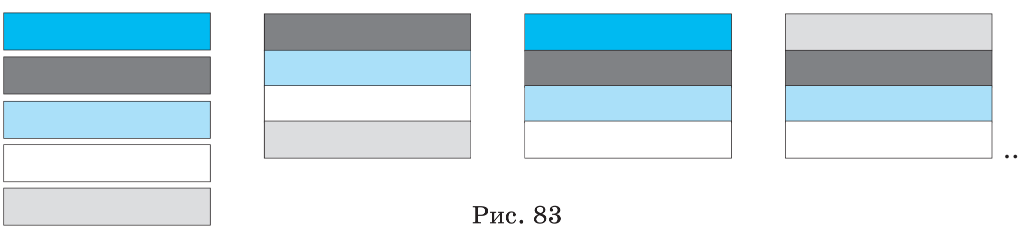


Рис. 83

Пример 6. Студентам нужно сдать 5 экзаменов за 11 дней сессии. Сколько различных расписаний экзаменов можно составить?

Решение.

Так как нужно выбрать пять дней для сдачи экзаменов из 11, то каждое расписание экзаменов отличается от другого выбранными днями и порядком следования дисциплин, поэтому нужно найти число размещений из 11 по 5.

$$A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55\,440.$$

Пример 7. Сколько различных четырехцветных флажков можно составить из пяти различных горизонтальных цветных полос, если при этом две из них (синяя и красная) должны быть рядом?

Решение.

Так как синяя и красная полосы должны быть рядом (соседи), то эту пару будем рассматривать как один элемент («один цвет»). Значит, можно рассматривать флажки, имеющие не четыре, а три цветные полосы, и использовать уже не 5, а 4 цвета. Таким образом, нужно найти, сколько различных трехцветных флажков получится из четырех различных горизонтальных цветных полос. Это число равно числу размещений из четырех элементов по три: $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Среди этих флажков будут такие, в которых нет синего и красного цвета, их число равно $P_3 = 6$. Вычтем их: $24 - 6 = 18$.

Поскольку во флажке как красный цвет может следовать за синим, так и синий цвет может следовать за красным, то полученное число способов нужно удвоить. Таким образом, число различных флажков будет равно: $18 \cdot 2 = 36$.

32.1. Вычислите: а) $\frac{15!}{13!}$; б) $6! - 5!$; в) $4! \cdot 3!$; г) $\frac{5!}{8!}$.

32.2. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 5, 7 так, чтобы все цифры участвовали в записи каждого числа?

32.3. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 10 футбольных команд, если известно, что никакие две команды не набрали равного количества очков?

32.4. Сколько различных «слов» можно составить из слова «правило», переставляя буквы так, чтобы буква «п» оставалась на первом месте?

32.5. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 0 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

32.6. Сколько различных «слов» можно составить из слова «период», переставляя буквы так, чтобы гласные стояли рядом?

32.7. Сколько различных «слов» можно составить из слова «алгоритм», переставляя буквы так, чтобы гласные не стояли рядом?

32.8. Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг, если среди них 3 справочника должны стоять рядом?

32.9. Сколькими способами можно выбрать 3 книги для призов за первое, второе и третье место в олимпиаде из 10 различных книг?

32.10. Сколькими способами можно выбрать председателя, секретаря и одного члена жюри из семнадцати учащихся класса?

32.11. Сколько неудачных попыток можно сделать, чтобы открыть замок, если код содержит 4 цифры из 10, при этом цифры не могут повторяться?

32.12. Сколько можно составить различных четных пятизначных номеров из цифр 2, 3, 5, 7, 9, 1 (цифры не повторяются)?

32.13. Сколько различных четырехцветных флажков можно получить из шести различных горизонтальных цветных полос, если при этом две из них (синяя и красная) не должны быть рядом?

§ 33. Сочетания. Решение комбинаторных задач

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать троих дежурных: дежурного на первый этаж, на второй и на третий — из 20 человек в классе?

Решение. Так как каждый вариант **отличается** от другого **или элементами** (учащимися), **или порядком** их расположения (для троих выбранных дежурных имеет значение еще выбор этажа), то число способов равно числу размещений из 20 элементов по 3:

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} =$$

$= 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840$ способов.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать троих дежурных из 20 человек в классе?

Решение. В этой задаче **порядок** выбора дежурных **не имеет значения**, поэтому число размещений из 20 элементов по 3 $\left(A_{20}^3\right)$ надо уменьшить во столько раз, сколькими способами можно переставить эти 3 элемента (в P_3 раз). Тогда получим:

$$\frac{A_{20}^3}{P_3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140 \text{ способов.}$$

В этом случае говорят, что рассматриваются сочетания из 20 элементов по 3.

Сочетаниями из n различных элементов по m называются наборы, каждый из которых содержит m элементов из n.

Сочетания из n различных элементов по m отличаются друг от друга только элементами. Порядок следования элементов не учитывается.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m (от фр. *combination* — сочетание).

Число всех сочетаний из n различных элементов по m можно вычислить по формуле $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$.

Преобразуем эту формулу, умножив числитель и знаменатель дроби на $(n-m)!$, и получим: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)!}{m!(n-m)!}$.

В числителе дроби выражение $(n-m)!$ заменим на произведение $(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Тогда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{m!(n-m)!}.$$

Числитель полученной дроби представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n!$. Значит, $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 1. Сколькими способами можно составить набор из трех разноцветных шариков, если имеются шарики пяти различных цветов?

Решение.

Так как способы выбора различаются лишь элементами и порядок их расположения в наборе не существен, то рассматриваются сочетания из 5 элементов по 3. Число сочетаний вычислим по формуле: $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10$.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ответ: 10.

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать 6 школьников из 12 для участия в первом этапе квеста?

Решение.

Так как различные способы выбора команды из 6 школьников отличаются только элементами, порядок не существенен, то число всех команд равно числу сочетаний из 12 элементов по 6: $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = \frac{12!}{6!6!} = 924$.

Ответ: 924 способами.

Пример 3. В классе учатся 25 человек. Из них 12 девочек. Для поздравления ветеранов нужно выбрать троих мальчиков и двоих девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Так как в классе 25 человек, среди которых 12 девочек, то в классе учатся 13 мальчиков.

Так как различные способы выбора троих мальчиков из 13 различаются только элементами, порядок не существен, то число всех способов выбора мальчиков равно числу сочетаний из 13 элементов по 3:

$$C_{13}^{3} = \frac{13!}{3!(13-3)!} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286.$$

Число всех способов выбора двоих девочек из 12 равно числу сочетаний из 12 элементов по 2:

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66.$$

Поскольку при каждом выборе мальчика, девочек можно выбрать C_{12}^{2} способами, то по правилу произведения троих мальчиков и двоих девочек для поздравления можно выбрать $C_{13}^{3} \cdot C_{12}^{2} = 286 \cdot 66 = 18\,876$ способами.

Ответ: 18 876 способами.

Комбинаторные задачи мы решали с помощью правил вычисления количества перестановок, размещений, сочетаний. Их можно объединить в один класс — элементарных задач — и использовать следующий алгоритм выбора вида набора (рис. 84) (наборы, составляемые из элементов, определяемых условием задачи, могут еще называться комбинациями, способами, соединениями).

Алгоритм выбора вида набора

Рис. 84

Рассмотрим примеры применения алгоритма к решению комбинаторных задач.

Пример 4. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 7, 8, 9 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

Решение. В соответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в одном наборе? Да, все, так как всего цифр четыре, и все они используются в записи числа. Значит, различные четырехзначные числа представляют собой перестановки из четырех элементов. Применим формулу числа перестановок из n элементов, получим: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24.

Пример 5. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 6 гандбольных команд, если известно, что никакие две команды не набрали одинакового количества очков?

Решение. В соответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в одном наборе? Да, все, так как каждый из способов расположения команд в таблице содержит все 6 команд и будет отличаться от другого только порядком расположения команд в турнирной таблице. Количество способов расположения команд будет равно числу перестановок из 6 элементов. По формуле числа перестановок из n элементов получим: $P_6 = 6! = 720$.

Ответ: 720 способами.

Пример 6. В картинную галерею поступило 9 новых картин. Сколькими способами можно выбрать четыре из них для выставки и поместить на 4 места в зале?

Решение. В соответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в одном наборе? Так как всего картин 9, а выбрать нужно 4, то в одном наборе используются не все данные элементы. Значит, рассматриваемые комбинации — это сочетания или размещения. Так как определены места расположения картин, то порядок расположения элементов в наборе имеет значение. Следовательно, для ответа на вопрос задачи применяем формулу числа размещений из 9 элементов по 4:

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024.$$

Ответ: 3024 способами.

Пример 7. Студенты одной из групп изучают 9 дисциплин по 3 пары ежедневно. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

Решение. Так как в расписании на один день будет 3 дисциплины из 9, то по алгоритму рассматриваемые комбинации — это не перестановки, а так как имеет значение порядок пар в расписании, то число способов их выбора равно числу размещений из 9 элементов по 3: $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$

Ответ: 504 способами.

Пример 8. Сколькими способами можно составить команду из четырех человек для соревнований по плаванию из 7 пловцов?

Решение.

Так как различные команды содержат 4 пловца из семи (не все пловцы будут в одной команде) и команды пловцов различаются только элементами (порядок выбора не имеет значения), то в соответствии с алгоритмом рассматриваются сочетания из 7 элементов по 4.

Число сочетаний вычислим по формуле:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Ответ: 35 способами.

Пример 9. В вокальном кружке занимаются 10 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Так как в наборе будет 2 элемента из 10, то по алгоритму рассматриваемые комбинации — это не перестановки, а так как не имеет значения порядок выбора солистов, то число способов их выбора равно числу сочетаний из 10 элементов по 2: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45.$

Ответ: 45 способами.

33.1. Сколько наборов из 5 пирожных можно составить из 7 видов пирожных?

33.2. В классе 25 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из них четырех делегатов на конференцию?

33.3. Из двухсот заявок, поданных для участия в международном кинофестивале, организаторам нужно отобрать 30 фильмов для конкурсного показа. Сколькими способами это можно сделать?

33.4. Сколько существует разносторонних треугольников, длины сторон которых принимают следующие значения: 4, 5, 6, 7?

33.5. В подразделении 60 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно выбрать из них четырех солдат и двух офицеров для несения караула?

33.6. Сколькими способами 8 человек могут сесть в ряд на 8 стульев?

33.7. Сколькими способами из 8 участников совещания можно выбрать председателя и секретаря?

33.8. Сколькими способами из 8 сотрудников компании можно выбрать двух человек для служебной командировки?

33.9. В магазине покупателю предлагают 12 видов рубашек и 10 видов брюк нужного размера. Сколькими способами он может выбрать из них 3 рубашки и 2 брюк?

33.10. Шестеро друзей пришли в кинотеатр. Все их места расположены подряд в одном ряду. Сколькими способами они могут сесть так, чтобы Оля и Коля сидели рядом?

33.11. Сколько различных аккордов можно взять из десяти выбранных клавиш рояля, если каждый аккорд может содержать от трех до десяти звуков?

33.12. Сколько пятизначных чисел содержат в своей записи хотя бы один нуль?

§ 34. Метод математической индукции

Утверждения типа «Для каждого натурального n...» можно доказать посредством применения особого метода рассуждений, называемого методом математической индукции.

В основе этого метода лежит принцип математической индукции (аксиома):

если утверждение $A(n)$, в котором n — натуральное число истинно для $n = 1$, и из того, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно для $n = k + 1$, то оно истинно для любого натурального n.

Метод математической индукции, применяемый для утверждений типа «Для каждого натурального n...», состоит в:

1) проверке базы индукции (при $n = 1$ $A(1)$ — верно);

2) индуктивном переходе или шаге индукции: если верно утверждение с номером k, то верно утверждение с номером $k + 1$ ($A(k) \Rightarrow A(k + 1)$);

3) выводе: на основании принципа математической индукции утверждение верно для любого натурального n.

Замечание 1

Иногда удобен индуктивный спуск: если утверждение с номером n, $n > 1$, можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами, то утверждение верно для всех n.

Замечание 2

Иногда для доказательства следующего утверждения надо опираться на все предыдущие утверждения, тогда индуктивный переход имеет следующий вид:

«Если верны все утверждения с номерами от 1 до n, то верно утверждение с номером $n + 1$».

Алгоритм применения метода математической индукции

① Выделить в условии задачи утверждение $A(n)$.

② Сформулировать утверждение $A(1)$ и проверить его истинность.

③ Записать утверждения $A(k)$ и $A(k+1)$.

④ Показать следование $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

⑤ Сделать вывод.

Пример 1. Докажите, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство.

1. Утверждение $A(n)$: сумма кубов n натуральных чисел вычисляется по формуле $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. «Сумма», состоящая из одного слагаемого, вычисляется по формуле

$$\left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2.$$

Это утверждение верно, так как $1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2$, $1 = 1$.

3. $A(k)$: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

$A(k+1)$: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

4. Покажем, что $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Обозначим $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = S_k$, тогда $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = S_k + (k+1)^3 =$

$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$ — верно.

5. Вывод: на основании принципа математической индукции утверждение $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ верно для любого натурального n.

Пример 2. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Доказательство.

① $A(n): n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, где $n \in \mathbf{N}$.

② $A(1)$: $n = 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ делится на 9.

③ $A(k): k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ делится на 9,

$A(k+1): (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ делится на 9.

④ Если $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ делится на 9, то $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ делится на 9.

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 + k^3 - k^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 - k^3 =$

$= \left(k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right) + \left(9k^2 + 27k + 27\right)$ — делится на 9, так как первое слагаемое суммы делится на 9 по предположению, а второе — содержит множитель 9.

⑤ Вывод: на основании принципа математической индукции утверждение верно для любого натурального n.

Пример 3. Докажите, что $7^n - 1$ делится на 6 при любом натуральном n.

Доказательство.

$n = 1$, $7^1 - 1$ делится на 6.

Покажем, что если $7^k - 1$ делится на 6, то и $7^{k+1} - 1$ делится на 6.

$7^{k+1} - 1 = (6+1) \cdot 7^k - 1 = (7^k - 1) + 6 \cdot 7^k$ — делится на 6, так как первое слагаемое суммы делится на 6 по предположению, а второе — содержит множитель 6.

Вывод: на основании принципа математической индукции утверждение верно для любого натурального n.

Пример 4. Доказать, что:

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_n)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2 + 2P_1P_2 + \ldots +$$

$$+ 2P_1P_n + 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_n + 2P_3P_4 + \ldots + 2P_3P_n + \ldots + 2P_{n-1}P_n.$$

Доказательство.

Воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n = 2$ имеем $\left(P_1 + P_2\right)^2 = P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2$ — верно.

2) Допустим, что утверждение верно для $n = k$, т. е.

$$\left(P_1 + P_2 + \ldots + P_k\right)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_k^2 + 2P_1P_2 + \ldots +$$
$$+ 2P_1P_k + 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_k + \ldots + 2P_{k-1}P_k.$$

3) Докажем, что оно верно для $n = k + 1$, т. е.

$$\left(P_1 + P_2 + \ldots + P_{k+1}\right)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{k+1}^2 + 2P_1P_2 + \ldots +$$
$$+ 2P_1P_{k+1} + 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_{k+1} + \ldots + 2P_kP_{k+1}.$$

Рассмотрим

$$\left(P_1 + P_2 + \ldots + P_{k+1}\right)^2 = \left(\left(P_1 + P_2 + \ldots + P_k\right) + P_{k+1}\right)^2 =$$
$$= \left(P_1 + P_2 + \ldots + P_k\right)^2 + 2\left(P_1 + P_2 + \ldots + P_k\right) \cdot P_{k+1} + P_{k+1}^2 =$$
$$= \left(P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_k^2 + 2P_1P_2 + \ldots + 2P_1P_k + \ldots + 2P_{k-1}P_k\right) +$$
$$+ 2P_1P_{k+1} + 2P_2P_{k+1} + \ldots + 2P_kP_{k+1} + P_{k+1}^2 =$$
$$= P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{k+1}^2 + 2P_1P_2 + \ldots + 2P_1P_{k+1} + 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_{k+1} +$$
$$+ \ldots + 2P_kP_{k+1}.$$

Таким образом, формула

$$\left(P_1 + P_2 + \ldots + P_n\right)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2 + 2P_1P_2 + \ldots + 2P_1P_n +$$
$$+ 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_n + 2P_3P_4 + \ldots + P_3P_n + \ldots + 2P_{n-1}P_n$$

верна для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Пример: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

34.1. Если A_n имеет вид $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, то A_{k+1}:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+1)}{2}$;

б) $1 + 2 + 3 + \ldots + k + 1 = \dfrac{(k+1)(k+2)}{3}$;

в) $1+2+3+\ldots+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$;

г) $2+3+4+\ldots+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{3}$.

Выберите правильный ответ.

34.2. Если A_n имеет вид $\left(9^{n+1}-8n-9\right):16$, то A_{k+1}:

а) $\left(9^{k+1}-8k-8\right):16$; б) $\left(9^{k+2}-8k+1\right):16$;

в) $\left(9^{k+2}-8k-17\right):16$; г) $\left(9^{k+2}-8k+17\right):16$.

Выберите правильный ответ.

34.3. Если A_n имеет вид $1^1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, то A_{k+1}:

а) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(2k+1)(2k+2)}{3}$;

б) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(2k)^2=\dfrac{(k+1)(2k+2)(2k+3)}{3}$;

в) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(2k)(2k+2)}{3}$;

г) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(2k+1)^2=\dfrac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.

Выберите правильный ответ.

34.4. Если A_n имеет вид $\left(n^3+5n\right):6$, то A_{k+1}:

а) $\left(k^3+5k+1\right):6$; б) $\left(k^3+5k+2\right):6$;

в) $\left((k+1)^3+5(k+1)\right):6$; г) $\left((k+1)^3+5k+1\right):6$.

Выберите правильный ответ.

34.5. Если A_n имеет вид $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$, то A_{k+1}:

а) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k)^3=k^2\left(2k^2+1\right)$;

б) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k)^3=(k+1)^2\left(2k^2+1\right)$;

в) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k)^3=(k+1)^2\left(2k^2+2\right)$;

г) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k+1)^3=(k+1)^2\left(2(k+1)^2+1\right)$.

Выберите правильный ответ.

34.6. Если A_n имеет вид $(4^n + 15n - 1) : 9$, то A_{k+1}:

а) $(4^{k+1} + 15k + 1) : 9$; б) $(4^{k+2} + 15k + 14) : 9$;

в) $(4^{k+2} + 15k + 2) : 9$; г) $(4^{k+2} + 15k + 11) : 9$.

Выберите правильный ответ.

34.7. Если A_n имеет вид

$$1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2},$$

то A_{k+1}:

а) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot k^2 + 1 = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$;

б) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot k^2 + 1 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$;

в) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot (k^2 + 1) = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$;

г) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot (k+1)^2 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$.

Выберите правильный ответ.

34.8. Если A_n имеет вид $(5^{2n+1} + 1) : 6$, то A_{k+1}:

а) $(5^{k+2} + 2) : 6$; б) $(5^{2k+2} + 2) : 6$;

в) $(5^{2k+2} + 1) : 6$; г) $(5^{2k+3} + 1) : 6$.

Выберите правильный ответ.

34.9. Если A_n имеет вид $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$ для $n > 2$, то A_{k+1}:

а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < k + 1$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} < k$;

в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 2^k - 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < k + 1$;

г) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 2^k - 2} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < k + 1$.

Выберите правильный ответ.

34.10. Если A_n имеет вид $2^n > 2n + 7$, то A_{k+1}:

а) $2 \cdot 2^k > 2k + 8$; б) $2^{k+1} > 2k + 8$;

в) $2^{k+1} > 2k + 9$; г) $2 \cdot 2^{k+1} > 2k + 9$.

Выберите правильный ответ.

34.11. Докажите равенство:

а) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$;

б) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

в) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n+2}$;

г) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

д) $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$;

е) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

ж) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1(2n+3))}$;

з) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

и) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

к) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$;

л) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$;

м) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{n^{n+1} - 1}{x - 1}$, где $x \neq 1$.

34.12. Докажите утверждение:

а) $(6^{2n} - 1) \,\vdots\, 35$; б) $(4^n + 15n - 1) \,\vdots\, 9$;

в) $(2^{5a+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \,\vdots\, 17$; г) $(3^{n+2} - 8n - 9) \,\vdots\, 64$;

д) $(2^{n+3} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}) \,\vdots\, 37$; е) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \,\vdots\, 57$;

ж) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \,\vdots\, 25$; з) $(3^{n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{n+2} \cdot 2^{2n}) \,\vdots\, 1053$.

§ 35. Бином Ньютона

При любом натуральном n справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

которая называется формулой Ньютона в честь английского физика и математика Исаака Ньютона (1642—1727).

Правую часть этой формулы называют разложением степени бинома.

Доказательство.

Доказательство проведем методом математической индукции.

Проверим справедливость формулы при $n = 1$.

$(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + 1a^0 b^1 = a + b$, утверждение верно.

Покажем, что из $A(k)$ следует $A(k+1)$, где

$A(k)$: $(a+b)^k = C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k a^0 b^k$.

Имеем: $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) =$

$$= \left(C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k a^0 b^k\right) \cdot (a+b) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} b^0 + \left(C_k^1 + C_k^0\right) a^k b^1 + \ldots + \left(C_k^m + C_k^{m+1}\right) a^{k-m-1} b^{m+1} + \ldots + C_k^k a^0 b^{k+1} =$$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} b^0 + C_{k+1}^1 a^k b^1 + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m-1} b^{m+1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1} a^0 b^{k+1}.$$

На основании принципа математической индукции утверждение верно для любого натурального n.

Треугольник Паскаля

Коэффициенты в разложении бинома Ньютона можно вычислить, пользуясь треугольником Паскаля.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1

Чтобы найти число в какой-либо строке таблицы, достаточно найти сумму двух чисел, стоящих в предыдущей строке над этим числом справа и слева.

Например, для определения коэффициента в четвертой строчке: $6 = 3 + 3$; в седьмой строчке: $35 = 15 + 20$.

Пример 1. Найдите разложение степени бинома $(a + b)^6$.

Решение.

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Коэффициенты в разложении взяты из 6-й строки треугольника Паскаля. Показатель степени a уменьшается от 6 до 0, а показатель степени b увеличивается от 0 до 6.

Основные следствия из формулы бинома Ньютона

1. В разложении бинома Ньютона содержится $(n + 1)$ слагаемых.

Например, число слагаемых в разложении бинома Ньютона $(a + b)^{11}$ равно $n + 1 = 11 + 1 = 12$.

2. В формуле Ньютона показатель a убывает от n до 0, а показатель b возрастает от 0 до n.

3. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны.

Пример 2. Седьмой биномиальный коэффициент в разложении бинома Ньютона $(a + b)^k$ равен m, найдите номер члена разложения с таким же коэффициентом.

Решение.

Седьмой биномиальный коэффициент в разложении бинома Ньютона $(a + b)^k$ равен m, тогда есть еще один член с таким же коэффициентом в этом разложении.

Этот член удален от конца разложения на столько же, на сколько член с коэффициентом m удален от начала разложения, его номер $k + 1 - 7 = k - 6$. Значит, искомый член разложения имеет номер $k - 6$ (считая от нулевого члена).

4. Биномиальные коэффициенты сначала возрастают, а затем убывают. Если показатель степени бинома четный, то биномиальный коэффициент среднего слагаемого наибольший, если показатель степени бинома нечетный, то биномиальные коэффициенты двух средних слагаемых равны между собой и являются наибольшими.

Пример 3. Найдите номер члена с наибольшим биномиальным коэффициентом в разложении бинома Ньютона $(a + b)^{2015}$.

Решение.

Так как число членов разложения четное, то наибольший биномиальный коэффициент в разложении бинома Ньютона $(a + b)^{2015}$ будет у двух средних членов разложения. Определим их номера: так как всего членов в разложении $2015 + 1 = 2016$, то средними членами будут члены с номерами 1008 и 1009 (1007 членов до 1008-го и 1007 членов после 1009-го).

5. Сумма показателей степеней a и b в разложении бинома Ньютона равна степени бинома.

Пример 4. Найдите сумму всех коэффициентов членов многочлена в разложении $(14\,x^{20} - 13x)^{44}$.

Решение. Каждый член многочлена содержит степень переменной и коэффициент, который равен значению этого члена при $x = 1$. Значит, искомая сумма коэффициентов будет равна значению многочлена при $x = 1$, т. е.

$$(14 \cdot 1^{20} - 13 \cdot 1)^{44} = 1.$$

6. Общий член разложения, обозначим его T_m, имеет вид

$$T_m = C_n^m a_n^{n-m} \cdot b^m.$$

Пример 5. Найдите девятый член разложения $\left(a^2 + 1\right)^{12}$ бинома Ньютона.

Решение. Так как $T_m = C_n^m a_n^{n-m} b^m$, то

$$T_9 = C_{12}^9 a^{12-9} b^9 = C_{12}^9 a^{(12-m)\cdot 2} = 220a^{24-2m} = 220a^6.$$

Замечание

Чтобы записать в общем виде слагаемые в разложении бинома Ньютона, удобно $(m + 1)$-е слагаемое считать m-м членом. Например, пятое слагаемое в разложении $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ это есть одночлен $15a^2b^4$, а учитывая, что биномиальные коэффициенты начинаются с числа $C_6^0 = 1$, одночлен $15a^2b^4$ является четвертым членом этого разложения.

7. Сумма биномиальных коэффициентов разложения бинома $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

Доказательство. Подставим $a = b = 1$ в формулу

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

получим $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

8. ***Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения бинома, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов членов разложения бинома, стоящих на нечетных местах.***

Доказательство. Подставим $a = 1$, $b = -1$ в формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Будем иметь:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

откуда получается $C_n^0 + C_n^2 \ldots = C_n^1 + C_n^3 \ldots$.

35.1. Найдите в треугольнике Паскаля коэффициент пятого члена в разложении бинома Ньютона $(a + b)^8$.

35.2. С помощью формулы $T_5 = 70a^{n-m} b^m$ запишите пятый член в разложении бинома Ньютона $(a + b)^8$.

35.3. Многочлен

$a^8 + 8a^7 \cdot 2 + 28a^6 \cdot 2^2 + 56a^5 \cdot 2^3 + 70a^4 \cdot 2^4 + 56a^3 \cdot 2^5 + 28a^2 \cdot 2^6 + 8a \cdot 2^7 + 2^8$ тождественно равен:

а) $(a + 2)^7$; б) $(a + 2)^9$; в) $(a - 2)^8$; г) $(a + 2)^8$.

Выберите правильный ответ.

35.4. Найдите коэффициент пятого члена в разложении бинома Ньютона $(a - 1)^{10}$.

35.5. Пятый член в разложении бинома Ньютона $(a - b)^{10}$ равен:

а) $120a^5b^5$; б) $252\ a^5b^5$; в) $120a^8b^2$; г) $210a^6b^4$.

Выберите правильный ответ.

35.6. Многочлен $a^8 - 8a^7 + 28a^6 - 56a^5 + 70a^4 - 56a^3 + 28a^2 - 8a + 1$ тождественно равен:

а) $(a + 1)^7$; б) $(a + 1)^9$; в) $(a - 1)^8$; г) $(a + 1)^8$.

Выберите правильный ответ.

35.7. Определите номер члена разложения $\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right)^{20}$, содержащего x^7.

35.8. Найдите число членов в разложении бинома $(a + x)^{2k-1}$.

35.9. Определите номер члена разложения $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^6$, не содержащего x.

35.10. Определите номер члена разложения $\left(x - \sqrt[4]{x}\right)^{40}$, содержащего x^{13}.

35.11. Найдите число членов в разложении бинома $(4a + x)^{4k-5}$.

35.12. Найдите сумму всех коэффициентов в разложении бинома $(12x^{20} - 13x^{12})^{144}$.

35.13. Найдите сумму всех коэффициентов членов многочлена в разложении $(14x^{20} - 3x^{12} - 11x^{10})^{144}$.

35.14. В разложении $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^p$ отношение коэффициента четвертого члена к коэффициенту второго члена разложения равно $7 : 2$. Тогда член разложения, содержащий x в первой степени, равен:

а) $35x$; б) $84x$; в) $32x$; г) $6x$.

Выберите правильный ответ.

35.15. Определите коэффициент при x^{12} в разложении $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$.

Тест 1. Свойства числовых множеств

Условия	Варианты ответов
1. Выберите пару чисел, состоящую только из иррациональных чисел: 1) π; 0,(12); 2) $-0,5$; $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3}$; π; 4) 0,8; $\sqrt{3}$; 5) -4; 0,2(52).	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Округлите число 547,698 до сотых.	а) 500; б) 547,7; в) 548; г) 547,70; д) 547,6.
3. Выберите дробь, которую нельзя представить в виде конечной десятичной дроби: 1) $\frac{7}{50}$; 2) $\frac{31}{32}$; 3) $\frac{2}{15}$; 4) $\frac{9}{125}$; 5) $\frac{3}{160}$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. Найдите наибольший простой двузначный делитель числа 2184.	а) 91; б) 21; в) 13; г) 24; д) 39.
5. Найдите сумму наименьшего двузначного простого числа и наибольшего простого числа пятого десятка.	а) 70; б) 60; в) 49; г) 58; д) 39.
6. Найдите наименьшее общее кратное всех однозначных натуральных чисел.	а) 2520; б) 1260; в) 5040; г) 630; д) 3780.
7. Известно, что $\frac{2}{3}$ одного числа равны $\frac{5}{6}$ другого. Найдите отношение этих чисел.	а) 5 : 2; б) 10 : 9; в) 3 : 4; г) 5 : 8; д) 5 : 4.
8. Найдите значение выражения $\left(4\frac{2}{3}\cdot 3{,}5-3\frac{1}{2}\cdot 3{,}(6)\right):0{,}014.$	а) 2,5; б) 0,25; в) 25; г) 250; д) 2500.
9. Число увеличили на 60 %. Найдите, на сколько процентов надо уменьшить полученное число, чтобы получить исходное число.	а) 37,5; б) 30; в) 40; г) 20; д) 60.
10. Найдите НОД (475; 570; 741).	

Продолжение

Условия	Варианты ответов
11. Найдите наибольшее натуральное число, которое при делении с остатком на 19 дает частное, равное 43.	
12. Найдите НОК $(a; b; c)$, где $a = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$; $b = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $c = 2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5^2$.	
13. Представьте число 968 в виде суммы четырех положительных чисел, пропорциональных числам, обратным данным: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$ и $\frac{8}{3}$. В ответе укажите наименьшее из чисел.	
14. Интервалы движения пригородных автобусов по трем маршрутам, начинающимся на автовокзале, составляют 10, 15 и 18 мин соответственно. Найдите, сколько раз с 7 ч 10 мин до 12 ч 10 мин того же дня на автовокзале одновременно встречаются автобусы всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 10 ч 25 мин.	
15. Найдите значение выражения $\left\|\,\left|223^2 + 3\right| - \left|1 - 224^2\right| - \left|-5\right|\,\right\|$.	

Тест 2. Преобразования рациональных выражений

Условия	Варианты ответов
1. Известно, что $s - t = -5{,}2$. Укажите выражение, значение которого равно 10,4: 1) $(t - s)^2$; 2) $\frac{t - s}{2}$; 3) $2(t - s)$; 4) $s - t - 5{,}2$; 5) $2(t + s)$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выполните деление одночленов $0{,}21a^{n+1}c^7y^9$ и $7a^nc^7y^7$, где $n \in \boldsymbol{N}$.	а) $0{,}3 \cdot ay^2$; б) $0{,}03 \cdot acy^2$; в) $0{,}03 \cdot a^{\frac{n+1}{n}}cy^{\frac{9}{7}}$; г) $0{,}3 \cdot acy^2$; д) $0{,}03 \cdot ay^2$.
3. Выполните вычитание: $\frac{3x - 9}{x - 2} - \frac{x - 5}{x - 2}$.	а) $\frac{2x - 14}{x - 2}$; б) $\frac{4x - 14}{x - 2}$; в) 1; г) 2; д) $\frac{4x - 4}{x - 2}$.

Продолжение

Условия	Варианты ответов
4. Упростите выражение $\frac{15a}{5-a}+\frac{6a}{a^2-25}\cdot\frac{7a+35}{3}$.	а) $\frac{29a}{5-a}$; б) $\frac{a}{a-5}$; в) 15; г) $\frac{a}{5-a}$; д) $\frac{1}{5-a}$.
5. Разложите на множители многочлен $2bc+a^2-b^2-c^2$.	а) $(a-b+c)(a+b-c)$; б) $(a+b+c)(a-b-c)$; в) $a(a+b-c)$; г) $(b+c)(a-c)$; д) $(b+c)(a+b-c)$.
6. Сократите дробь $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}$.	а) $\frac{(x+5)(x-2)}{x-5}$; б) -2; в) $x+2$; г) $x-2$; д) $\frac{x-5}{x+5}$.
7. Упростите выражение $\left(m-(1-m)^{-1}\right)\cdot\frac{\frac{m-2}{m^{-1}}+m^0}{m^2-m+1}$.	а) $m+1$; б) $1-m$; в) $m-1$; г) m; д) 1.
8. Упростите выражение $\left(4x^{-4}-x^{-2}+6x^{-1}-9\right):\left(2x^{-4}+x^{-3}-3x^{-2}\right)$.	а) $3x^{-2}-x^{-1}+2$; б) $2-x^{-1}+3$; в) $3x^2-x+2$; г) $-x+2$; д) $3x^2-x$.
9. Разложите на множители выражение $\left(x^2+x+1\right)^2+3x\left(x^2+x+1\right)-18x^2$.	а) $\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2+4x+1\right)$; б) $x^2\left(x^2+7x+1\right)$; в) $x^2\left(x^2+x+1\right)$; г) $54x^2$; д) $(x-1)^2\left(x^2+7x+1\right)$.

Продолжение

Условия	Варианты ответов
10. Упростите выражение $\left(\left(\frac{6}{n+1}-\frac{5n+30}{n^2+5n+6}\right):\frac{n-2}{n^2+3n+2}\right)^{-1}$ и найдите его значение при $n=9$.	
11. Упростите выражение $\left(\frac{y}{xy-x^2}+\frac{x}{xy-y^2}\right):\frac{x^2+2xy+y^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ и найдите его значение при $x=-\frac{1}{7}$, $y=\frac{1}{3}$.	
12. Найдите значение выражения $16x^2+9x^{-2}+3$, если $4x-3x^{-1}=-6$.	
13. Найдите наименьшее значение выражения $8x^2+2y^2-4xy+4x+2y-12$.	
14. Упростите выражение, выполнив преобразования, $\left(3ab^{-1}-\frac{ba^{-1}}{3}\right):\left(3ab^{-1}+\frac{ba^{-1}}{3}+0{,}5^{-1}\right):\left(\left(1-\frac{ba^{-1}}{3}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)$.	
15. Упростите выражение $A=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$ и найдите значение выражения $16A$ при $x=0{,}(3)$.	

Тест 3. Рациональные уравнения

Условия	Варианты ответов
1. Выберите неверное утверждение: 1) если биквадратное уравнение имеет корни, то сумма его корней равна нулю; 2) неполное квадратное уравнение может не иметь корней; 3) любое линейное уравнение имеет единственный корень;	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Продолжение

Условия	Варианты ответов
4) если приведенное квадратное уравнение имеет корни, то сумма его корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком; 5) если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, то его корень можно вычислить по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.	
2. Выберите уравнение, не равносильное уравнению $x^2 + 5 = 0$: 1) $\frac{3}{x-6} = 0$; 2) $x^2 - 7x + 13 = 0$; 3) $\lvert x - 2\rvert + 9 = 8$; 4) $\frac{x}{8} = 0$; 5) $5x - 12 = 3(x + 4) + 2x$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
3. Решите уравнение $0{,}2\left(1{,}5x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{15} = 0{,}3x$.	а) $\frac{1}{30}$; б) 0; в) 1; г) нет корней; д) любое действительное число.
4. Решите уравнение $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$.	а) -2; 2; б) -3; $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{2}{3}$; 3; г) 6; д) $-2\frac{2}{3}$.
5. Найдите значение выражения $x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 + 5x - 1 = 0$.	а) -1; б) $\frac{31}{9}$; в) $\frac{31}{81}$; г) 25; д) $\frac{31}{27}$.

Продолжение

Условия	Варианты ответов
6. Найдите среднее арифметическое корней (корень, если он единственный) уравнения $\frac{x+3}{4x^2-9}+\frac{x-3}{4x^2+12x+9}+\frac{4}{6-4x}=0.$	а) -4; б) 0; в) -6; г) -3; д) -2.
7. Найдите сумму корней уравнения $(6x-14)^9=(x-1)^{18}$.	а) 2; б) -15; в) 8; г) -8; д) 15.
8. Найдите произведение корней уравнения $\frac{x^2-4}{x^2-9}=\frac{x^2}{7}$.	а) -28; б) 14; в) -14; г) -2; д) 28.
9. Найдите все корни уравнения $\frac{1}{3x-2-x^2}=\frac{3}{7x-4-3x^2}$.	а) 1; б) $-1\frac{1}{3}$; 1; 2; в) нет корней; г) любое число; д) -4.
10. Найдите сумму корней уравнения $3x+x^2=\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)^2$.	
11. Найдите сумму корней уравнения $\left(x^2-2x+6\right)^2=9x^2$.	
12. Найдите произведение корней уравнения $\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$.	
13. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=x^2+5$.	
14. Найдите число целых корней уравнения $\frac{3x^2+11x+6}{8+10x-3x^2}=\frac{x+3}{4-x}$ на промежутке $[2;15]$.	
15. Найдите сумму корней уравнения $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2-3x+1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8}$.	

Тест 4. Рациональные неравенства. Системы и совокупности неравенств

Условия	Варианты ответов
1. Выберите неравенство, равносильное неравенству $5x \leqslant 1$: 1) $5x^2 \leqslant x$; 2) $5x + \frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{x} + 1$; 3) $x \leqslant 1,5$; 4) $x - 0,2 \leqslant 0$; 5) $\frac{5x}{x-3} \leqslant \frac{1}{x-3}$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выберите неравенство, не имеющее решений: 1) $3x - 2(x+1) \leqslant 2 + x$; 2) $-3x \geqslant 0$; 3) $3x - 2(x+1) \leqslant x - 5$; 4) $3x \leqslant -2 + x$; 5) $3x \leqslant x$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
3. Решите неравенство $\frac{7x-2}{3} \leqslant 3 - \frac{1-x}{2} - \frac{2x-7}{6}$.	а) $(-\infty; 2]$; б) $(-\infty; 0,2]$; в) $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right]$; г) $[2; +\infty)$; д) $[0,2; +\infty)$.
4. Найдите число целых решений неравенства $0,5x^2 - x - 1,5 \leqslant 0$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
5. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{x+12}{5} + \frac{9+x}{6} \geqslant x + 2, \\ \frac{x+5}{2} + \frac{15-x}{7} < x. \end{cases}$	а) $(-\infty; 3]$; б) $\left(7\frac{2}{9}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 3] \cup \left(7\frac{2}{9}; +\infty\right)$; д) нет решений.

Продолжение

Условия	Варианты ответов
6. Решите неравенство $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \leqslant 2.$	а) $(-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$; б) $[-2; -1)$; в) $[-2; +\infty)$; г) $(-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; д) $(-1; 2]$.
7. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 7} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$.	а) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; б) $(-\infty; -1]$; в) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup [7; +\infty)$; г) $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$; д) $[7; +\infty)$.
8. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $$y = x^4 + x^2 - 6$$ расположен выше оси абсцисс.	а) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; б) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup$ $\cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; в) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; г) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; д) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.
9. Решите двойное неравенство $-3 \leqslant 1 - 3x - x^2 < \frac{13}{4}$.	а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; в) $[-4; 1]$; г) $(-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; +\infty)$; д) $[-4; -1{,}5) \cup (-1{,}5; 1]$.
10. Найдите число целых отрицательных решений неравенства $\frac{3x^2 - 11x + 22}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 3.$	

Продолжение

Условия	Варианты ответов
11. Найдите число целых значений аргумента из промежутка $[-18; 1]$, при которых график функции $y = (x+2)^2$ расположен ниже графика функции $y = 2x(x+3)+7$.	
12. Известно, что $2{,}5 \leqslant a \leqslant 4$ и $3 \leqslant b < 8$. Найдите наибольшее значение выражения $2a - \frac{b}{3}$.	
13. Найдите наименьшее целое решение неравенства $$\frac{(x^2+2x+1)(x^2-6x+9)}{x-3} \geqslant 0.$$	
14. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $$(0{,}3x^2+0{,}5x-5)^2 \leqslant (0{,}3x^2+0{,}5x+5)^2.$$	
15. Найдите произведение целых решений неравенства $$(x^2-4x)^2+8(x-2)^2 \leqslant 17.$$	

Тест 5. Арифметическая прогрессия

Условия	Варианты ответов
1. Из данных последовательностей выберите арифметическую прогрессию: 1) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \ldots$; 2) $-5; -4; -2; 1; \ldots$; 3) $2; 6; 18; 54; \ldots$; 4) $0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7; \ldots$; 5) $-8;\ 8;\ -8;\ 8; \ldots$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Из данных арифметических прогрессий выберите ту, среди членов которой есть число -10: 1) $a_n = 2n+10$; 2) $a_n = -3n$; 3) $a_n = -3n+2$; 4) $a_n = -4n-8$; 5) $a_n = -2n+11$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Продолжение

Условия	Варианты ответов
3. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_7 = 21$, $a_9 = 29$.	а) $a_1 = -3,\ d = 4$; б) $a_1 = 3,\ d = 4$; в) $a_1 = 4,\ d = -3$; г) $a_1 = -27,\ d = 8$; д) $a_1 = -3,\ d = -4$.
4. Найдите среднее арифметическое чисел 4; 7; 10; ...; 100.	а) 52; б) 48; в) 858; г) 64; д) 100.
5. Найдите, сколько членов, больших −1, содержится в арифметической прогрессии 92; 88; 84;	а) 21; б) 22; в) 23; г) 24; д) 25.
6. Найдите натуральное число, которое равно $\frac{1}{21}$ суммы предшествующих ему натуральных чисел.	а) 54; б) 45; в) 21; г) 43; д) 47.
7. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.	а) 80; б) 120; в) 90; г) 110; д) 100.
8. Составьте формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 + a_2 + a_3 = 66$, $a_2 \cdot a_3 = 528$.	а) $a_n = 20n$; б) $a_n = 2n + 20$; в) $a_n = 2n + 18$; г) $a_n = 20n + 2$; д) $a_n = 4n + 16$.

Продолжение

Условия	Варианты ответов
9. Сумма членов арифметической прогрессии (a_n) выражается формулой $S_n = 2n^2 - 3n$. Найдите $\frac{a_2}{a_1}$.	а) 0,5; б) 2; в) 1; г) −1; д) −3.
10. Пусть в арифметической прогрессии $a_1 = -3, d = 5$. Найдите $S_{15} - S_{14}$.	
11. В арифметической прогрессии $a_7 = 9$. Найдите значение выражения $20d$, где d — значение разности арифметической прогрессии, при котором произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot a_7$ принимает наименьшее значение.	
12. Крайние члены арифметической прогрессии, имеющей семь членов, равны 11 и 35. Найдите, сколько членов имеет другая убывающая арифметическая прогрессия, крайние члены которой 38 и 13, если четвертые члены обеих прогрессий одинаковы.	
13. Цена товара снижалась несколько раз на одно и то же число рублей. После третьего снижения товар стоил 2460 р., а после одиннадцатого снижения —1980 р. Найдите, после скольких снижений цена товара составит 50 % первоначальной цены.	
14. Арифметическая прогрессия содержит 8 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 28, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 16. Найдите первый член прогрессии.	
15. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Найдите восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем.	

Тест 6. Геометрическая прогрессия

Условия	Варианты ответов
1. Выберите число, которое не может являться членом геометрической прогрессии: 1) 3; 2) 1; 3) $-\sqrt{2}$; 4) 0; 5) −1.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Продолжение

Условия	Варианты ответов
2. Даны три последовательных члена геометрической прогрессии: 7; x; 63. Найдите x, если $x < 0$.	а) −9; б) −21; в) −18; г) −27; д) −42.
3. Найдите второй член геометрической прогрессии, если ее первый член равен $\frac{1}{8}$, а восьмой член равен $\frac{1}{1024}$.	а) $\frac{1}{4}$; б) 4; в) $\frac{1}{16}$; г) 16; д) $\frac{1}{2}$.
4. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена $b_n = 3 \cdot 2^n$. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.	а) 186; б) 234; в) 148; г) 236; д) 214.
5. Найдите номер члена геометрической прогрессии 0,1; 0,3; ..., равного 218,7.	а) 5; б) 8; в) 7; г) 6; д) 9.
6. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_{43} \cdot b_{36} = 57$. Найдите значение выражения $b_{33} \cdot b_{46}$.	а) 114; б) 26,5; в) 19; г) 76; д) 57.
7. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма членов этой прогрессии равна 12,6, а отношение 20-го члена к 17-му равно $-\frac{8}{125}$.	а) 16,2; б) 17,64; в) 15,4; г) 2,51; д) 13.
8. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 - b_5 = 48$; $b_6 + b_5 = 48$.	а) 2; б) −2; в) 0,5; г) −0,5; д) 3.
9. В равносторонний треугольник со стороной 8 вписан другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон первого треугольника. Во второй треугольник таким же образом вписан третий треугольник и т. д. Найдите периметр восьмого треугольника.	а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{32}$; в) $\frac{3}{48}$; г) $\frac{3}{16}$; д) $\frac{3}{8}$.

Продолжение

Условия	Варианты ответов
10. В геометрической прогрессии $S_n = \frac{6 \cdot (2^n - 1)}{5}$. Найдите значение выражения $5b_5$, где b_5 — пятый член этой прогрессии.	
11. Сумма десяти членов геометрической прогрессии равна 64, произведение первого и десятого членов равно 16. Найдите сумму чисел, обратных членам геометрической прогрессии.	
12. Найдите (в градусах) наименьшее положительное значение переменной x, при котором числа $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\cos x}$ в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии.	
13. Найдите значение выражение $30S$, где $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \ldots - \ldots$.	
14. Три числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого последнее число увеличить на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найдите наименьшее из исходных чисел.	
15. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна −3, сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найдите разность арифметической прогрессии.	

Тест 7. Текстовые задачи

Условия	Варианты ответов
1. Банк начисляет по вкладу 14 % годовых. Вкладчик положил на счет 900 р. Сколько денег будет на счету через год? Выберите верное равенство для решения задачи: 1) $900 \cdot 14 = 12\,600$ (р.); 2) $900 + 14 = 914$ (р.); 3) $900 \cdot 0{,}14 = 126$ (р.); 4) $900 \cdot 1{,}14 = 1026$ (р.); 5) $900 \cdot 1{,}4 = 1260$ (р.).	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Продолжение

Условия	Варианты ответов
2. В некотором городе состоялись выборы в городской совет, в которых приняли участие 75 % избирателей. Только 10 % от числа принявших участие в выборах отдали голоса партии зеленых. Найдите, сколько жителей проголосовали за эту партию, если в городе 1 млн избирателей.	а) 100 000; б) 750 000; в) 25 000; г) 75 000; д) 50 000.
3. Некоторое число увеличили на 200 %, а затем полученное число увеличили в 6 раз. Найдите, сколько процентов последнее число составляет от первоначального.	а) 1200 %; б) 1500 %; в) 1800 %; г) 600 %; д) 1000 %.
4. Найдите, на сколько процентов увеличится площадь квадрата, если его периметр увеличить на 10 %.	а) 10 %; б) 100 %; в) 21 %; г) 121 %; д) 50 %.
5. Магазином продано в первый день 50 % поступившего товара, а во второй день — 25 % остатка. Найдите, сколько процентов поступившего товара осталось непроданным.	а) 25 %; б) 75 %; в) 22,5 %; г) 12,5 %; д) 37,5 %.
6. В одном городе Канады 70 % жителей знают французский язык и 80 % — английский язык. Найдите, сколько процентов жителей знают оба языка, если известно, что каждый житель города знает, по крайней мере, один из этих языков.	а) 50 %; б) 10 %; в) 20 %; г) 75 %; д) 40 %.
7. Сосна на 25 % выше ели. Если каждое дерево подрастет на 1,8 м, то сосна будет на 10 % выше ели. Найдите (в метрах) первоначальную высоту ели.	а) 1; б) 1,2; в) 0,8; г) 2,2; д) 1,5.
8. Цена товара сначала увеличилась на 10 %, а затем уменьшилась на 25 % по сравнению с увеличенной ценой. В результате товар подешевел на 7 р. Найдите (в рублях), сколько стоил товар первоначально.	а) 10; б) 40; в) 20; г) 25; д) 50.

Продолжение

Условия	Варианты ответов
9. Два предмета в сумме стоят 40 р. Если стоимость первого уменьшить на 10 %, а второго — на 40 %, то вместе они будут стоить 33 р. Найдите (в рублях) положительную разность между стоимостью предметов до изменения цен.	а) 10; б) 17; в) 20; г) 22; д) 26.
10. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года стал ежемесячно выпускать 726 изделий.	
11. Найдите, какое наименьшее число работников может работать в фирме, если известно, что мужчины составляют в ней меньше 50 %, но больше 40 %.	
12. Для перевозки 90 т груза требуется некоторое количество одинаковых грузовиков. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,75 т груза меньше, дополнительно потребовалось еще 4 грузовика. Найдите, на сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой.	
13. Имеется два сплава. Один содержит 2,8 кг золота и 1,2 кг примесей, другой — 2,7 кг золота и 0,3 кг примесей. Отрезав по куску от каждого сплава и сплавив их, получили 2 кг сплава с содержанием золота 85 %. Найдите, сколько граммов металла отрезали от второго куска.	
14. На велотреке, имеющем форму окружности, из диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста со скоростями 775 $\frac{\text{м}}{\text{мин}}$ и 800 $\frac{\text{м}}{\text{мин}}$ соответственно. Найдите, сколько полных кругов проедет первый велосипедист к моменту, когда его догонит второй, если длина велотрека равна четверти километра.	
15. В коробке находятся красные и синие шары, причем синие шары составляют 1 % от общего числа шаров. После того как из коробки взяли часть красных шаров, доля синих от общего числа оставшихся в коробке шаров составила 2 %. Найдите, во сколько раз первоначальное число шаров больше числа взятых красных шаров.	

Ответы к тематическим тестам

Тест 1

1. в). **2.** г). **3.** в). **4.** в). **5.** г). **6.** а). **7.** д). **8.** г). **9.** а). **10.** 19. **11.** 835. **12.** 18 900. **13.** 120. **14.** 4. **15.** 448.

Тест 2

1. в). **2.** д). **3.** г). **4.** г). **5.** а). **6.** в). **7.** в). **8.** в). **9.** д). **10.** 2. **11.** 441. **12.** 63. **13.** −14. **14.** 1. **15.** 45.

Тест 3

1. в). **2.** г). **3.** д). **4.** б). **5.** в). **6.** г). **7.** в). **8.** д). **9.** в). **10.** −6. **11.** 5. **12.** −8. **13.** 4. **14.** 13. **15.** 4.

Тест 4

1. г). **2.** в). **3.** а). **4.** д). **5.** д). **6.** г). **7.** б). **8.** г). **9.** д). **10.** 36. **11.** 20. **12.** 7. **13.** −1. **14.** −2. **15.** 6.

Тест 5

1. г). **2.** в). **3.** а). **4.** а). **5.** г). **6.** г). **7.** д). **8.** в). **9.** д). **10.** 67. **11.** 33. **12.** 6. **13.** 22. **14.** −5. **15.** 24.

Тест 6

1. г). **2.** б). **3.** в). **4.** а). **5.** б). **6.** д). **7.** б). **8.** а). **9.** г). **10.** 96. **11.** 4. **12.** 45°. **13.** 5. **14.** 4. **15.** 2.

Тест 7

1. г). **2.** г). **3.** в). **4.** в). **5.** д). **6.** а). **7.** б). **8.** б). **9.** в). **10.** 10. **11.** 7. **12.** 20. **13.** 1500. **14.** 15. **15.** 2.

Рекомендации по выполнению тематических тестов

Тест 1

1. Числа 0,(12); −0,5; 0,8; −4; 0,2(52) являются рациональными, так как их можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Таким образом, пара чисел $\sqrt{3}$ и π состоит только из иррациональных чисел.

2. $547{,}698 \approx 547{,}70$.

Нуль в разряде сотых показывает, до какого разряда выполнено округление.

3. Несократимую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби в том случае, если знаменатель этой дроби не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5. Разложим знаменатели каждой дроби на простые множители.

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$; $\quad 32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $\quad 15 = 3 \cdot 5$;

$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$; $\quad 160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

Знаменатель дроби $\frac{2}{15}$ содержит множители, отличные от 2 и 5, значит, эту дробь нельзя представить в виде конечной десятичной дроби.

4. Разложим число 2184 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 2184 & 2 \\ 1092 & 2 \\ 546 & 2 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Наибольшим простым двузначным делителем данного числа является число 13.

5. Наименьшим двузначным простым числом является число 11, а наибольшим простым числом пятого десятка является число 47. Сумма этих чисел равна 58.

6. Искомое число является произведением чисел 9, 8, 7 и 5.

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520.$$

Так как полученное число кратно 9, то оно кратно и 3.

Так как 2520 кратно 8, то оно кратно и 4, и 2.

Поскольку полученное число делится и на 9, и на 8, то оно делится и на 6.

7. Пусть x — первое число, а y — второе. По условию задачи $\frac{2}{3}x = \frac{5}{6}y$, тогда $\frac{x}{y} = \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$; $\frac{x}{y} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}$; $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$, т. е. $x : y = 5 : 4$.

8. 1) Переведем бесконечную периодическую дробь 3,(6) в обыкновенную.

Пусть $3,(6) = x$, тогда $36,(6) = 10x$. Вычтем из второго равенства первое и получим $36,(6) - 3,(6) = 10x - x$; $33 = 9x$; $x = 3\frac{2}{3}$.

2) $\left(4\frac{2}{3} \cdot 3,5 - 3\frac{1}{2} \cdot 3,(6)\right) : 0,014 = \left(4\frac{2}{3} \cdot 3,5 - 3,5 \cdot 3\frac{2}{3}\right) : 0,014 =$

$= 3,5 \cdot \left(4\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3}\right) : 0,014 = 3,5 \cdot 1 : 0,014 = 3,5 : 0,014 = \frac{3,5}{0,014} = \frac{3500}{14} = 250.$

9. Пусть x — исходное число. После того как исходное число увеличили на 60 %, получили число $(1,6x)$. Выясним, на сколько процентов необходимо уменьшить $(1,6x)$, чтобы получить x:

$$\frac{1,6x - x}{1,6x} \cdot 100\,\% = \frac{0,6x}{1,6x} : 100\,\% = \frac{6}{16} \cdot 100\,\% = 37,5\,\%.$$

10. Разложим числа 475, 570 и 741 на простые множители и найдем $\text{НОД}(475; 570; 741)$.

475	5	570	5	741	3
95	5	114	2	247	13
19	19	57	3	19	19
1		19	19	1	
		1			

$\text{НОД}(475; 570; 741) = 19.$

11. Искомое число можно представить в виде $x = 43 \cdot 19 + r$, где r — остаток. Наибольший возможный остаток при делении на 19 равен 18, т. е. искомое число $x = 43 \cdot 19 + 18 = 835$.

12. Если $a = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$; $b = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $c = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, то

$$\text{НОК}(a; b; c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900.$$

13. Числа $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$ являются числами, обратными числам $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$ и $\frac{8}{3}$ соответственно.

Тогда $\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}x+\frac{2}{5}x+\frac{3}{8}x=968.$

Умножим обе части полученного уравнения на 40 и получим $60x+30x+16x+15x=968\cdot40;\ 121x=968\cdot40;\ x=\frac{968\cdot40}{121};\ x=320.$

Найдем наименьшую из частей, на которые разделили число 968: $\frac{3}{8}\cdot320=120.$

14. Выясним, через сколько минут после встречи автобусы трех маршрутов одновременно окажутся на станции, для этого найдем $\text{НОК}(10;15;18)=90.$ Таким образом, автобусы трех маршрутов будут одновременно оказываться на станции каждые 90 минут.

Известно, что одна из встреч произошла в 10 ч 25 мин.

Период времени с 7 ч 10 мин до 10 ч 25 мин равен 195 минутам, а с 10 ч 25 мин до 12 ч 10 мин равен 105 минутам. Значит, с 7 ч 10 мин до 10 ч 25 мин автобусы встретились дважды, а с 10 ч 25 мин до 12 ч 10 мин еще один раз. Таким образом, в указанный промежуток времени произошло четыре встречи.

15. $\left|\left|223^2+3\right|-\left|1-224^2\right|-\left|-5\right|\right|=\left|223^2+3-\left(224^2-1\right)-5\right|=$

$=\left|223^2+3-224^2+1-5\right|=\left|223^2-224^2-1\right|=$

$=\left|(223-224)(223+224)-1\right|=\left|-1\cdot447-1\right|=\left|-448\right|=448.$

Тест 2

1. $2(t-s)=-2(s-t)=-2\cdot(-5{,}2)=10{,}4.$

2. $\left(0{,}21a^{n+1}c^7y^9\right):\left(7a^nc^7y^7\right)=0{,}03\cdot a^{n+1-n}c^{7-7}y^{9-7}=0{,}03\cdot a^1c^0y^2=$

$=0{,}03\cdot ay^2.$

3. $\frac{3x-9}{x-2}-\frac{x-5}{x-2}=\frac{3x-9-(x-5)}{x-2}=\frac{3x-9-x+5}{x-2}=\frac{2x-4}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-2}=2.$

4. $\frac{15a}{5-a}+\frac{6a}{a^2-25}\cdot\frac{7a+35}{3}=\frac{15a}{5-a}+\frac{6a\cdot7(a+5)}{3(a+5)(a-5)}=\frac{15a}{5-a}+\frac{14a}{a-5}=$

$=\frac{15a}{5-a}-\frac{14a}{5-a}=\frac{15a-14a}{5-a}=\frac{a}{5-a}.$

5. $2bc + a^2 - b^2 - c^2 = a^2 - \left(b^2 - 2bc + c^2\right) = a^2 - (b - c)^2 =$

$= (a - b + c)(a + b - c).$

6. $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 3x - 10} = \dfrac{x^2(x+5) - 4(x+5)}{x^2 + 3x - 10} = \dfrac{(x+5)(x^2 - 4)}{x^2 + 3x - 10}.$

По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен в знаменателе дроби:

$$x^2 + 3x - 10 = 0;\ x_1 = -5;\ x_2 = 2.$$

Тогда $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$ и дробь принимает вид

$$\frac{(x+5)(x^2 - 4)}{x^2 + 3x - 10} = \frac{(x+5)(x-2)(x+2)}{(x+5)(x-2)} = x + 2.$$

7. $\left(m - (1 - m)^{-1}\right) \cdot \dfrac{\dfrac{m-2}{m^{-1}} + m^0}{m^2 - m + 1} = \left(m - \dfrac{1}{1 - m}\right) \cdot \dfrac{m(m-2) + 1}{m^2 - m + 1} =$

$= \dfrac{m(1 - m) - 1}{1 - m} \cdot \dfrac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - m + 1} = \dfrac{m - m^2 - 1}{1 - m} \cdot \dfrac{(m-1)^2}{m^2 - m + 1} =$

$= -\dfrac{m^2 - m + 1}{1 - m} \cdot \dfrac{(1 - m)^2}{m^2 - m + 1} = -(1 - m) = m - 1.$

8. $\left(4x^{-4} - x^{-2} + 6x^{-1} - 9\right) : \left(2x^{-4} + x^{-3} - 3x^{-2}\right) = \dfrac{4x^{-4} - x^{-2} + 6x^{-1} - 9}{2x^{-4} + x^{-3} - 3x^{-2}} =$

$= \dfrac{4x^{-4} - \left(x^{-2} - 6x^{-1} + 9\right)}{x^{-2}\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)} = \dfrac{4x^{-4} - \left(x^{-1} - 3\right)^2}{x^{-2}\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)} =$

$= \dfrac{\left(2x^{-2} - x^{-1} + 3\right)\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)}{x^{-2}\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)} = \dfrac{2x^{-2} - x^{-1} + 3}{x^{-2}} = 3x^2 - x + 2.$

9. $A = \left(x^2 + x + 1\right)^2 + 3x\left(x^2 + x + 1\right) - 18x^2.$

Пусть $x^2 + x + 1 = t$, тогда $A = t^2 + 3xt - 18x^2$. Рассмотрим полученное выражение как квадратный трехчлен относительно t и разложим его на множители:

$$A = t^2 + 3xt - 18x^2 = (t + 6x)(t - 3x)\Big|_{t = x^2 + x + 1} =$$

$$= \left(x^2 + x + 1 + 6x\right)\left(x^2 + x + 1 - 3x\right) =$$

$$= \left(x^2 + 7x + 1\right)\left(x^2 - 2x + 1\right) = (x-1)^2\left(x^2 + 7x + 1\right).$$

10. Пусть $A = \left(\left(\dfrac{6}{n+1} - \dfrac{5n+30}{n^2+5n+6}\right) : \dfrac{n-2}{n^2+3n+2}\right)^{-1}$.

1) $\dfrac{6}{n+1} - \dfrac{5n+30}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{6(n+2)(n+3) - (5n+30)(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$

$$= \frac{6\left(n^2+5n+6\right) - \left(5n^2+35n+30\right)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^2-5n+6}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

2) $\dfrac{(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} : \dfrac{n-2}{n^2+3n+2} = \dfrac{(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \dfrac{(n+1)(n+2)}{n-2} = \dfrac{n-3}{n+3}.$

3) При $n = 9$ $A = \left(\dfrac{9-3}{9+3}\right)^{-1} = 2.$

11. $\left(\dfrac{y}{xy-x^2} + \dfrac{x}{xy-y^2}\right) : \dfrac{x^2+2xy+y^2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = \left(\dfrac{y}{x(y-x)} + \dfrac{x}{y(x-y)}\right) : \dfrac{x^2+2xy+y^2}{\dfrac{y+x}{xy}} =$

$$= \left(\frac{y}{x(y-x)} - \frac{x}{y(y-x)}\right) \cdot \frac{\dfrac{y+x}{xy}}{x^2+2xy+y^2} = \frac{y^2-x^2}{xy(y-x)} \cdot \frac{y+x}{xy} : \left(x^2+2xy+y^2\right) =$$

$$= \frac{(y-x)(y+x)}{xy(y-x)} \cdot \frac{y+x}{xy\cdot(y+x)^2} = \frac{(y+x)}{xy} \cdot \frac{1}{xy\cdot(y+x)} = \frac{1}{x^2y^2}\Bigg|_{x=-\frac{1}{7};\ y=\frac{1}{3}} = 49\cdot 9 = 441.$$

12. Возведем обе части равенства $4x - 3x^{-1} = -6$ в квадрат:

$$\left(4x - 3x^{-1}\right)^2 = 36;\ 16x^2 + 9x^{-2} - 2\cdot 4x\cdot 3x^{-1} = 36;$$

$$16x^2 + 9x^{-2} - 24 = 36;\ 16x^2 + 9x^{-2} = 60,$$

тогда $16x^2 + 9x^{-2} + 3 = 60 + 3 = 63$.

13. Выделим полные квадраты в выражении

$$8x^2 + 2y^2 - 4xy + 4x + 2y - 12 =$$

$$= 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x^2 + 4x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 14 =$$

$$= (2x-y)^2 + (2x+1)^2 + (y+1)^2 - 14.$$

Поскольку $(2x-y)^2 \geqslant 0$; $(2x+1)^2 \geqslant 0$; $(y+1)^2 \geqslant 0$ при любых действительных значениях x и y (равенство нулю достигается при $x=-\frac{1}{2}$, $y=-1$), то $(2x-y)^2+(2x+1)^2+(y+1)^2-14 \geqslant -14$.

Таким образом, наименьшим значением данного выражения является число -14.

14. $$\left(3ab^{-1}-\frac{ba^{-1}}{3}\right):\left(3ab^{-1}+\frac{ba^{-1}}{3}+0{,}5^{-1}\right):\left(\left(1-\frac{ba^{-1}}{3}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=$$

$$=\left(\frac{3a}{b}-\frac{b}{3a}\right):\left(\frac{3a}{b}+\frac{b}{3a}+2\right):\left(\left(1-\frac{b}{3a}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=$$

$$=\frac{9a^2-b^2}{3ab}:\left(\frac{9a^2+b^2+6ab}{3ab}\right):\left(\frac{3a-b}{3a}\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=$$

$$=\frac{(3a-b)(3a+b)}{3ab}\cdot\frac{3ab}{(3a+b)^2}:\left(\frac{3a-b}{3a+b}\right)=\frac{3a-b}{3a+b}\cdot\frac{3a+b}{3a-b}=1.$$

15. Заметим, что $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$; $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ и т. д.

Тогда исходное выражение принимает вид

$$A=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)}.$$

Найдем значение выражения $16A$ при $x=0{,}(3)$:

$$16\cdot\frac{5}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+5\right)}=16\cdot\frac{5}{\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3}}=16\cdot\frac{45}{16}=45.$$

Тест 3

1. Неверным является утверждение 3), поскольку линейное уравнение может иметь единственный корень, может иметь бесконечно много корней или не иметь корней.

2. Уравнение $x^2+5=0$ не имеет корней. Уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными.

Из предложенных в вариантах ответов уравнений не имеют корней уравнения $\frac{3}{x-6}=0$; $x^2-7x+13=0$; $|x-2|+9=8$ и $5x-12=3(x+4)+2x$.

Корнем уравнения $\frac{x}{8}=0$ является число 0.

Таким образом, уравнение $\frac{x}{8}=0$ не равносильно уравнению $x^2+5=0$.

3. $0{,}2\left(1{,}5x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{15}=0{,}3x$; $0{,}3x-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=0{,}3x$; $0{,}3x-0{,}3x=\frac{1}{15}-\frac{1}{15}$; $0\cdot x=0$; $x\in\boldsymbol{R}$.

4. $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$; $\frac{1}{2-x}-1-\frac{1}{x-2}+\frac{6-x}{3x^2-12}=0$;

$\frac{1}{2-x}-1+\frac{1}{2-x}+\frac{6-x}{3(x-2)(x+2)}=0$; $\frac{2}{2-x}-1-\frac{6-x}{3(2-x)(x+2)}=0$;

$\frac{6(x+2)-3(2-x)(x+2)-(6-x)}{3(2-x)(x+2)}=0$; $\frac{6x+12-12+3x^2-6+x}{3(2-x)(x+2)}=0$;

$\frac{3x^2+7x-6}{3(2-x)(x+2)}=0$; $\begin{cases}3x^2+7x-6=0,\\ x\neq-2;\ 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3},\\ x=-3,\end{array}\right.\\ x\neq-2;\ 2;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3},\\ x=-3.\end{array}\right.$

5. Квадратное уравнение $3x^2+5x-1=0$ имеет корни, так как $D>0$, тогда $x_1+x_2=-\frac{5}{3}$; $x_1x_2=-\frac{1}{3}$.

Найдем значение искомого выражения:

$$x_1^2x_2^4+x_1^4x_2^2=x_1^2x_2^2\left(x_2^2+x_1^2\right)=\left(x_1x_2\right)^2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{25}{9}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{31}{9}=\frac{31}{81}.$$

6. $\frac{x+3}{4x^2-9}+\frac{x-3}{4x^2+12x+9}+\frac{4}{6-4x}=0$; $\frac{x+3}{(2x-3)(2x+3)}+\frac{x-3}{(2x+3)^2}-\frac{4}{2(2x-3)}=0$;

$\frac{x+3}{(2x-3)(2x+3)}+\frac{x-3}{(2x+3)^2}-\frac{2}{2x-3}=0$; $\frac{(x+3)(2x+3)+(x-3)(2x-3)-2(2x+3)^2}{(2x-3)(2x+3)^2}=0$;

$\frac{2x^2+3x+6x+9+2x^2-3x-6x+9-8x^2-24x-18}{(2x-3)(2x+3)^2}=0$; $\frac{-4x^2-24x}{(2x-3)(2x+3)^2}=0$;

$$\begin{cases} x^2+6x=0, \\ x \neq -1{,}5;\, 1{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-6, \end{array}\right. \\ x \neq -1{,}5;\, 1{,}5; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-6. \end{array}\right.$$

Среднее арифметическое корней данного уравнения равно $\frac{-6+0}{2}=-3.$

7. Уравнение $(6x-14)^9=(x-1)^{18}$ равносильно уравнению

$$6x-14=(x-1)^2.$$

$x^2-2x+1-6x+14=0;\ x^2-8x+15=0.$ Полученное уравнение имеет корни $(D>0)$. Воспользуемся теоремой Виета и получим сумму корней уравнения, равную 8.

8. $\frac{x^2-4}{x^2-9}=\frac{x^2}{7};\ 7\left(x^2-4\right)=x^2\left(x^2-9\right)$ при $x \neq \pm 3;\ x^4-9x^2-7x^2+28=0;$ $x^4-16x^2+28=0.$

Пусть $x^2=t$, тогда уравнение принимает вид $t^2-16t+28=0;\ \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=14. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} x^2=2, \\ x^2=14; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2}, \\ x=\pm\sqrt{14}. \end{array}\right.$

Произведение корней исходного уравнения равно

$$-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{14}\right)\cdot\sqrt{14}=28.$$

9. $\frac{1}{3x-2-x^2}=\frac{3}{7x-4-3x^2};\quad \begin{cases} 7x-4-3x^2=3\left(3x-2-x^2\right), \\ 7x-4-3x^2 \neq 0, \\ 3x-2-x^2 \neq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x-4-3x^2=9x-6-3x^2, \\ 3x^2-7x+4 \neq 0, \\ x^2-3x+2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ x \neq 1;\, 1\frac{1}{3}, \\ x \neq 1;\, 2; \end{cases} \qquad x \in \varnothing.$$

Уравнение не имеет корней.

10. Пусть $3x + x^2 = t$, тогда уравнение принимает вид $t = \left(\frac{t}{2}\right)^2$; $t^2 - 4t = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 4. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x = 0, \\ x^2 + 3x = 4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x(x+3) = 0, \\ x^2 + 3x - 4 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3, \\ x = -4, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Сумма корней уравнения равна -6.

11. $(x^2 - 2x + 6)^2 = 9x^2$; $(x^2 - 2x + 6)^2 - 9x^2 = 0$;

$(x^2 - 2x + 6 - 3x)(x^2 - 2x + 6 + 3x) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x^2 + x + 6 = 0. \end{array}\right.$ Второе уравнение совокупности не имеет корней $(D < 0)$.

Сумма корней исходного уравнения равна 5.

12. $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$; $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55$.

Пусть $x^2 + 2x = t$, тогда уравнение принимает вид $t^2 - (t+1) = 55$; $t^2 - t - 56 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -7, \\ t = 8. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = -7, \\ x^2 + 2x = 8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 7 = 0, \\ x^2 + 2x - 8 = 0. \end{array}\right.$ Первое уравнение совокупности не имеет корней. Произведение корней второго уравнения равно -8.

13. По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен в числителе дроби.

$$5x^2 - 4x - 1 = 0;\ D = 16 + 20 = 36;$$
$$x_1 = \frac{4-6}{10} = -\frac{1}{5};\ x_2 = \frac{4+6}{10} = 1.$$

Тогда $5x^2 - 4x - 1 = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x-1) = (5x+1)(x-1)$ и исходное уравнение принимает вид $\frac{(5x+1)(x-1)}{x-1} = x^2 + 5$. Решим полученное уравнение: $\begin{cases} 5x + 1 = x^2 + 5, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \neq 1; \end{cases}$ $x = 4$.

14. $\dfrac{3x^2+11x+6}{8+10x-3x^2}=\dfrac{x+3}{4-x}$; $\dfrac{3x^2+11x+6}{3x^2-10x-8}=\dfrac{x+3}{x-4}$.

По формуле $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе дроби и получим:

$$\frac{3(x+3)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{x+3}{x-4};\quad \begin{cases}\dfrac{x+3}{x-4}=\dfrac{x+3}{x-4},\\ x\neq-\dfrac{2}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}x\in \boldsymbol{R},\\ x\neq4,\\ x\neq-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Корнями уравнения являются все действительные числа, кроме чисел $-\frac{2}{3}$ и 4.

Промежутку $[2;\,15]$ принадлежат 13 целых корней уравнения.

15. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=2x-\dfrac{1}{4x-8}$;

$$\frac{x(x-1)+1}{x-1}+\frac{x(x-3)+1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8};$$

$$x+\frac{1}{x-1}+x+\frac{1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8};$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{4x-8};\quad \frac{x-3+x-1}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4x-8};$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4x-8};\quad \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4(x-2)};$$

$$\begin{cases}8(x-2)^2=-(x-1)(x-3),\\ x\neq1;\,2;\,3;\end{cases}\quad \begin{cases}9x^2-36x+35=0,\\ x\neq1;\,2;\,3.\end{cases}$$

Решим уравнение $9x^2-36x+35=0$; $9x^2-36x+36-1=0$;

$(3x-6)^2-1=0$; $(3x-6)^2=1$; $\left[\begin{array}{l}3x-6=1,\\ 3x-6=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2\frac{1}{3},\\ x=1\frac{2}{3}.\end{array}\right.$ Полученные числа удовлетворяют условию $x\neq1;\,2;\,3$.

Таким образом, сумма корней уравнения равна $2\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}=4$.

Тест 4

1. Неравенства называются равносильными, если множества их решений совпадают. Если неравенства не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Решением неравенства $5x \leqslant 1$ является промежуток $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$.

Найдем решения предложенных неравенств:

1) $5x^2 \leqslant x;\ 5x^2 - x \leqslant 0;\ x(5x-1) \leqslant 0;\ x \in \left[0; \frac{1}{5}\right];$

2) $5x + \frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{x} + 1;\ \begin{cases} 5x \leqslant 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{5}, \\ x \neq 0; \end{cases} x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right];$

3) $x \leqslant 1{,}5;\ x \in (-\infty; 1{,}5];$

4) $x - 0{,}2 \leqslant 0;\ x \leqslant 0{,}2;\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right];$

5) $\frac{5x}{x-3} \leqslant \frac{1}{x-3};\ \frac{5x-1}{x-3} \leqslant 0;\ x \in \left[\frac{1}{5}; 3\right).$

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству

$$x - 0{,}2 \leqslant 0.$$

2. Решим предложенные неравенства:

1) $3x - 2(x+1) \leqslant 2 + x;\ 3x - 2x - 2 \leqslant 2 + x;\ 0 \cdot x \leqslant 4;\ x \in \boldsymbol{R};$

2) $-3x \geqslant 0;\ x \leqslant 0;\ x \in (-\infty; 0];$

3) $3x - 2(x+1) \leqslant x - 5;\ 3x - 2x - 2 \leqslant x - 5;\ 0 \cdot x \leqslant -3;$ нет решений;

4) $3x \leqslant -2 + x;\ 2x \leqslant -2;\ x \leqslant -1;\ x \in (-\infty; -1];$

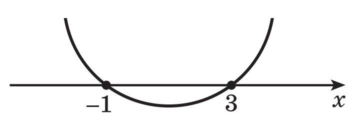
5) $3x \leqslant x;\ 2x \leqslant 0;\ x \in (-\infty; 0].$

3. Умножим обе части неравенства $\frac{7x-2}{3} \leqslant 3 - \frac{1-x}{2} - \frac{2x-7}{6}$ на 6 и получим: $2(7x-2) \leqslant 18 - 3(1-x) - (2x-7);\ 14x - 4 \leqslant 18 - 3 + 3x - 2x + 7;$ $13x \leqslant 26;\ x \leqslant 2;\ x \in (-\infty; 2].$

4. Умножим обе части неравенства $0{,}5x^2 - x - 1{,}5 \leqslant 0$ на 2 и получим неравенство $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

Решим его:

$x^2 - 2x - 3 \leqslant 0;\ x_1 = -1;\ x_2 = 3.$



$x \in [-1; 3].$

Неравенство имеет пять целых решений.

5. $\begin{cases} \dfrac{x+12}{5}+\dfrac{9+x}{6} \geqslant x+2, \\ \dfrac{x+5}{2}+\dfrac{15-x}{7} < x; \end{cases}$ $\begin{cases} 6(x+12)+5(9+x) \geqslant 30(x+2), \\ 7(x+5)+2(15-x) < 14x; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+72+45+5x \geqslant 30x+60, \\ 7x+35+30-2x < 14x; \end{cases}$ $\begin{cases} -19x \geqslant -57, \\ -9x < -65; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x > 7\frac{2}{9}; \end{cases}$ $x \in \varnothing$.

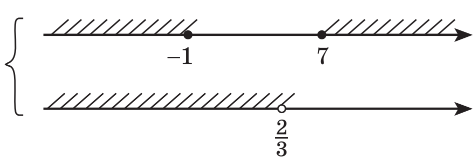
6. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \leqslant 2;$ $\dfrac{1}{\frac{x+1}{x}} \leqslant 2;$ $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \leqslant 2, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}-2 \leqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-2(x+1)}{x+1} \leqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{-x-2}{x+1} \leqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} \geqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup (-1; +\infty), \\ x \neq 0; \end{cases}$

$x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

7. Область определения функции $f(x)=\sqrt{x^2-6x-7}-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$ совпадает с множеством решений системы неравенств:

$\begin{cases} x^2-6x-7 \geqslant 0, \\ 2-3x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-7)(x+1) \geqslant 0, \\ x < \frac{2}{3}; \end{cases}$



$x \in (-\infty; -1]$.

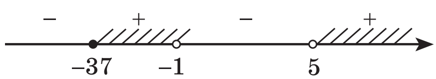
8. График функции $y=x^4+x^2-6$ расположен выше оси абсцисс при $x^4+x^2-6>0$. Пусть $x^2=t$, тогда неравенство принимает вид $t^2+t-6>0$; $(t+3)(t-2)>0$, т. е. $(x^2+3)(x^2-2)>0$. Так как $x^2+3>0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, то $x^2-2>0$; $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})>0$; $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

9. Двойное неравенство $-3 \leqslant 1 - 3x - x^2 < \frac{13}{4}$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} 1 - 3x - x^2 < \frac{13}{4}, \\ 1 - 3x - x^2 \geqslant -3; \end{cases}$ $\begin{cases} 4 - 12x - 4x^2 < 13, \\ 4 - 3x - x^2 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2 + 12x + 9 > 0, \\ x^2 + 3x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (2x+3)^2 > 0, \\ (x+4)(x-1) \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -1{,}5, \\ x \in [-4;\ 1]; \end{cases}$ $x \in [-4; -1{,}5) \cup (-1{,}5; 1]$.

10. $\frac{3x^2 - 11x + 22}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 3;$ $\frac{3x^2 - 11x + 22 - 3(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0;$ $\frac{x + 37}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0;$

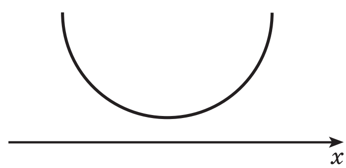
$\frac{x+37}{(x-5)(x+1)} \geqslant 0$. Воспользуемся методом интервалов:



$x \in [-37; -1) \cup (5; +\infty)$.

Неравенство имеет 36 целых отрицательных решений.

11. График функции $y = (x+2)^2$ расположен ниже графика функции $y = 2x(x+3) + 7$, если $(x+2)^2 < 2x(x+3) + 7;$ $x^2 + 4x + 4 < 2x^2 + 6x + 7;$ $x^2 + 2x + 3 > 0;$ $D = 4 - 12 < 0$.



$x \in \boldsymbol{R}$.

Таким образом, график функции $y = (x+2)^2$ расположен ниже графика функции $y = 2x(x+3) + 7$ при любых значениях аргумента. Значит, на промежутке $[-18; 1]$ расположено 20 целых чисел, удовлетворяющих условию задачи.

12. Если $2{,}5 \leqslant a \leqslant 4$, то $5 \leqslant 2a \leqslant 8$.

Так как $3 \leqslant b < 8$, то $1 \leqslant \frac{b}{3} < \frac{8}{3}$, тогда $-1 \geqslant -\frac{b}{3} > -\frac{8}{3}$; $-2\frac{2}{3} < -\frac{b}{3} \leqslant -1$.

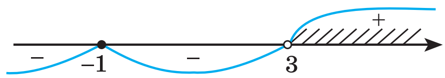
Сложим полученные неравенства:

$$\begin{array}{r} 5 \leqslant 2a \leqslant 8 \\ + \quad -2\frac{2}{3} < -\frac{b}{3} \leqslant -1 \\ \hline 2\frac{1}{3} < 2a - \frac{b}{3} \leqslant 7. \end{array}$$

Наибольшее значение выражения $2a - \frac{b}{3}$ равно 7.

13. $\dfrac{(x^2+2x+1)(x^2-6x+9)}{x-3} \geqslant 0;$ $\dfrac{(x+1)^2(x-3)^2}{x-3} \geqslant 0.$

Воспользуемся методом интервалов:



$x \in \{-1\} \cup (3;\ +\infty).$

Наименьшим целым решением неравенства является число -1.

14. Запишем неравенство $(0{,}3x^2+0{,}5x-5)^2 \leqslant (0{,}3x^2+0{,}5x+5)^2$ в виде $(0{,}3x^2+0{,}5x-5)^2-(0{,}3x^2+0{,}5x+5)^2 \leqslant 0$ и воспользуемся формулой разности квадратов

$(0{,}3x^2+0{,}5x-5-(0{,}3x^2+0{,}5x+5))(0{,}3x^2+0{,}5x-5+(0{,}3x^2+0{,}5x+5)) \leqslant 0;$

$(0{,}3x^2+0{,}5x-5-0{,}3x^2-0{,}5x-5)(0{,}3x^2+0{,}5x-5+0{,}3x^2+0{,}5x+5) \leqslant 0;$

$$-10(0{,}6x^2+x) \leqslant 0;\ \ 0{,}6x^2+x \geqslant 0;\ \ x(0{,}6x+1) \geqslant 0;$$

$$x \in \left(-\infty;\ -1\frac{2}{3}\right] \cup [0;\ +\infty).$$

Наибольшим целым отрицательным решением неравенства является число -2.

15. $(x^2-4x)^2+8(x-2)^2 \leqslant 17;$ $(x^2-4x)^2+8(x^2-4x+4) \leqslant 17.$

Пусть $x^2-4x=t$, тогда неравенство принимает вид $t^2+8(t+4) \leqslant 17;$ $t^2+8t+15 \leqslant 0;$ $(t+3)(t+5) \leqslant 0.$ Так как $t=x^2-4x$, то получим $(x^2-4x+3)(x^2-4x+5) \leqslant 0.$ Поскольку дискриминант квадратного трехчлена x^2-4x+5 отрицательный, а первый коэффициент положительный, то $x^2-4x+5>0$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, $x^2-4x+3 \leqslant 0;$ $(x-1)(x-3) \leqslant 0;$ $x \in [1;\ 3].$

Произведение целых решений неравенства равно $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

Тест 5

1. Арифметической прогрессией является последовательность $0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ \ldots;\ .$

2. Выясним, в какой из арифметических прогрессий есть $a_n=-10.$

1) $-10=2n+10;$ $2n=-20;$ $n=-10.$ Так как -10 не является натуральным числом, то среди членов данной прогрессии нет числа -10.

2) $-10=-3n;$ $n=\dfrac{10}{3} \notin \boldsymbol{N};$

3) $-10 = -3n + 2$; $3n = 12$; $n = 4$ — натуральное число, значит, число -10 является четвертым членом данной прогрессии.

4) $-10 = -4n - 8$; $4n = 2$; $n = \frac{1}{2} \notin \boldsymbol{N}$;

5) $-10 = -2n + 11$; $2n = 21$; $n = \frac{21}{2} \notin \boldsymbol{N}$.

3. Так как $a_7 = 21$, $a_9 = 29$, то $d = \frac{a_9 - a_7}{2} = \frac{29 - 21}{2} = 4$.

Тогда $a_1 = a_7 - 6d = 21 - 24 = -3$.

4. Рассмотрим последовательность 4, 7, 10, ..., 100 как арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 4$; $d = 3$; $a_n = 100$. По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ найдем количество членов этой прогрессии: $100 = 4 + 3(n - 1)$; $96 = 3(n - 1)$; $n - 1 = 32$; $n = 33$. Тогда сумма членов данной прогрессии равна $S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{4 + 100}{2} \cdot 33 = 52 \cdot 33$.

Найдем среднее арифметическое данных чисел: $\frac{S_{33}}{33} = \frac{52 \cdot 33}{33} = 52$.

5. Составим формулу n-го члена данной арифметической прогрессии.

Так как $a_1 = 92$; $d = -4$, то $a_n = 92 - 4(n - 1)$; $a_n = 96 - 4n$.

Решим неравенство $96 - 4n > -1$; $-4n > -97$; $n < 24{,}25$.

Данная прогрессия содержит 24 члена, больших -1.

6. Пусть n — искомое число. Тогда сумма $(n - 1)$ предшествующих ему натуральных чисел равна $S_{n-1} = \frac{1 + n - 1}{2} \cdot (n - 1) = \frac{n}{2} \cdot (n - 1)$.

Поскольку число n равно $\frac{1}{21}$ суммы предшествующих ему натуральных чисел, то составим уравнение $n = \frac{1}{21} \cdot S_{n-1}$; $n = \frac{1}{21} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n - 1)$; $42n = n(n - 1)$; $n = 43$.

7. Так как $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$, то

$a_1 + 5d + a_1 + 8d + a_1 + 11d + a_1 + 14d = 20$; $4a_1 + 38d = 20$; $2a_1 + 19d = 10$.

Найдем $S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = \frac{10}{2} \cdot 20 = 100$.

8. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 66$, $a_2 \cdot a_3 = 528$.

Составим систему уравнений и найдем a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 66, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 528; \end{cases} \begin{cases} a_1 + d = 22, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 528; \end{cases} \begin{cases} a_1 + d = 22, \\ 22(a_1 + 2d) = 528; \end{cases}$$

$\begin{cases} a_1 + d = 22, \\ a_1 + 2d = 24; \end{cases}$ $\begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 20. \end{cases}$ Тогда $a_n = 20 + 2(n-1)$; $a_n = 2n + 18$.

9. Сумма членов арифметической прогрессии (a_n) выражается формулой $S_n = 2n^2 - 3n$, тогда $S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1$; $S_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 2$, получим $a_1 = S_1 = -1$; $a_2 = S_2 - S_1 = 2 - (-1) = 3$. Таким образом, $\frac{a_2}{a_1} = -3$.

10. $S_{15} - S_{14} = a_{15} = a_1 + 14d = -3 + 14 \cdot 5 = 67$.

11. Выразим a_1 и a_2 через a_7 и d и получим $a_1 \cdot a_2 \cdot a_7 = (a_7 - 6d)(a_7 - 5d)a_7$. Так как $a_7 = 9$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot a_7 = (9 - 6d)(9 - 5d) \cdot 9$. Найдем, при каком значении d полученное выражение принимает наименьшее значение:

$$9 \cdot (9 - 6d)(9 - 5d) = 27 \cdot (3 - 2d)(9 - 5d) =$$
$$= 27 \cdot \left(27 - 15d - 18d + 10d^2\right) = 27 \cdot \left(10d^2 - 33d + 27\right).$$

Квадратичная функция $y = 27 \cdot \left(10d^2 - 33d + 27\right)$ принимает свое наименьшее значение в вершине параболы. Найдем абсциссу вершины параболы $d = \frac{33}{20}$.

Тогда значение искомого выражения равно $20 \cdot \frac{33}{20} = 33$.

12. Пусть (a_n) — первая арифметическая прогрессия, а (b_n) — вторая. Тогда $a_1 = 11$; $a_7 = 35$ и $a_4 = \frac{a_1 + a_7}{2} = \frac{11 + 35}{2} = 23$. По условию задачи четвертые члены обеих прогрессий одинаковы, т. е. $b_4 = 23$. Так как $b_1 = 38$, то $d = \left(b_4 - b_1\right) : 3 = -5$.

Поскольку $b_n = 13$, то по формуле n-го члена арифметической прогрессии найдем количество членов второй прогрессии: $b_n = b_1 + d(n-1)$; $13 = 38 - 5(n-1)$; $n = 6$.

13. Пусть a_1 — первоначальная цена товара, d — количество рублей, на которое цена товара снижалась каждый раз.

Так как после третьего снижения товар стоил 2460 р., а после одиннадцатого снижения — 1980 р., то $a_4 = 2460$, а $a_{12} = 1980$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2460, \\ a_1 + 11d = 1980; \end{cases} \begin{cases} a_1 + 3d = 2460, \\ 8d = -480; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 2640, \\ d = -60. \end{cases}$$

Таким образом, товар первоначально стоил 2640 р. Тогда 50 % от первоначальной стоимости равны 1320 р., т. е. $a_n = 1320$.

Так как $a_n = a_1 + d(n-1)$, то

$$1320 = 2640 - 60(n-1); \ -1320 = -60(n-1); \ n = 23.$$

Таким образом, после 22-го снижения цена товара составит 50 % от первоначальной цены.

14. Так как сумма членов, стоящих на четных местах данной прогрессии, равна 28, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 16, то $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 28$ и $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 16$. Вычтем из первого равенства второе и получим $(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + (a_8 - a_7) = 28 - 16$. Откуда $4d = 12$; $d = 3$.

Так как $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 16$, то $a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d = 16$; $4a_1 + 12d = 16$; $a_1 + 3d = 4$. Так как $d = 3$, то $a_1 = -5$.

15. Известно, что $337 < S_{15} < 393$.

По формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии получим $S_{15} = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15 = 15a_8$.

Откуда $337 < 15a_8 < 393$; $\frac{337}{15} < a_8 < \frac{393}{15}$; $22\frac{7}{15} < a_8 < 26\frac{1}{5}$. Так как прогрессия состоит из натуральных чисел и восьмой член прогрессии кратен четырем, то $a_8 = 24$.

Тест 6

1. Число 0 не может являться членом геометрической прогрессии.

2. По свойству геометрической прогрессии получим $x^2 = 7 \cdot 63$; $x^2 = 7 \cdot 7 \cdot 9$; $x = -21$ или $x = 21$. Так как $x < 0$, то $x = -21$.

3. Найдем знаменатель данной прогрессии:

$$b_8 = b_1 \cdot q^7; \ \frac{1}{1024} = \frac{1}{8} \cdot q^7; \ q^7 = \frac{8}{1024} = \frac{2^3}{2^{10}} = \frac{1}{2^7}; \ q = \frac{1}{2}.$$

Тогда $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

4. Найдем первый член и знаменатель прогрессии:

$b_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$; $b_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии найдем сумму первых пяти членов данной прогрессии:

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}; \quad S_5 = \frac{6 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 6 \cdot 31 = 186.$$

5. Найдем знаменатель прогрессии: $b_1 = 0{,}1$; $b_2 = 0{,}3$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 3$.

Известно, что $b_n = 218{,}7$. По формуле n-го члена геометрической прогрессии получим: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $218{,}7 = 0{,}1 \cdot 3^{n-1}$; $3^{n-1} = 2187$; $3^{n-1} = 3^7$; $n - 1 = 7$; $n = 8$.

6. $b_{43} \cdot b_{36} = b_1 \cdot q^{42} \cdot b_1 \cdot q^{35} = b_1^2 \cdot q^{77}$, т. е. $b_1^2 \cdot q^{77} = 57$.

Тогда $b_{33} \cdot b_{46} = b_1 \cdot q^{32} \cdot b_1 \cdot q^{45} = b_1^2 \cdot q^{77} = 57$.

7. Найдем знаменатель прогрессии: $q^3 = \frac{b_{20}}{b_{17}} = -\frac{8}{125}$; $q = -\frac{2}{5}$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{b_1}{1 - q}$; $b_1 = S(1 - q)$; $b_1 = 12{,}6 \cdot (1 + 0{,}4) = 17{,}64$.

8. Выразим b_7 и b_6 через b_5 и q и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_5 q^2 - b_5 = 48, \\ b_5 q + b_5 = 48; \end{cases} \begin{cases} b_5(q^2 - 1) = 48, \\ b_5(q + 1) = 48; \end{cases} \begin{cases} b_5(q + 1)(q - 1) = 48, \\ b_5(q + 1) = 48; \end{cases} \begin{cases} 48(q - 1) = 48, \\ b_5(q + 1) = 48; \end{cases}$$

$q - 1 = 1$; $q = 2$.

9. Каждый следующий треугольник подобен предыдущему с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{2}$. Их периметры являются членами геометрической прогрессии, первый член которой равен 24, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Найдем периметр восьмого треугольника: $b_8 = b_1 \cdot q^7$; $b_8 = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$; $b_8 = \frac{3}{16}$.

10. $b_5 = S_5 - S_4$; $S_5 = \frac{6 \cdot (2^5 - 1)}{5} = \frac{6 \cdot 31}{5} = \frac{186}{5}$; $S_4 = \frac{6 \cdot (2^4 - 1)}{5} = \frac{6 \cdot 15}{5} = \frac{90}{5}$;

$b_5 = \frac{186}{5} - \frac{90}{5} = \frac{96}{5}$. Значение искомого выражения равно 96.

11. Так как сумма десяти членов геометрической прогрессии равна 64, то $\frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1}=64$. Поскольку произведение первого и десятого членов равно 16, то $b_1 \cdot b_1 \cdot q^9 = 16$; $b_1{}^2 \cdot q^9 = 16$.

Сумма чисел, обратных членам данной геометрической прогрессии, представляет собой сумму десяти первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $\frac{1}{b_1}$, а знаменатель равен $\frac{1}{q}$. Тогда

$$S'_{10}=\frac{\frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{q^{10}}-1\right)}{\frac{1}{q}-1};$$

$$S'_{10}=\frac{\frac{1}{b_1}\cdot\frac{1-q^{10}}{q^{10}}}{\frac{1-q}{q}}=\frac{1}{b_1}\cdot\frac{1-q^{10}}{q^{10}}:\frac{1-q}{q}=\frac{1}{b_1}\cdot\frac{1-q^{10}}{q^{10}}\cdot\frac{q}{1-q}=\frac{1-q^{10}}{1-q}\cdot\frac{1}{b_1q^9};$$

$$S'_{10}=\frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}\cdot\frac{1}{b_1{}^2q^9}=\frac{S_{10}}{b_1b_{10}}=\frac{64}{16}=4.$$

12. По свойству геометрической прогрессии $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $n \geqslant 2$, получим: $\mathrm{tg}^2 x=\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}$; $\mathrm{tg}^2 x=\mathrm{tg}x$; $\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}x=0$; $\mathrm{tg}x(\mathrm{tg}x-1)=0$; $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=1,\\ \mathrm{tg}x=0.\end{array}\right.$

Так как членом геометрической прогрессии не может быть нуль, то $\mathrm{tg}x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Наименьшим положительным корнем данного уравнения является $\frac{\pi}{4}=45^\circ$.

13. Запишем искомую сумму в виде $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\ldots-\ldots=$ $=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)$ и по формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$ найдем суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий: $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{12};\ldots$ и $\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots$. $S'=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, $S''=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

Искомая сумма равна $S'-S''=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. Тогда значение искомого выражения равно 5.

14. Пусть b_1; b_1q; b_1q^2 — три исходных числа, образующие геометрическую прогрессию. Тогда b_1; b_1q+2; b_1q^2 — арифметическая прогрессия, а b_1; b_1q+2; b_1q^2+9 — геометрическая прогрессия.

Воспользуемся свойствами арифметической и геометрической прогрессий и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1q+2=\dfrac{b_1+b_1q^2}{2}, \\ (b_1q+2)^2=b_1\cdot(b_1q^2+9); \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ b_1^2q^2+4b_1q+4=b_1^2q^2+9b_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ 4b_1q+4=9b_1; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q^2-(4{,}5b_1-2)-4=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-4{,}5b_1-2=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases}$$

$\begin{cases} b_1q^2-3{,}5b_1-2=0, \\ 2b_1q-4{,}5b_1+2=0. \end{cases}$ Сложим первое и второе уравнения системы и получим: $b_1q^2+2b_1q-8b_1=0$; $b_1(q^2+2q-8)=0$.

Так как число 0 не может являться членом геометрической прогрессии, то $q^2+2q-8=0$; $\left[\begin{array}{l} q=-4, \\ q=2. \end{array}\right.$ Поскольку геометрическая прогрессия является возрастающей, то $q=2$. Из равенства $2b_1q-4{,}5b_1+2=0$ найдем искомое число $4b_1-4{,}5b_1+2=0$; $-0{,}5b_1=-2$; $b_1=4$.

15. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, а (b_n) — геометрическая прогрессия.

Пусть $a_1=a$; $a_3=a+d$; $a_5=a+2d$, где d — удвоенная разность исходной арифметической прогрессии.

Пусть $b_1=b$; $b_3=b\cdot q$; $b_5=b\cdot q^2$, где q — квадрат знаменателя исходной геометрической прогрессии. По условию задачи $b_1=-3-a_1$;

$b_3 = 1 - a_3$; $b_5 = 5 - a_5$. Тогда по свойству геометрической прогрессии $(1 - a_3)^2 = (-3 - a_1)(5 - a_5)$, т. е. $(1 - a - d)^2 = (-3 - a)(5 - a - 2d)$;

$$d^2 - 8d + 16 = 0;\ d = 4.$$

Тогда искомая разность исходной арифметической прогрессии равна 2.

Тест 7

1. Верным является равенство $900 \cdot 1{,}14 = 1026$ (р.).

2. 1) $1\,000\,000 \cdot 0{,}75 = 750\,000$ человек приняли участие в выборах.

2) $750\,000 \cdot 0{,}1 = 75\,000$ человек отдали голоса партии зеленых.

3. Пусть x — исходное число.

После увеличения числа x на 200 % получим число $(3x)$.

Увеличим число $(3x)$ в шесть раз и получим число $(18x)$.

Найдем, сколько процентов последнее число составляет от первоначального: $\frac{18x}{x} \cdot 100\,\% = 1800\,\%$.

4. Пусть a — длина стороны квадрата. Тогда его площадь $S = a^2$.

После того как периметр квадрата увеличили на 10 %, каждая его сторона увеличилась на 10 %, т. е. стала равной $1{,}1a$. Тогда площадь квадрата равна $S_1 = (1{,}1a)^2 = 1{,}21a^2 = 1{,}21S$. Значит, площадь квадрата увеличится на 21 %.

5. В первый день продали $50\,\% = \frac{1}{2}$ всего товара, а во второй день — $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ всего товара. Таким образом, непроданным осталось $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ поступившего товара.

$$\frac{3}{8} = 37{,}5\,\%.$$

6. Так как 70 % жителей знают французский язык, то $100\,\% - 70\,\% = 30\,\%$ не знают французского языка, а владеют только английским языком. Тогда $80\,\% - 30\,\% = 50\,\%$ жителей знают оба языка.

7. Пусть x м — первоначальная высота ели, тогда $(1{,}25x)$ м — первоначальная высота сосны. После того как деревья подрастут на 1,8 м, высота ели станет равной $(x + 1{,}8)$ м, а высота сосны — $(1{,}25x + 1{,}8)$ м. Известно, что сосна окажется на 10 % выше ели. Составим и решим уравнение:

$1{,}25x + 1{,}8 = 1{,}1(x + 1{,}8)$; $1{,}25x - 1{,}1x = 1{,}1 \cdot 1{,}8 - 1{,}8$; $0{,}15x = 0{,}1 \cdot 1{,}8$;

$x = \frac{0{,}1 \cdot 1{,}8}{0{,}15}$; $x = \frac{18}{15}$; $x = \frac{6}{5}$; $x = 1{,}2$ (м).

8. Пусть x р. — первоначальная цена товара. После увеличения цены товар стал стоить $(1{,}1x)$ р., а после снижения цены — $(0{,}75 \cdot 1{,}1x)$ р. Так как товар подешевел на 7 р. по сравнению с первоначальной ценой, то составим уравнение: $x - 0{,}75 \cdot 1{,}1x = 7$; $x - 0{,}825x = 7$; $0{,}175x = 7$; $x = 40$ р.

9. Пусть x р. — первоначальная стоимость первого предмета, y р. — второго. После того как стоимость первого предмета уменьшили на $10\ \%$, а второго — на $40\ \%$, они стали стоить $(0{,}9x)$ р. и $(0{,}6y)$ р. соответственно. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 0{,}9x + 0{,}6y = 33; \end{cases} \begin{cases} x + y = 40, \\ 9x + 6y = 330; \end{cases} \begin{cases} x + y = 40, \\ 3x + 2y = 110; \end{cases} \begin{cases} -2x - 2y = -80, \\ 3x + 2y = 110; \end{cases} \begin{cases} x = 30, \\ y = 10. \end{cases}$$

Положительная разность между стоимостью предметов до изменения цен равна 20 р.

10. Пусть завод дважды увеличивал выпуск продукции на p процентов. Тогда составим и решим уравнение: $600 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 726$; $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{726}{600}$;

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{121}{100}$; $1 + \frac{p}{100} = \frac{11}{10}$; $\frac{p}{100} = \frac{11}{10} - 1$; $\frac{p}{100} = \frac{1}{10}$; $p = 10$.

11. Пусть в фирме n работников, и из них m мужчин. Так как известно, что мужчины составляют меньше $50\ \%$, но больше $40\ \%$ работников фирмы, то $0{,}4 < \frac{m}{n} < 0{,}5$; $0{,}4n < m < 0{,}5n$.

Так как n и m — целые числа, то наименьшим значением n, при котором m окажется целым числом, является число 7.

При $n = 7$ получим: $0{,}4 \cdot 7 < m < 0{,}5 \cdot 7$; $2{,}8 < m < 3{,}5$; $m = 3$.

12. Пусть первоначально требовалось x грузовиков, тогда на каждую машину погрузили бы $\frac{90}{x}$ т груза. Так как дополнительно было затребовано еще 4 грузовика, то на каждый из них погрузили $\frac{90}{x+4}$ т груза. Известно, что на каждую машину погрузили на 0,75 т меньше, чем планировалось. Составим и решим уравнение:

$$\frac{90}{x} - \frac{90}{x+4} = \frac{3}{4}; \quad \frac{30}{x} - \frac{30}{x+4} = \frac{1}{4}; \quad \frac{30(x+4) - 30x}{x(x+4)} = \frac{1}{4}; \quad \frac{120}{x(x+4)} = \frac{1}{4};$$

$$x^2 + 4x - 480 = 0; \quad \left[\begin{aligned} x &= -24, \\ x &= 20. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, первоначально требовалось 20 грузовиков. Но после привлечения еще 4 грузовиков их стало 24.

Найдем, на сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой: $\frac{24-20}{20}\cdot 100\ \% = 20\ \%$.

13. Найдем процентное содержание золота в каждом сплаве:

$\frac{2,8}{2,8+1,2}\cdot 100\ \% = 70\ \%$ золота в первом сплаве.

$\frac{2,7}{2,7+0,3}\cdot 100\ \% = 90\ \%$ золота во втором сплаве.

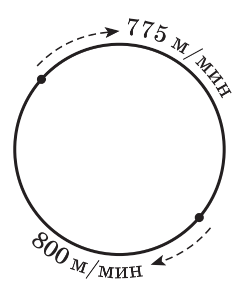
	Масса отрезанного куска, кг	Масса золота, кг
Первый сплав	x	$0,7x$
Второй сплав	y	$0,9y$
Новый сплав	2	$0,85\cdot 2 = 1,7$

Составим и решим систему уравнений:

$\begin{cases} x+y=2, \\ 0,7x+0,9y=1,7; \end{cases}$ $\begin{cases} -7x-7y=-14, \\ 7x+9y=17; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=3, \\ 7x+9y=17; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1,5, \\ 7x+9y=17. \end{cases}$

Таким образом, от второго куска отрезали 1,5 кг = 1500 г металла.

14. Пусть t мин — время от момента старта до момента встречи велосипедистов. Тогда первый велосипедист за это время проехал $775t$ м, а второй — $800t$ м. Так как первоначальное расстояние между ними было равно половине длины велотрека, то $800t - 775t = \frac{250}{2}$; $t = 5$ мин.



За пять минут первый велосипедист проехал $775\cdot 5 = 3875$ м, или $3875 : 250 = 15,5$ кругов. Таким образом, к моменту встречи первый велосипедист проехал 15 полных кругов.

15. По условию задачи составим таблицу.

	Было	Взяли	Осталось
Всего шаров	x	y	$x-y$
Синих шаров	$0,01x$		$0,01x$
Красных шаров	$0,99x$	y	$0,99x-y$

Так как доля синих от общего числа оставшихся в коробке шаров составила 2 %, то составим и решим уравнение: $0,01x = 0,02(x-y)$; $x = 2x - 2y$; $x = 2y$. Первоначальное число шаров в 2 раза больше числа взятых красных шаров.

СОДЕРЖАНИЕ

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Арефьева Ирина Глебовна

Пирютко Ольга Николаевна

Сборник задач по алгебре

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

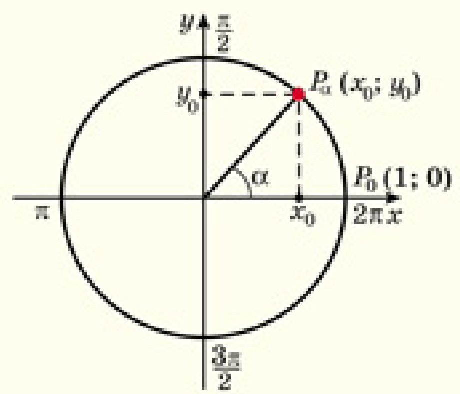
Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*. Художественные редакторы *Е. А. Ждановская, Е. А. Проволович*. Художник *В. В. Руто*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *Е. Ю. Агафоновой*. Корректоры *В. С. Бабеня, О. С. Козицкая, Е. П. Тхир*.

Подписано в печать 17.02.2020. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,38. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 50 500 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018. Ул. Корженевского, 20,
220024, Минск, Республика Беларусь.

Тригонометрия



Ордината точки P_α тригонометрической окружности, соответствующей углу α, называется **синусом** угла α, а абсцисса этой точки — **косинусом** угла α.

$\boxed{x_0 = \cos\alpha \qquad y_0 = \sin\alpha}$

$\boxed{\pi \text{ рад} = 180^\circ \qquad 1 \text{ рад} \approx 57^\circ}$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного угла

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Формулы сложения

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Формулы двойного угла

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Простейшие тригонометрические уравнения

Решения уравнения $\sin x = a$	
$\|a\| > 1$	Нет корней
$a = 0$	$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\|a\| < 1,\ a \neq 0$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Решения уравнения $\cos x = a$	
$\|a\| > 1$	Нет корней
$a = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\|a\| < 1,\ a \neq 0$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Корень n-й степени

$\sqrt[n]{a} = b$, если $b \geq 0$, $b^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$

Корень n-й степени из произведения

$\sqrt[4]{81 \cdot 625} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in N$, $n > 1$	$\sqrt[5]{72} \cdot \sqrt[5]{\frac{4}{9}} = \sqrt[5]{72 \cdot \frac{4}{9}} = \sqrt[5]{32} = 2$

Корень n-й степени из частного

$\sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \geq 0$, $b > 0$, $n \in N$, $n > 1$	$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\frac{128}{2}} = \sqrt[6]{64} = 2$

Корень n-й степени из степени с показателем m

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$ $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[9]{8}$ $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 5]{2^5} = \sqrt[15]{32}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$; $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$, где $a \geq 0$, $n \in N$, $m \in Z$, $k \in N$, r — общий натуральный делитель чисел m и n, $n > 1$, $k > 1$ и $r > 1$	$\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[2 \cdot 3]{5^3} = \sqrt{5}$ $\sqrt[12]{10\,000} = \sqrt[3 \cdot 4]{10^4} = \sqrt[3]{10}$

Корень k-й степени из корня n-й степени

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3 \cdot 5]{a} = \sqrt[15]{a}$	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$, для любых натуральных $n > 1$, $k > 1$ и $a \geq 0$	$\sqrt[6]{\sqrt{a}} = \sqrt[6 \cdot 2]{a} = \sqrt[12]{a}$

Корень n-й степени из степени с показателем n

$\sqrt[8]{(-13)^8} = \lvert -13 \rvert = 13$	$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} \lvert a \rvert, \text{ если } n \text{ — четное;} \\ a, \text{ если } n \text{ — нечетное} \end{cases}$	$\sqrt[5]{(-7)^5} = -7$

Производная

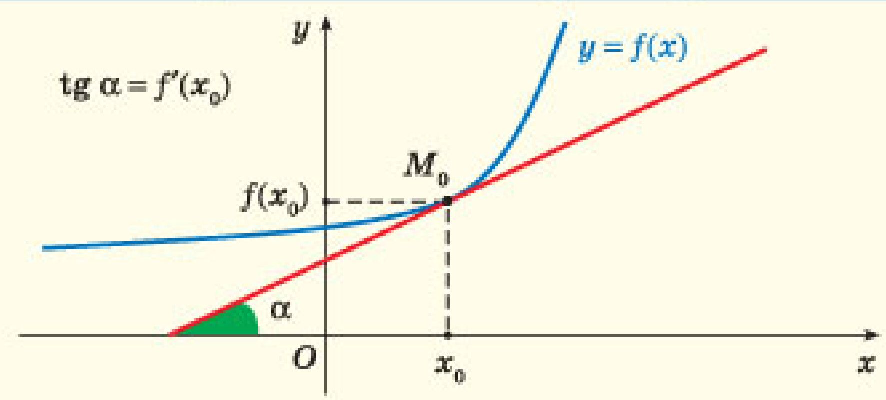
$f(x)$	x^2	$kx + b$	$\frac{1}{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	0

Правила вычисления производных

Производная суммы	$(U + V)' = U' + V'$
Производная произведения	$(UV)' = U'V + V'U$
Производная частного	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
Производная степени	$(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in Z$

Геометрический смысл производной

$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$



Натуральные степени чисел 2, 3, 4, 5, 6

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187			
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125					
6^n	6	36	216	1296						