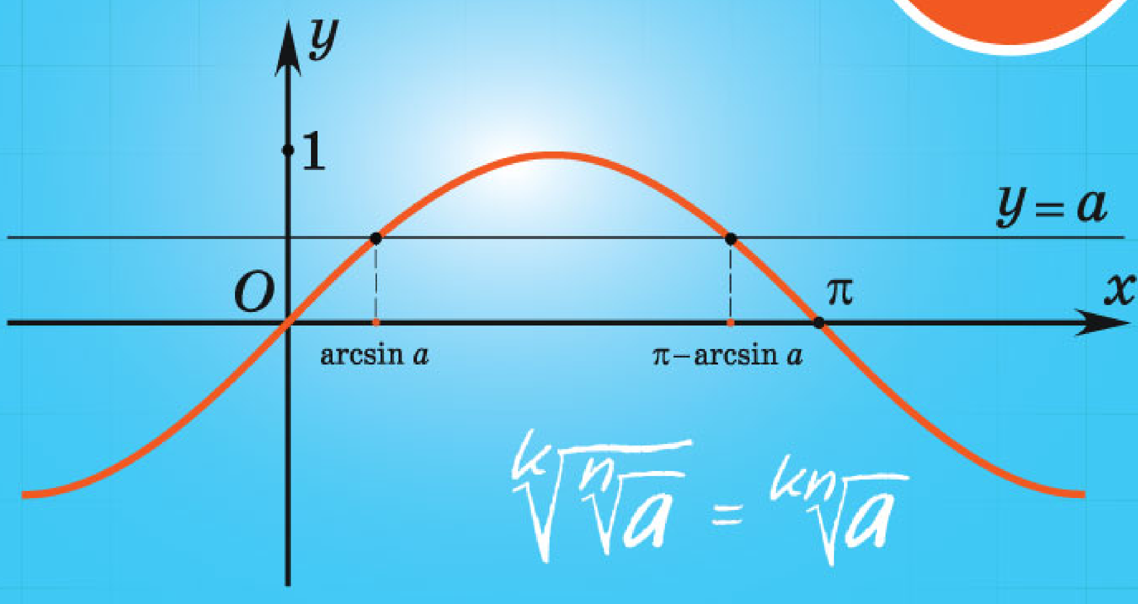
И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

АЛГЕБРА

10

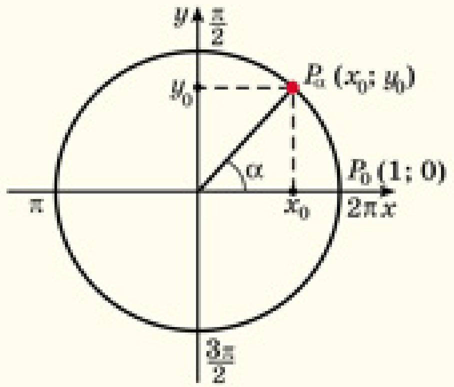
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$



$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Тригонометрия



Ордината точки P_α тригонометрической окружности, соответствующей углу α, называется **синусом** угла α, а абсцисса этой точки — **косинусом** угла α.

$$x_0 = \cos\alpha \qquad y_0 = \sin\alpha$$

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ \qquad 1 \text{ рад} = 57^\circ$$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного угла

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Формулы сложения

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Формулы двойного угла

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Простейшие тригонометрические уравнения

Решения уравнения $\sin x = a$

$\lvert a\rvert > 1$	Нет корней
$a = 0$	$x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\lvert a\rvert < 1,\ a \ne 0$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Решения уравнения $\cos x = a$

$\lvert a\rvert > 1$	Нет корней
$a = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$a = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$a = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\lvert a\rvert < 1,\ a \ne 0$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$

$a \in \mathbf{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

$a \in \mathbf{R}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Правообладатель Народная асвета

И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

Минск «Народная асвета» 2019

Правообладатель Народная асвета

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.144я721
А80

Рецензенты:

кафедра высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета (доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой *В. В. Беняш-Кривец*);
учитель математики квалификационной категории «учитель-методист» лицея Белорусского национального технического университета *О. Е. Цыбулько*

ISBN 978-985-03-3152-6

© Арефьева И. Г., Пирютко О. Н., 2019
© Оформление. УП «Народная асвета», 2019

Правообладатель Народная асвета

Уважаемые десятиклассники!

По этой книге вы продолжите изучать алгебру. Книга состоит из трех глав, каждая из которых разбита на параграфы, где вы встретите следующие условные обозначения:

— задания на повторение для подготовки к изучению нового материала;

— новый теоретический материал и методы его применения;

— алгоритмы;

— важные правила и утверждения;

— дополнительный материал для углубления математических знаний;

— основные примеры с решениями и подробным описанием последовательности действий;

— устные вопросы и задания;

— задания для работы в классе;

— задания для домашней работы;

— задания для повторения;

* — задания повышенной сложности.

Каждая глава учебного пособия заканчивается разделом «Итоговая самооценка», в котором вы найдете перечень требований к усвоению теоретического материала и практические задания для самопроверки.

Для обобщения изученного ранее материала в учебном пособии размещен раздел «Повторение курса алгебры 7—9-х классов».

В разделе «Математика вокруг нас» вы найдете задачи на применение математики в различных областях жизни.

Для тех, кто изучает математику на повышенном уровне, дополнительный теоретический материал и задания по алгебре размещены в учебном пособии «Сборник задач по алгебре, 10 кл.».

Желаем успехов!

Правообладатель Народная асвета

Повторение курса алгебры 7—9-х классов

1. Определите, какие из точек $A(-5;\ 8)$; $B(5;\ -8)$; $C(-5;\ -8)$; $D(8;\ -5)$; $E(5;\ 8)$ симметричны относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

2. Верно ли, что:

а) $3 \in \boldsymbol{N}$; б) $0 \in \boldsymbol{N}$; в) $-2{,}6 \in \boldsymbol{Z}$; г) $-7 \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{5}{7} \in \boldsymbol{Q}$;

е) $8{,}(3) \in \boldsymbol{Q}$; ж) $\sqrt{7} \in \boldsymbol{I}$; з) $\pi \in \boldsymbol{I}$; и) $2 \in \boldsymbol{R}$; к) $-\sqrt{13} \in \boldsymbol{R}$?

3. Найдите значение выражения $\dfrac{330 \cdot 10^{-3}}{22 \cdot 10^{2}}$. Результат представьте в стандартном виде.

4. Сократите дробь $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 7a + 6}$.

5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x-4}{3} - \dfrac{x+1}{2} = 3$; б) $(x-4)^2 - 2x = 7$;

в) $\dfrac{4}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x-3} = 1$; г) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(3\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right)$; в) $\dfrac{21\sqrt{20}}{\sqrt{125} - \sqrt{45}}$.

7. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x < 2, \\ 2x - 1 \leqslant 7. \end{array}\right.$

8. Найдите область определения функции $y = \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$.

9. Методом интервалов решите неравенство $\dfrac{(x-4)^2(x+5)}{x-1} \leqslant 0$.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y = x + 2, \\ 2xy = 3. \end{cases}$

11. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $[-8;\ 7]$. Найдите:

а) множество значений функции; б) нули функции; в) промежутки знакопостоянства функции; г) промежутки монотонности функции; д) значение выражения $f(-5) + f(3)$; е) все корни уравнения $f(x) = -2$.

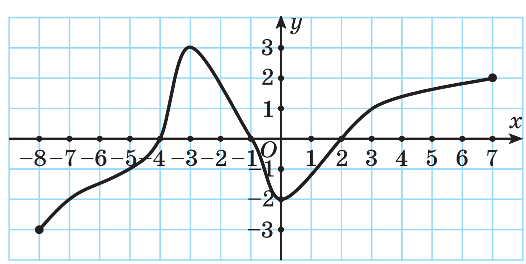


Рис. 1

Правообладатель Народная асвета

12. Запишите формулу функции, график которой получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом его: а) на 6 единиц влево вдоль оси абсцисс и на 4 единицы вверх вдоль оси ординат; б) на 5 единиц вправо вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вниз вдоль оси ординат; в) на 1 единицу влево вдоль оси абсцисс; г) на 9 единиц вверх вдоль оси ординат.

13. В одной системе координат постройте графики функций:

$y = -(x+5)^2$; $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$; $y = -2(x-6)^2 + 3$; $y = (x-1)^2 + 2$.

Какая из данных функций является четной?

14. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3}-2\right)^2 + \sqrt{\left(6-4\sqrt{3}\right)^2}$.

15. Вычислите: $(0{,}0001)^{-4} \cdot 10^{-15}$.

16. Сократите дробь $\frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$.

17. Решите уравнение:

а) $5(x-1)+3 = 3x-4$; б) $\frac{x}{x^2-25} + \frac{4-x}{x-5} = 0$.

18. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{27}+\sqrt{3}\right)^2$; б) $\left(2\sqrt{5}+1\right)\left(1-2\sqrt{5}\right)$.

19. Решите неравенство:

а) $7x-1 \leqslant 4(x+2)$; б) $6x^2 - x - 1 > 0$; в) $\frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} \leqslant 0$.

20. Найдите область определения функции $y = \sqrt{16-x^2}$.

21. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 15, \\ y - x = 5. \end{cases}$

22. Постройте параболу $y = -x^2 + 4$ и прямую $y = x - 2$ и найдите координаты точек пересечения этих графиков.

23. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{\left(8-6\sqrt{2}\right)^2}$.

Дополнительные материалы к учебному пособию «Алгебра, 10» можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика. 10 класс».

Правообладатель Народная асвета

Глава 1

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Единичная окружность. Градусная и радианная мера произвольного угла

1.1. Определите, какие из данных точек координатной плоскости находятся на одинаковом расстоянии от начала координат: $A(-4;\ 3)$; $B(3;\ 4)$; $C(4;\ -3)$; $D(0{,}75;\ -0{,}4)$; $E\left(-\frac{3}{4};\ -\frac{2}{5}\right)$.

1.2. Назовите координаты точек, симметричных точкам $A(3;\ 1)$ и $B(-1;\ 5)$ относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат.

На рисунке 2 изображены колебания маятника и показан график функции, описывающей смещение маятника от положения равновесия в зависимости от времени. Изучение процесса колебания маятника, а также многих других процессов в физике (механические, электромагнитные колебания, волны и т. д.) приводит к необходимости рассматривать тригонометрические функции действительного аргумента.

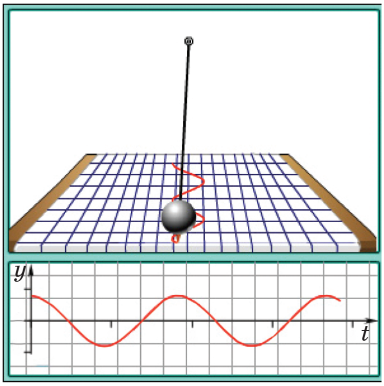


Рис. 2

Для изучения тригонометрических функций используется понятие единичной окружности.

Единичную окружность называют также координатной окружностью.

Определение. Окружность на координатной плоскости единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3) называется **единичной окружностью.**

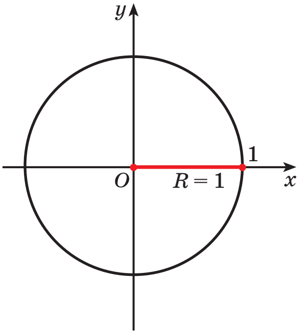


Рис. 3

Для того чтобы задать координатную окружность, нужно указать:

- начало отсчета — точку $P_0(1;\ 0)$;
- направление движения точки по окружности (против часовой стрелки — положительное, а по часовой стрелке — отрицательное (рис. 4)).

Правообладатель Народная асвета

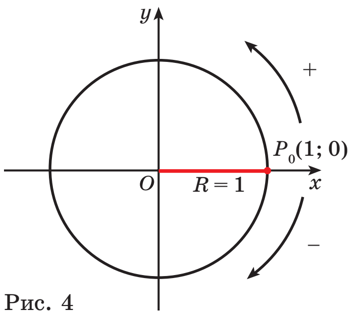


Рис. 4

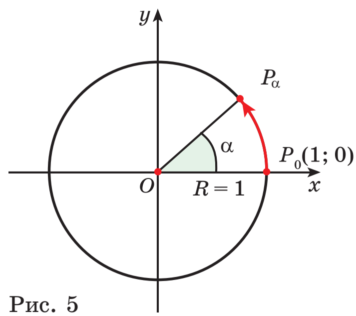


Рис. 5

Точки на окружности будем получать путем поворота точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на заданный угол.

Точка P_α (рис. 5) получена поворотом

- точки $P_0(1;\ 0)$ (указывается, какая точка поворачивается)
- вокруг начала координат (указывается центр поворота)
- на угол α (указывается, на какой угол выполняется поворот — угол поворота).

Таким образом, при повороте точки P_0 вокруг начала координат на угол α в заданном направлении получается точка P_α единичной окружности.

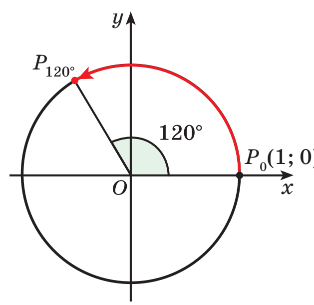


Рис. 6

Пример 1. Построить на единичной окружности точку P_{120°.

Решение. Точку P_{120° получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 120° (рис. 6).

Пример 2. Построить на единичной окружности точку P_{-120°.

Решение. Точку P_{-120° получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 120° (рис. 7).

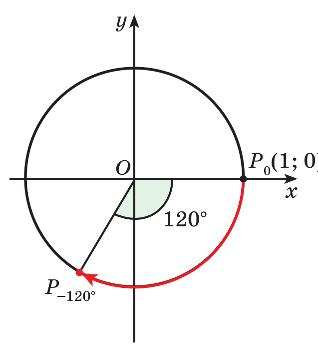


Рис. 7

Пример 3. Построить на единичной окружности точку:

а) P_{360°; б) P_{630°; в) P_{990°.

Решение. а) Так как поворот на 360° соответствует одному полному обороту, то необходимо выполнить поворот точки $P_0(1;\ 0)$ против часовой стрелки на 360° (полный оборот). Точка P_{360° совпадет с точкой P_0 (рис. 8, *а*).

Правообладатель Народная асвета

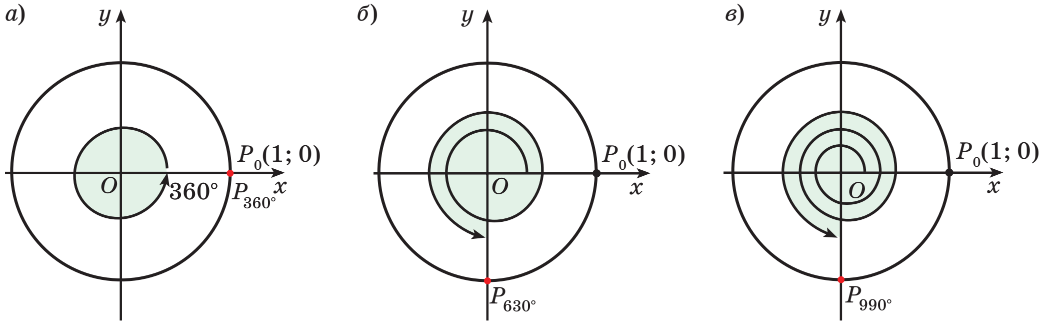


Рис. 8

б) Так как $630° = 360° + 270°$, то необходимо выполнить один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $270°$ (рис. 8, *б*).

в) Так как $990° = 2 \cdot 360° + 270°$, то необходимо выполнить два полных оборота и еще поворот точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $270°$ (рис. 8, *в*).

Пример 4. Построить на единичной окружности точку $P_{-1200°}$.

Решение. Так как $-1200° = -360° \cdot 3 + (-120°)$, то необходимо выполнить три полных оборота и еще поворот точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $120°$ (рис. 9).

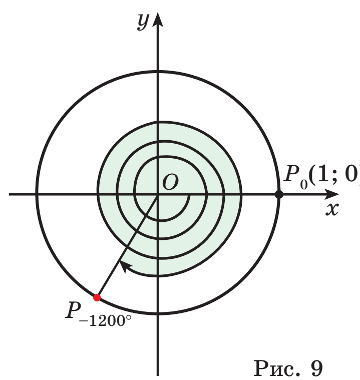


Рис. 9

Радианное измерение углов

По формуле длины окружности $C = 2\pi R$ получим, что длина единичной окружности ($R = 1$) равна 2π.

На единичной окружности (рис. 10) легко отметить точки $P_{\frac{\pi}{2}}$; P_{π}; $P_{\frac{3\pi}{2}}$; $P_{2\pi}$, соответствующие углам поворота $90°$ (четверть окружности), $180°$ (половина окружности), $270°$ (три четверти окружности), $360°$ (вся окружность).

Числа $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π — это радианная мера углов, градусная мера которых соответственно равна $90°$, $180°$, $270°$, $360°$.

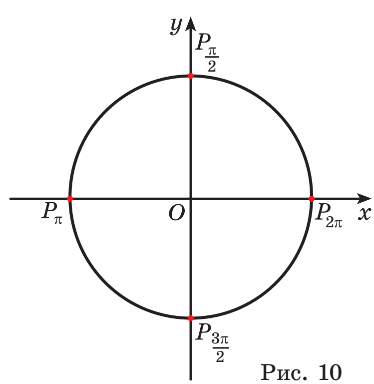


Рис. 10

Правообладатель Народная асвета

Угол в 1 радиан (от лат. *radius* — луч, радиус) — это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

На рисунке 11 отмечена точка единичной окружности, соответствующая углу в 1 радиан. Длина дуги единичной окружности, соответствующей углу в 1 радиан, равна 1.

Так как 2π радиан соответствует $360°$, то градусная мера угла в 1 радиан равна:

$$1\text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°.$$

Сокращенное обозначение радиана «рад» чаще всего опускают.

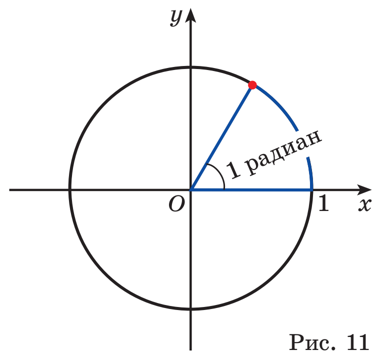


Рис. 11

$$180° = \pi\text{ рад};$$
$$1° = \frac{\pi}{180°}\text{ рад};\ 1\text{ рад} = \frac{180°}{\pi}$$

Чтобы выразить **градусную** меру угла $n°$ **в радианной**, нужно $n°$ умножить на $\frac{\pi}{180°}$.

Например,

$$30° = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6};$$

$$-450° = -450° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{5\pi}{2}.$$

$$120° = 120° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$$
$$-225° = -225° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{5\pi}{4}$$

Чтобы выразить **радианную** меру угла α **в градусной**, нужно число α умножить на $\frac{180°}{\pi}$.

Например,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°;$$

$$2\text{ рад} = 2 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 2 \cdot 57° = 114°.$$

$$-\frac{9\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -405°$$
$$5\text{ рад} = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 5 \cdot 57° = 285°$$

На рисунке 12 показано соответствие между градусной и радианной мерой некоторых углов.

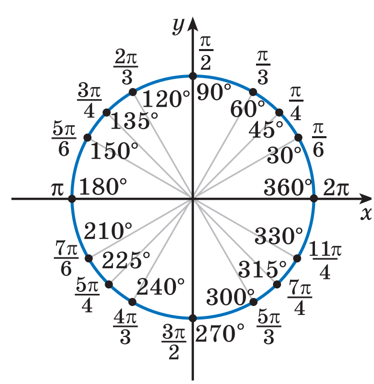


Рис. 12

Пример 5. Построить на единичной окружности точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. Точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$ получаем поворотом против часовой стрелки точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат на угол $\frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 13).

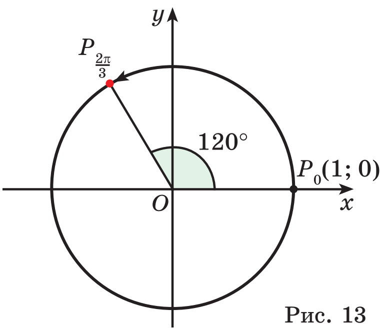


Рис. 13

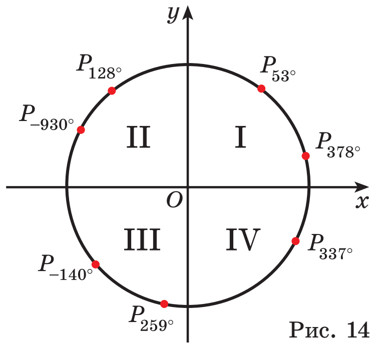


Рис. 14

В зависимости от того, в какую четверть координатной плоскости попадает точка P_α, говорят, что в такой же четверти находится угол α.

Например, углы 53° и 378° находятся в первой четверти, углы 128° и –930° находятся во второй четверти, углы 259° и –140° находятся в третьей четверти, а угол 337° находится в четвертой четверти (рис. 14).

Углы 0°; 90°; 180°; 270°; 360°; ... соответствуют границам четвертей.

Пример 6. Определите, в какой четверти находится угол 3 рад.

Решение. 3 рад $\approx 3 \cdot 57° = 171°$. Так как $90° < 171° < 180°$ $\left(\frac{\pi}{2} < 3 \text{ рад} < \pi\right)$, то данный угол находится во второй четверти.

Примеры основных заданий и их решения

1. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат на угол:

а) 50°; б) –220°; в) –90°; г) 190°.

Решение. а) Точку $P_{50°}$ получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат на угол 50° (рис. 15, *а*).

б) Точку $P_{-220°}$ получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат на угол 220° (см. рис. 15, *а*).

в) Точку $P_{-90°}$ получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат на угол 90° (рис. 15, *б*).

Правообладатель Народная асвета

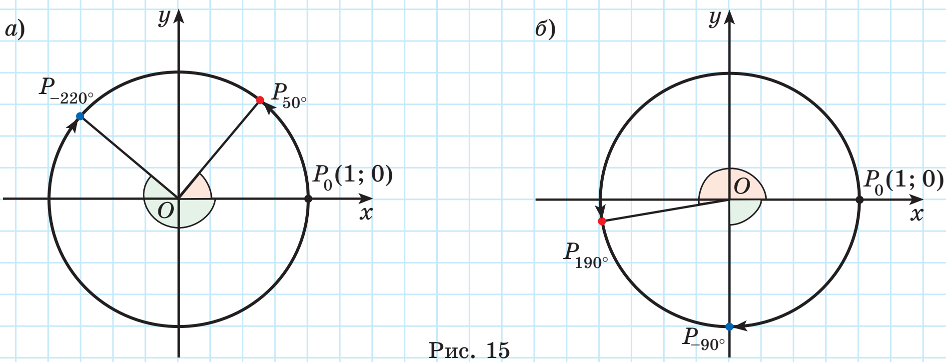


Рис. 15

г) Точку $P_{190°}$ получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 190° (см. рис. 15, *б*).

2. Покажите, что точки:
а) $P_{40°}$ и $P_{400°}$; б) $P_{-10°}$ и $P_{-730°}$ — единичной окружности совпадают.

Решение. а) Поскольку 400° = 360° + 40°, то, для того чтобы получить точку $P_{400°}$, нужно выполнить один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол 40° (рис. 16, *а*).

б) –730° = –360° · 2 + (–10°) (рис. 16, *б*).

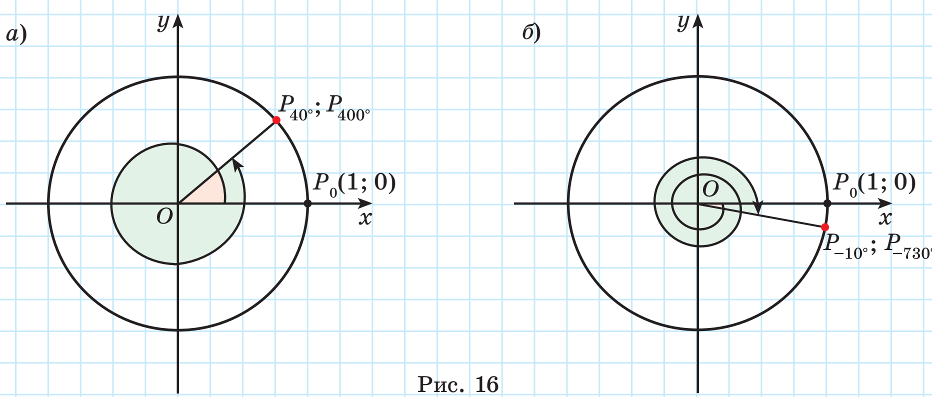


Рис. 16

3. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:
а) 550°; б) –1300°.

Правообладатель Народная асвета

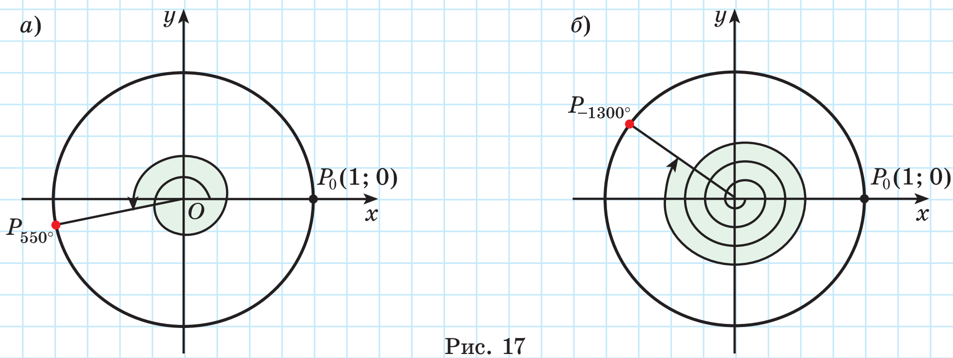


Рис. 17

Решение. а) Так как $550° = 360° + 190°$, то выполним один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $190°$ (рис. 17, *а*).

б) Так как $-1300° = -360° \cdot 3 + (-220°)$, то выполним три полных оборота и еще поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $220°$ (рис. 17, *б*).

4. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:
а) $P_{90°}$; б) $P_{-217°}$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точку $P_{90°}$. Так как, например, $450° = 90° + 360°$, $810° = 90° + 2 \cdot 360°$, $-270° = 90° - 360°$ и т. п., то точки единичной окружности $P_{450°}$, $P_{810°}$, $P_{-270°}$ совпадают с точкой $P_{90°}$ единичной окружности. Очевидно, что существует бесконечно много углов α, для которых точки единичной окружности P_α и $P_{90°}$ совпадают. Эти углы могут быть получены в результате поворота точки $P_{90°}$ на целое число полных оборотов по или против часовой стрелки (рис. 18), таким образом, $\alpha = 90° + 360° \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$.

б) $\alpha = -217° + 360° \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$.

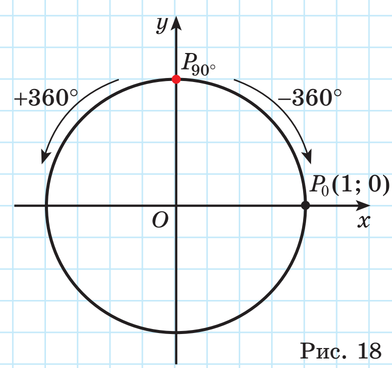


Рис. 18

5. Выразите в радианах угол:
а) $150°$; б) $20°$; в) $-80°$; г) $2000°$.

Правообладатель Народная асвета

Решение.

а) $150° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{6}$; б) $20° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{9}$;

в) $-80° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{4\pi}{9}$; г) $2000° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{100\pi}{9}$.

6. Выразите в градусах угол:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{18}$; г) $\frac{4\pi}{3}$; д) 4; е) –3.

Решение.

а) $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = 90°$; б) $-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -45°$;

в) $\frac{7\pi}{18} = \frac{7\pi}{18} \cdot \frac{180°}{\pi} = 70°$; г) $\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 240°$;

д) 4 рад $\approx 4 \cdot 57° = 228°$; е) –3 рад $\approx -3 \cdot 57° = -171°$.

7. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

Решение. а) Так как $\frac{5\pi}{6} = 150°$, то выполним поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол 150° (рис. 19, *а*).

б) Поскольку $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, то точка $P_{\frac{13\pi}{6}}$ совпадает с точкой $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 19, *б*).

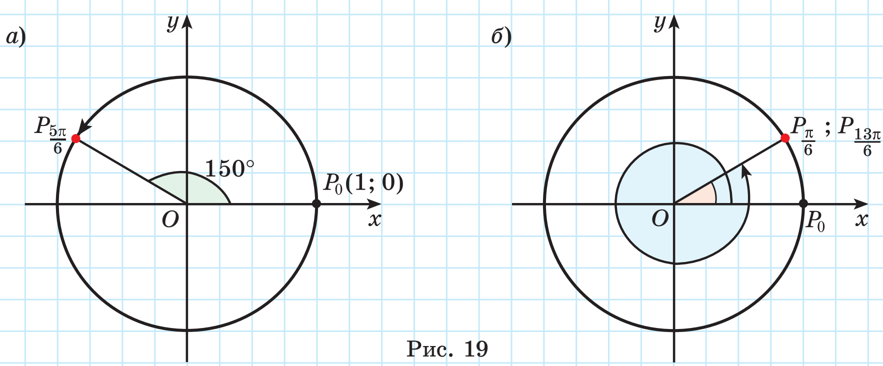


Рис. 19

1. Выберите углы, соответствующие точке $P_0(1; 0)$ единичной окружности:
а) 0°; б) 180°; в) 90°; г) –360°.

2. Какие из данных точек единичной окружности совпадают:
а) P_α; б) $P_{\alpha + 180°}$; в) $P_{\alpha + 360°}$; г) $P_{\alpha + 90°}$?

Правообладатель Народная асвета

1.3. Найдите градусную меру угла, изображенного на рисунке 20.

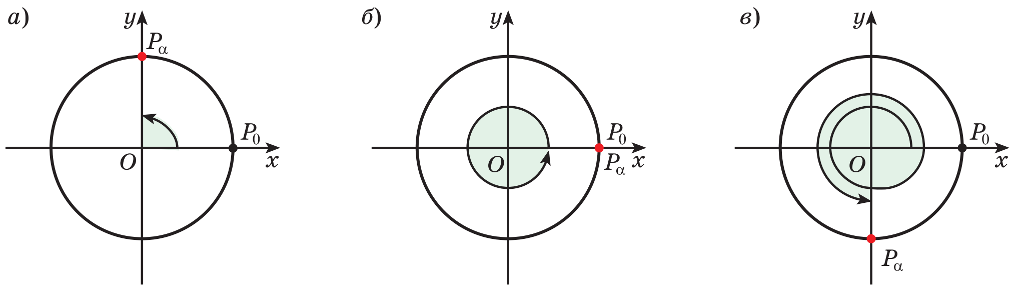


Рис. 20

1.4. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) 150°; 210°; 540°; –45°; –135°; –720°;

б) –43°; 137°; –456°; 280°; –189°; 763°.

1.5. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β и P_γ, соответствующие углам поворота α, β и γ (рис. 21). Запишите градусные меры углов α, β и γ, если известно, что они заключены в промежутке:

а) от 0° до 360°;

б) от –360° до 0°;

в) от 720° до 1080°.

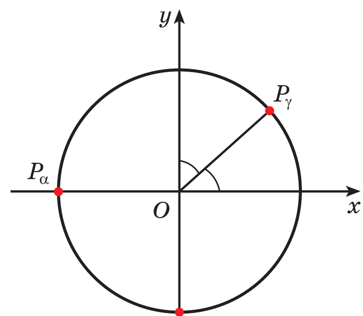


Рис. 21

1.6. Запишите два положительных и два отрицательных угла α, для которых точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{45°}$; б) $P_{-330°}$.

1.7. Среди углов поворота α, равных 770°; 480°; –50°; 1560°; –240°; –310°, найдите такие, для которых точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{50°}$; б) $P_{120°}$.

1.8. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 22). Запишите все такие углы α и β.

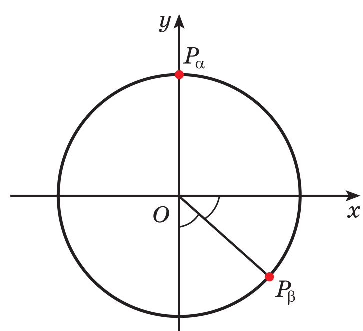


Рис. 22

Правообладатель Народная асвета

1.9. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:
а) $P_{180°}$; б) $P_{117°}$; в) $P_{245°}$; г) $P_{-107°}$.

1.10. Выразите в градусах угол, радианная мера которого равна:
а) $-\pi$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $-\frac{3\pi}{5}$.

1.11. Выразите в радианах угол:
а) 10°; б) –135°; в) –1200°; г) 720°.

1.12. Выразите в градусах угол:
а) 3 рад; б) 0,8 рад; в) –6 рад; г) –1,1 рад.

1.13. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол: $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{6}$. Сколько различных точек получилось?

1.14. Определите, углом какой четверти является угол α, если:
а) $\alpha = 126°$; б) $\alpha = -189°$; в) $\alpha = 722°$; г) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; д) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;
е) $\alpha = \frac{11\pi}{5}$; ж) $\alpha = 2$; з) $\alpha = -4$; и) $\alpha = 7$; к) $\alpha = -3$.

1.15. Определите, в какой четверти находится угол α, если:
а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; г) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$.

1.16. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 23). Запишите радианные меры углов α и β, если известно, что они заключены в промежутке:
а) от 0 до 2π; б) от -2π до 0; в) от 2π до 4π.

1.17. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 24). Запишите (в радианах) все такие углы α и β.

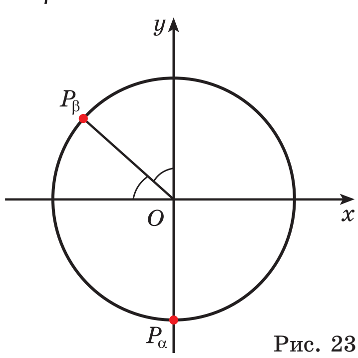


Рис. 23

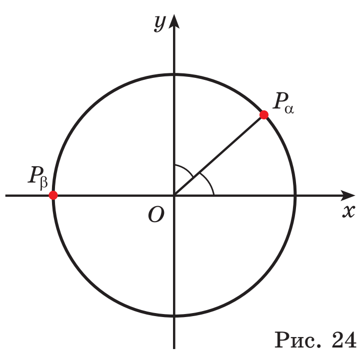


Рис. 24

Правообладатель Народная асвета

1.18. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол 1 рад; 3 рад; –4 рад; 6 рад.

1.19. Сколько полных оборотов содержит угол, радианная мера которого равна: 4π; -6π; 12π; -100π? В каком направлении точка $P_0(1;\ 0)$ движется по окружности в каждом случае?

1.20. Как расположены на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ на углы:

а) α и $\alpha + 2\pi$;

б) α и $\alpha + \pi$;

в) α и $-\alpha$?

1.21. Определите вид треугольника, если радианная мера двух его углов равна $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{3\pi}{10}$.

1.22. Выразите в градусах и радианах угол, на который поворачивается минутная стрелка часов за 15, 20, 30 и 60 минут.

1.23. Выразите в градусах и радианах угол, на который в течение одних суток поворачивается:

а) часовая стрелка часов;

б) минутная стрелка часов.

1.24. Найдите градусную меру угла, изображенного на рисунке 25.

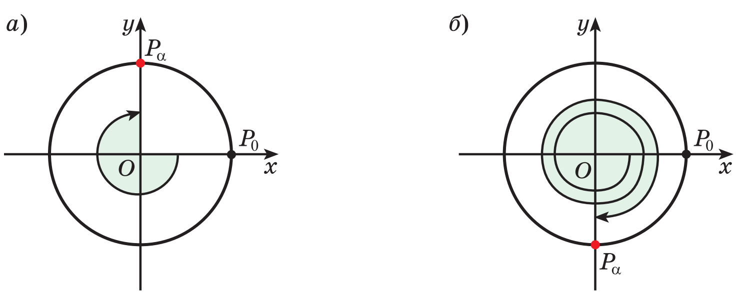


Рис. 25

1.25. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) 120°; –90°; 450°; 240°;

б) 38°; 185°; –295°; 724°.

Правообладатель Народная асвета

1.26. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 26). Запишите градусные меры углов α и β, если известно, что они заключены в промежутке:

а) от 0° до 360°; б) от –360° до 0°;
в) от 360° до 720°.

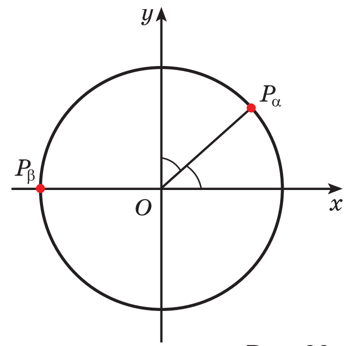


Рис. 26

1.27. Запишите два положительных и два отрицательных угла α, для которых точка P_α совпадает с точкой: а) $P_{225°}$; б) $P_{-60°}$.

1.28. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:

а) $P_{90°}$; б) $P_{-68°}$; в) $P_{318°}$; г) $P_{-125°}$.

1.29. Выразите в градусах угол: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{11\pi}{18}$; в) $-\frac{5\pi}{2}$.

1.30. Выразите в радианах угол: а) 18°; б) –60°; в) –1080°.

1.31. Выразите в градусах угол: а) 4 рад; б) –0,5 рад.

1.32. Начертите единичную окружность и постройте точки, получаемые поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол: $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; π; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

1.33. Определите, углом какой четверти является угол α, если:

а) $\alpha = 213°$; б) $\alpha = -352°$; в) $\alpha = \frac{7\pi}{10}$; г) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$;
д) $\alpha = 4$; е) $\alpha = -1$; ж) $\alpha = 9$; з) $\alpha = -5$.

1.34. Определите, в какой четверти находится угол α, если:

а) $0° < \alpha < 90°$; б) $180° < \alpha < 270°$;
в) $-180° < \alpha < -90°$; г) $360° < \alpha < 450°$.

1.35. На единичной окружности отмечены точки P_α и P_β, соответствующие углам поворота α и β (рис. 27). Запишите все такие углы α и β, используя радианную меру.

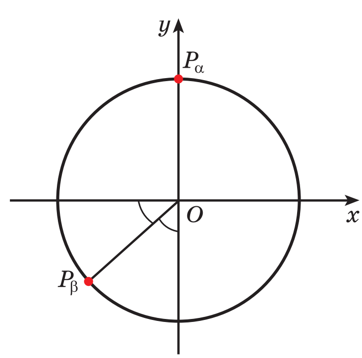


Рис. 27

1.36. Найдите градусную меру всех углов треугольника, если радианная мера двух его углов равна $\frac{\pi}{15}$ и $\frac{3\pi}{15}$.

1.37. Выразите в градусах и радианах угол, на который в течение двух часов повернется:

а) минутная стрелка часов;
б) секундная стрелка часов.

Правообладатель Народная асвета

1.38. Из данных точек выберите точку с отрицательной абсциссой:
а) $A(-2;\ 3)$; б) $B(5;\ -8)$; в) $C(0;\ -7)$; г) $D(4;\ 0)$.

1.39. Найдите значение выражения:

а) $9 + 2\frac{3}{8}$; б) $9 - 2\frac{3}{8}$; в) $2\frac{3}{8} - 9$; г) $-9 - 2\frac{3}{8}$; д) $-2\frac{3}{8} + 9$.

§ 2. Определение синуса и косинуса произвольного угла

1.40. Из точек $A(-4;\ 0)$; $B(0;\ 3)$; $C(4;\ 1)$; $D(1;\ 0)$; $E\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ выберите точки, лежащие на оси:
а) абсцисс; б) ординат.

1.41. Из точек $A(-4;\ 6)$; $B(3;\ -7)$; $C(-1;\ -10)$; $D(0{,}1;\ -0{,}4)$; $E(-0{,}3;\ -0{,}4)$; $F(1;\ 0{,}5)$ выберите точки, лежащие:
а) в первой четверти; б) во второй четверти;
в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти.

1.42. Назовите несколько точек, лежащих:
а) на оси ординат; б) на оси абсцисс;
в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти.

При изучении геометрии вы рассматривали отношения сторон в прямоугольном треугольнике и познакомились с понятиями синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла (рис. 28).

Построим точку $P_\alpha(x_\alpha;\ y_\alpha)$ единичной окружности поворотом точки P_0 вокруг начала координат на угол α (рис. 29).

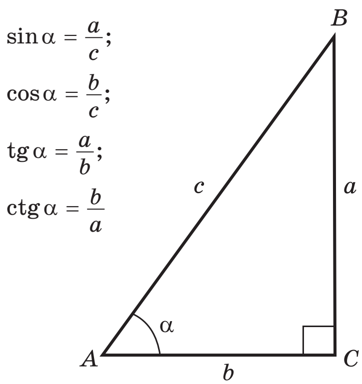


Рис. 28

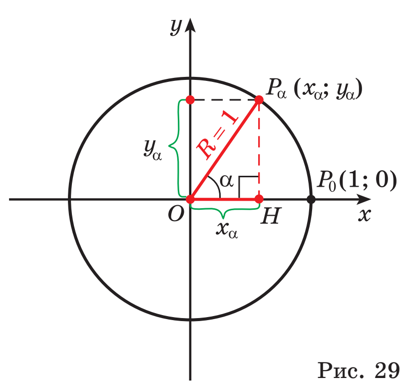


Рис. 29

Правообладатель Народная асвета

Рассмотрим прямоугольный треугольник $P_\alpha OH$, в котором гипотенуза $P_\alpha O$ равна 1 (радиусу единичной окружности). По определению синуса и косинуса острого угла получим: $\sin\alpha = \dfrac{P_\alpha H}{P_\alpha O} = \dfrac{y_\alpha}{1} = y_\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{OH}{P_\alpha O} = \dfrac{x_\alpha}{1} = x_\alpha$.

Таким образом, синус угла α равен ординате точки P_α, а косинус угла α равен абсциссе точки P_α.

Поскольку в тригонометрии рассматриваются углы $\alpha \in (-\infty; +\infty)$, то определим синус и косинус для любого угла α.

Определение. Синусом угла α называется **ордината** точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α:

$$\sin\alpha = y_\alpha \text{ (рис. 30).}$$

Косинусом угла α называется **абсцисса** точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α:

$$\cos\alpha = x_\alpha \text{ (см. рис. 30).}$$

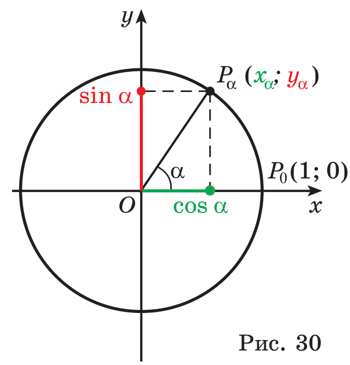
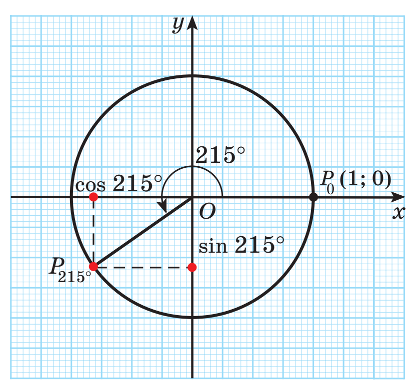


Рис. 30

Для того чтобы найти синус и косинус произвольного угла α, нужно:

① Построить точку P_α единичной окружности. ② Найти ординату точки P_α: $\sin\alpha = y_\alpha$. ③ Найти абсциссу точки P_α: $\cos\alpha = x_\alpha$.	Найдите синус и косинус угла $\alpha = 215°$. ①  ② $\sin 215° = y_{215°} \approx 0,6$. ③ $\cos 215° = x_{215°} \approx 0,8$.

Правообладатель Народная асвета

Значения синуса и косинуса произвольного угла с помощью единичной окружности в основном можно указать только приближенно.

Однако для некоторых углов значения синуса и косинуса можно указать точно. Определим значения синуса и косинуса для углов, которые соответствуют точкам пересечения окружности с осями координат (0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$ и 2π). Найдем $\sin\frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{2}$. Углу $\alpha = \frac{\pi}{2}$ соответствует точка $P_{\frac{\pi}{2}}$, имеющая координаты (0; 1). По определению синус угла $\alpha = \frac{\pi}{2}$ равен ординате точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, значит, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Косинус угла $\alpha = \frac{\pi}{2}$ равен абсциссе точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, т. е. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (рис. 31).

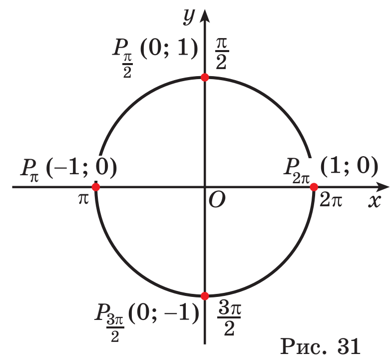


Рис. 31

Пользуясь определением синуса и косинуса угла α, получим, что: $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$; $\sin\pi = 0$; $\cos\pi = -1$; $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$; $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$; $\sin 2\pi = 0$; $\cos 2\pi = 1$.

Так как ординаты и абсциссы точек единичной окружности изменяются от –1 до 1, то значения синуса и косинуса произвольного угла принадлежат промежутку [–1; 1], т. е. $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

Например, выясним, может ли $\sin\alpha$ принимать значения, равные: $\frac{1}{3}$; $\sqrt{3}$; -2; $-0{,}7$.

Значения синуса произвольного угла принадлежат отрезку [–1; 1], значит, $\sin\alpha$ может принимать значения, равные $\frac{1}{3}$ и –0,7, так как $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$ и $-0{,}7 \in [-1; 1]$. Поскольку $\sqrt{3} \notin [-1; 1]$ и $-2 \notin [-1; 1]$, то $\sin\alpha$ не может принимать значения, равные $\sqrt{3}$ и –2.

По определению синуса и косинуса угла α, синус угла α равен ординате точки P_α, а косинус угла α равен абсциссе этой точки. Значит, знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ совпадают со знаками ординаты и абсциссы точки P_α соответственно.

Пример 1. Определите знак выражения:

а) $\sin 130°$; б) $\cos 258°$; в) $\sin(-150°)$; г) $\cos(-340°)$.

Решение. а) Так как 130° — угол второй четверти (рис. 32), а ординаты точек единичной окружности, находящихся во второй четверти, положительны, то $\sin 130° > 0$.

Правообладатель Народная асвета

б) Так как 258° — угол третьей четверти (см. рис. 32), а абсциссы точек единичной окружности, находящихся в третьей четверти, отрицательны, то $\cos 258° < 0$.

в) Так как –150° — угол третьей четверти (см. рис. 32), а ординаты точек единичной окружности, находящихся в третьей четверти, отрицательны, то $\sin(-150°) < 0$.

г) Так как –340° — угол первой четверти (см. рис. 32), а абсциссы точек единичной окружности, находящихся в первой четверти, положительны, то $\cos(-340°) > 0$.

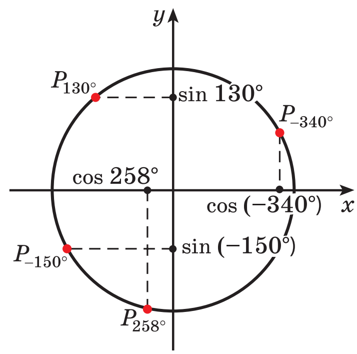


Рис. 32

Из геометрии нам известны значения синусов и косинусов острых углов (см. табл.).

Градусы	30°	45°	60°
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

С помощью этих значений можно находить значения синусов и косинусов некоторых других углов α.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sin(-60°)$ и $\cos(-60°)$; б) $\sin 120°$ и $\cos 120°$;

в) $\sin 240°$ и $\cos 240°$; г) $\sin 420°$ и $\cos 420°$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точку $P_{60°}$. Поскольку известно, что $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 60° = \frac{1}{2}$, то ордината точки $P_{60°}$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а абсцисса этой точки равна $\frac{1}{2}$.

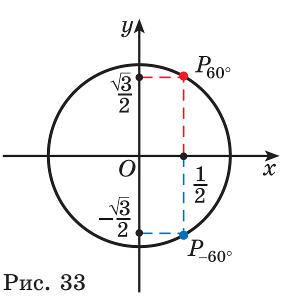


Рис. 33

Точки $P_{60°}$ и $P_{-60°}$ единичной окружности симметричны относительно оси абсцисс (рис. 33), значит, их ординаты (синусы углов 60° и –60°) противоположны, а абсциссы (косинусы углов 60° и –60°) равны. Таким образом, $\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos(-60°) = \frac{1}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

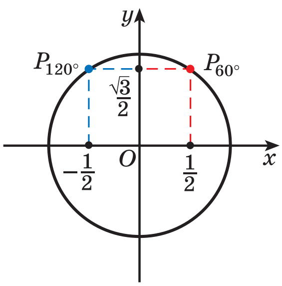


Рис. 34

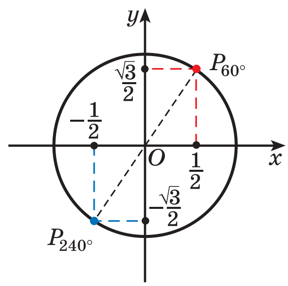


Рис. 35

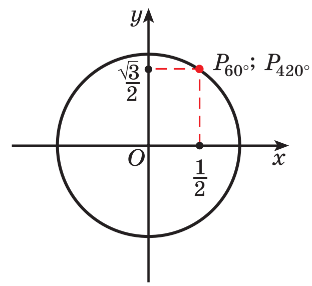


Рис. 36

б) Так как $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$, то точки P_{60° и P_{120° единичной окружности симметричны относительно оси ординат (рис. 34). Тогда их ординаты (синусы углов 60° и 120°) равны, а абсциссы (косинусы углов 60° и 120°) противоположны. Значит, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

в) Точки P_{60° и P_{240° единичной окружности симметричны относительно начала координат (рис. 35), поскольку $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$. Тогда и их ординаты противоположны, и их абсциссы противоположны, т. е. $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$.

г) Поскольку $420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$, то точки P_{60° и P_{420° единичной окружности совпадают (рис. 36), а значит, их координаты равны. Тогда $\sin 420^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 420^\circ = \frac{1}{2}$.

*Пример 3**. Вычислите:

а) $\cos \frac{9\pi}{4}$;   б) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение. а) Так как $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi + \pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, то точка $P_{\frac{9\pi}{4}}$ единичной окружности совпадает с точкой $P_{\frac{\pi}{4}}$ (рис. 37).

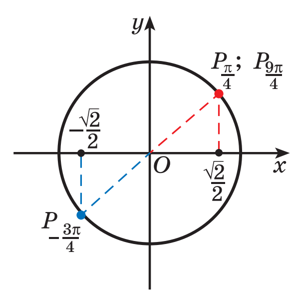


Рис. 37

Поскольку $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Точки $P_{-\frac{3\pi}{4}}$ и $P_{\frac{\pi}{4}}$ единичной окружности симметричны относительно начала координат (см. рис. 37), а значит, их абсциссы (косинусы углов $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{3\pi}{4}$) отличаются только знаком. Так как $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

Пример 4. Постройте один из углов, если:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; б) $\cos\alpha = 0{,}8$.

Решение. а) Так как $y_\alpha = \sin\alpha$, то на оси ординат отметим $\frac{1}{4}$. Проведем прямую, параллельную оси абсцисс, и найдем на единичной окружности точки P_{α_1} и P_{α_2}, ордината каждой из которых равна $\frac{1}{4}$. Отметим один из углов, соответствующих точкам P_{α_1} или P_{α_2} (рис. 38, *а*).

б) Так как $x_\alpha = \cos\alpha$, то на оси абсцисс отметим 0,8. Проведем прямую, параллельную оси ординат, и найдем на единичной окружности точки P_{α_1} и P_{α_2}, абсцисса каждой из которых равна 0,8. Отметим один из углов, соответствующих точкам P_{α_1} или P_{α_2} (рис. 38, *б*).

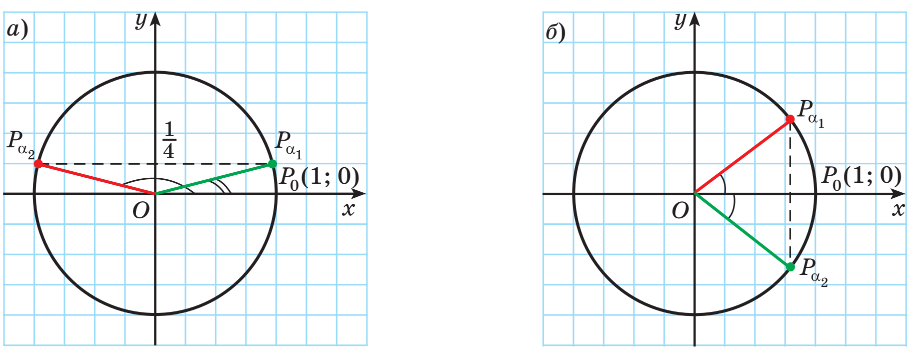


Рис. 38

Примеры основных заданий и их решения

1. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(\frac{1}{5};\ -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$. Используя определение синуса и косинуса произвольного угла, найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Решение. Синусом угла α называется ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α. По условию ордината точки P_α равна $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, значит, $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Правообладатель Народная асвета

Косинусом угла α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α. По условию абсцисса точки P_α равна $\frac{1}{5}$, значит, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

2. Если $\sin\alpha = -1$, то угол α может быть равен:

а) $180°$; б) $90°$; в) $-90°$;
г) $-180°$; д) $-270°$.

Выберите правильный ответ.

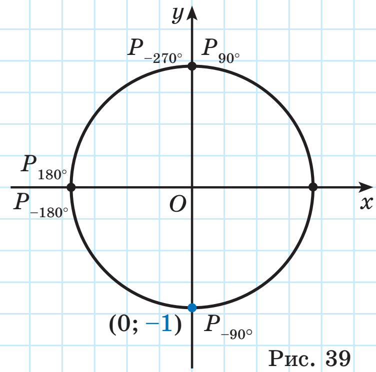


Рис. 39

Решение. Так как синусом угла α называется ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α, то нужно найти точку единичной окружности, ордината которой равна -1. Эта точка лежит на оси ординат, и из данных углов ей соответствует угол $\alpha = -90°$ (рис. 39). Правильный ответ в).

3. Если $\cos\alpha = 0$, то угол α может быть равен:

а) $180°$ б) $360°$; в) $450°$;
г) $900°$; д) $-360°$.

Выберите правильный ответ.

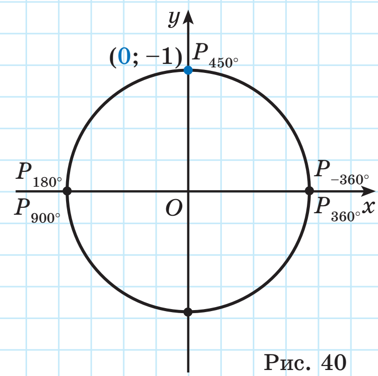


Рис. 40

Решение. Так как косинусом угла α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α, то нужно найти точку единичной окружности, абсцисса которой равна 0. Эта точка лежит на оси ординат, и из данных углов ей соответствует угол $\alpha = 450°$ (рис. 40). Правильный ответ в).

4. Найдите значение выражения:

а) $\cos 180° + \sin 90°$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. а) Абсцисса точки $P_{180°}$, соответствующей углу $180°$, равна -1 (рис. 41), значит, $\cos 180° = -1$. Ордината точки $P_{90°}$, соответствует-

Правообладатель Народная асвета

ствующей углу $90°$, равна 1 (см. рис. 41), т. е. $\sin 90° = 1$. Значит, $\cos 180° + \sin 90° = -1 + 1 = 0$.

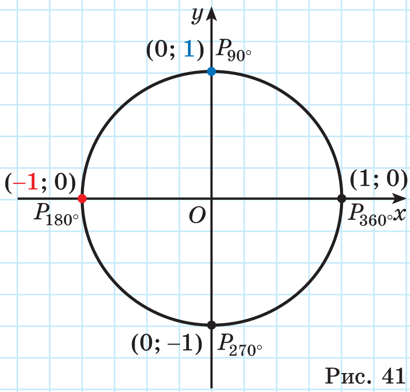


Рис. 41

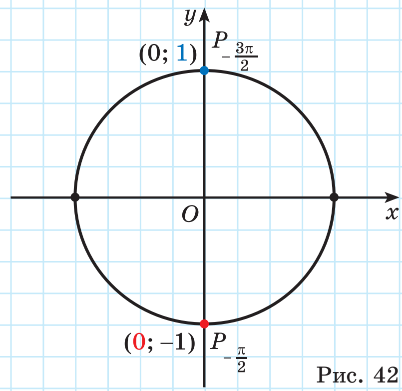


Рис. 42

б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, а $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ (рис. 42), тогда $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) =$ $= 0 - 1 = -1$.

5. Может ли $\cos\alpha$ быть равным:

а) $1{,}2$; б) $0{,}89$; в) $-\sqrt{5}$; г) $-\frac{3}{7}$?

Решение. Поскольку $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $\cos\alpha$:

а) не может быть равным $1{,}2$, так как $1{,}2 \notin [-1;\ 1]$;

б) может быть равным $0{,}89$, так как $0{,}89 \in [-1;\ 1]$;

в) не может быть равным $-\sqrt{5}$, так как $-\sqrt{5} \notin [-1;\ 1]$;

г) может быть равным $-\frac{3}{7}$, так как $-\frac{3}{7} \in [-1;\ 1]$.

6. Определите знак выражения:

а) $\cos(-49°)$; б) $\cos(-297°)$; в) $\sin\frac{18\pi}{19}$; г) $\sin 6$.

Решение. а) $\cos(-49°) > 0$, так как $-49°$ — угол четвертой четверти, а косинус в четвертой четверти положителен;

б) $\cos(-297°) > 0$, так как $-297°$ — угол первой четверти, а косинус в первой четверти положителен;

в) $\sin\frac{18\pi}{19} > 0$, так как $\frac{18\pi}{19}$ — угол второй четверти, а синус во второй четверти положителен;

Правообладатель Народная асвета

г) $\sin 6 < 0$, так как 6 радиан — угол четвертой четверти, а синус в четвертой четверти отрицателен.

7. Сравните: а) $\sin 122°$ и $\sin 170°$; б) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{10\pi}{9}$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точки, соответствующие углам 122° и 170°, и сравним ординаты этих точек. Ордината точки $P_{122°}$ больше ординаты точки $P_{170°}$ (рис. 43), значит, $\sin 122° > \sin 170°$.

б) Сравним абсциссы точек единичной окружности $P_{\frac{10\pi}{9}}$ и $P_{\frac{\pi}{8}}$. Так как абсцисса точки $P_{\frac{\pi}{8}}$ больше абсциссы точки $P_{\frac{10\pi}{9}}$ (рис. 44), то $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{10\pi}{9}$.

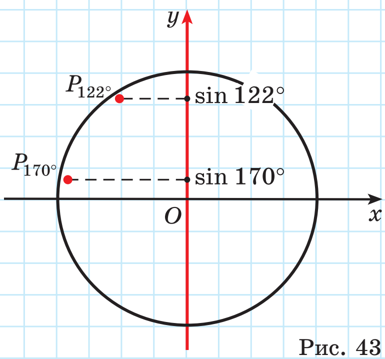


Рис. 43

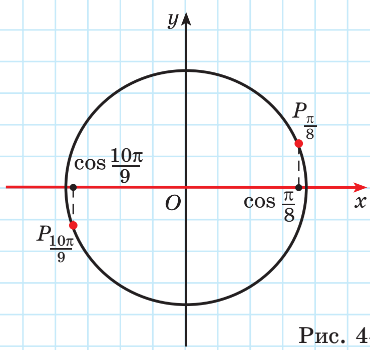


Рис. 44

8. С помощью единичной окружности найдите значение:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$.

Решение. а) Ордината точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$ равна ординате точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 45), поэтому $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Абсцисса точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$ противоположна абсциссе точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (см. рис. 45), поэтому $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

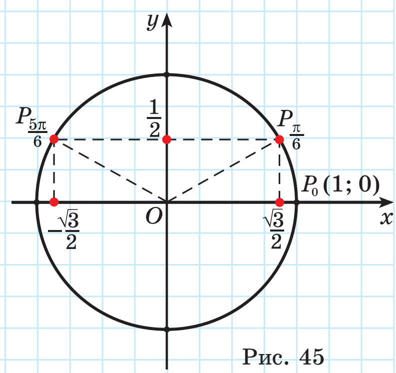


Рис. 45

Правообладатель Народная асвета

1. Абсцисса точки P_α единичной окружности равна 0,3. Тогда верно равенство:
а) $\sin\alpha = 0{,}3$; б) $\sin\alpha = -0{,}3$; в) $\cos\alpha = 0{,}3$; г) $\cos\alpha = -0{,}3$.
Выберите правильный ответ.

2. Известно, что углам α и β соответствуют точки $P_\alpha\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ и $P_\beta\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. Выберите все верные равенства:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; в) $\cos\beta = -\frac{1}{4}$; г) $\cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

1.43. Используя определение синуса и косинуса произвольного угла, найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты:

а) $P_\alpha\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; б) $P_\alpha\left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$;

в) $P_\alpha\left(\frac{1}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; г) $P_\alpha(-0{,}8; 0{,}6)$.

В какой координатной четверти расположена каждая точка?

1.44. С помощью единичной окружности (рис. 46) найдите приближенные значения синуса и косинуса угла: а) 40°; б) 170°; в) 250°; г) –70°.

1.45. С помощью единичной окружности (рис. 47) найдите приближенное значение выражения:

а) $\sin\frac{2\pi}{5}$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; в) $\sin\frac{13\pi}{10}$; г) $\cos 0{,}6\pi$.

1.46. Для некоторого угла α известно, что $\sin\alpha = 1$. Тогда угол α может быть равным: а) 90°; б) 270°; в) –180°; г) 450°. Выберите правильный ответ.

Назовите еще два положительных и два отрицательных угла α, для которых верно равенство $\sin\alpha = 1$.

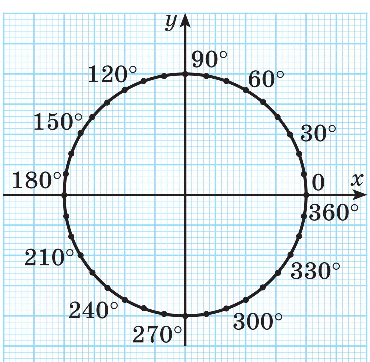


Рис. 46

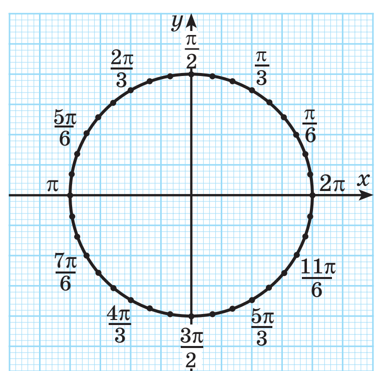


Рис. 47

Правообладатель Народная асвета

1.47. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$;

г) $\cos\alpha = 1$; д) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$; е) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

1.48. Найдите значение выражения:

а) $\cos 180° - \sin 270°$; б) $\sin 0° - \cos 0°$;
в) $2\cos(-180°) - \sin 360°$; г) $\sin(-180°) + 5\sin(-270°)$;
д) $-\sin 90° + 3\cos 0°$; е) $8\sin 180° - 6\cos(-270°)$.

1.49. Вычислите:

а) $\cos 360° \cdot \cos 30° \cdot \sin 45°$; б) $\sin(-90°) - \cos 60° + \sin 30°$;

в) $\cos(-90°) + \cos^2 30°$; г) $\sin 450° - \cos 60° + \sin^2 45°$.

1.50. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\pi + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\frac{3\pi}{2} + 2\cos\pi$; г) $2\sin(-2\pi) + \cos(-\pi)$;

д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\pi \cdot \cos 2\pi$; е) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 8\sin(-\pi) - \cos 2\pi$.

1.51. Вычислите:

а) $\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6}$; б) $-\cos 2\pi \cdot \cos\frac{\pi}{4}$;

в) $\sin\pi + \sin^2\frac{\pi}{4}$; г) $3\cos(-5\pi) + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$.

1.52. Верно ли, что:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\cos(-\pi) = -\cos\pi$; г) $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$?

1.53. Какие значения может принимать синус произвольного угла? Из чисел $\frac{3}{7}$; -5; $1{,}2$; $-0{,}8$; $\sqrt{3}$; 0; $\frac{1}{\sqrt{5}}$ выберите числа, которым может быть равен $\sin\alpha$.

1.54. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам поворота α, β, γ и φ (рис. 48). Сравните с нулем значения синуса и косинуса этих углов.

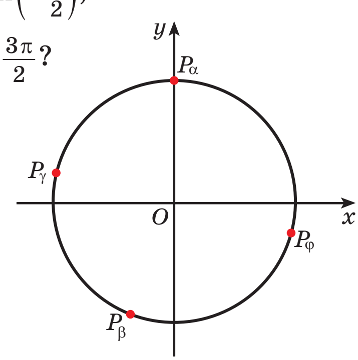


Рис. 48

Правообладатель Народная асвета

1.55. Определите знак выражения:

а) $\cos 811°$; б) $\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$;

в) $\sin 4$; г) $\cos 6$.

1.56. Определите знак выражения:

а) $\cos 451° \cdot \sin(-92°)$; б) $\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right) \cdot \cos 1{,}1\pi$.

1.57. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$; б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$?

1.58. Сравните:

а) $\sin 40°$ и $\sin 50°$; б) $\sin 100°$ и $\sin 110°$;
в) $\sin(-20°)$ и $\sin(-40°)$; г) $\sin 192°$ и $\sin 48°$.

1.59. Сравните:

а) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{5\pi}{8}$; б) $\cos 0{,}7\pi$ и $\cos 0{,}8\pi$;

в) $\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$; г) $\cos 1{,}1\pi$ и $\cos 0{,}1\pi$.

1.60. Сравните:

а) $\sin 3$ и $\sin\pi$; б) $\cos 4$ и $\cos 5$; в) $\sin 1$ и $\cos 1$.

1.61. Верно ли, что:

а) $\sin(-45°) = -\sin 45°$; б) $\cos(-60°) = -\cos 60°$;
в) $\sin 120° = \sin 60°$; г) $\cos 135° = -\cos 45°$?

1.62. С помощью единичной окружности найдите:

а) $\sin(-30°)$ и $\cos(-30°)$; б) $\sin 150°$ и $\cos 150°$;
в) $\sin 210°$ и $\cos 210°$; г) $\sin 390°$ и $\cos 390°$.

1.63. Из углов 60°; 120°; 300°; –60°; –210°; 420°; –780° выберите те, косинусы которых равны $\frac{1}{2}$.

1.64. Постройте один из углов α, для которого:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$; б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

1.65*. С помощью единичной окружности и значений синусов и косинусов углов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ (см. табл. на с. 21) вычислите:

а) $\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\cos\frac{7\pi}{6}$;

в) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{19\pi}{6}$.

Правообладатель Народная асвета

1.66. Используя определение синуса и косинуса произвольного угла, найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты: а) $P_\alpha(-0,6; 0,8)$; б) $P_\alpha\left(-\frac{8}{17}; -\frac{15}{17}\right)$.

В какой координатной четверти расположена каждая точка?

1.67. С помощью единичной окружности (см. рис. 46) найдите приближенные значения синуса и косинуса угла:

а) $70°$; б) $220°$; в) $-80°$.

1.68. С помощью единичной окружности (см. рис. 47) найдите приближенное значение выражения:

а) $\cos\frac{\pi}{5}$; б) $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$; в) $\cos\frac{11\pi}{9}$.

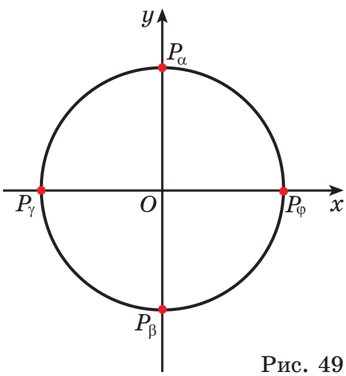


Рис. 49

1.69. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам поворота α, β, γ и φ (рис. 49). Найдите:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\varphi$; в) $\sin\gamma$;
г) $\cos\gamma$; д) $\sin\beta$; е) $\cos\beta$.

1.70. Назовите два положительных и два отрицательных угла α, для которых верно равенство $\sin\alpha = 0$.

1.71. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\cos\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\sin\alpha = -1$; г) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

1.72. Найдите значение выражения:

а) $\sin 90° + \cos 180°$; б) $\cos(-180°) - 2\sin 270°$;
в) $\sin 180° - 5\cos(-270°)$; г) $\cos 180° + \cos 60°$;
д) $\cos 0° \cdot \sin 45° \cdot \cos 45°$; е) $\sin(-90°) + \sin^2 60°$.

1.73. Вычислите:

а) $\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos(-\pi)$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{3\pi}{2}$;
в) $\cos(-2\pi) + 2\cos\frac{\pi}{3}$; г) $\cos\pi \cdot \cos\frac{\pi}{6}$;
д) $\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$; е) $\sin\pi - \cos^2\frac{\pi}{4}$.

Правообладатель Народная асвета

1.74. Какие значения может принимать косинус произвольного угла? Из чисел $\frac{2}{5}$; -3; $2,4$; $-0,3$; $\sqrt{2}$; 1; $\frac{1}{\sqrt{7}}$ выберите числа, которым может быть равен $\cos\alpha$.

1.75. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 50). Сравните с нулем значения синуса и косинуса этих углов.

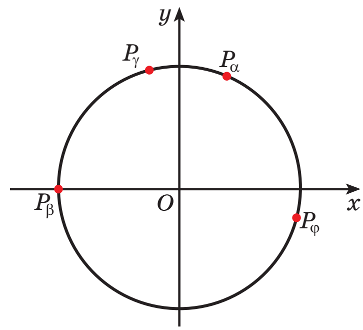


Рис. 50

1.76. Определите знак выражения:

а) $\cos 1125°$; б) $\sin\left(-\frac{12\pi}{17}\right)$;

в) $\sin 3$; г) $\cos\frac{15\pi}{8}$.

1.77. Сравните:

а) $\sin 130°$ и $\sin 140°$; б) $\cos 40°$ и $\cos 50°$;
в) $\cos(-80°)$ и $\cos(-81°)$; г) $\sin(-22°)$ и $\sin(-43°)$.

1.78. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$?

1.79. С помощью единичной окружности найдите:

а) $\sin(-45°)$ и $\cos(-45°)$; б) $\sin 135°$ и $\cos 135°$;
в) $\sin 225°$ и $\cos 225°$; г) $\sin 405°$ и $\cos 405°$.

1.80. Из углов $30°$; $120°$; $-60°$; $-210°$; $-330°$; $750°$ выберите те, синусы которых равны $\frac{1}{2}$.

1.81. Постройте один из углов α, для которого: а) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; б) $\sin\alpha = -0,2$.

1.82*. Вычислите:

а) $\cos\frac{2\pi}{3}$; б) $\sin\frac{7\pi}{6}$; в) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

1.83. Для функции $g(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x-1)^2}$ найдите, если это возможно:

а) $g(0)$; б) $g(-1)$; в) $g(-2)$; г) $g(1)$.

1.84. Выберите функцию, график которой получен из графика функции $y = -7x^2$ сдвигом его на 4 единицы вниз вдоль оси ординат:

а) $y = -7x^2 + 4$; б) $y = -7(x + 4)^2$;
в) $y = -7x^2 - 4$; г) $y = -(7x + 4)^2$.

Правообладатель Народная асвета

§ 3. Определение тангенса и котангенса произвольного угла

1.85. Из данных выражений выберите выражения, области определения которых совпадают:

а) $\dfrac{4}{x(x+2)}$; б) $x^3 - 4x^2 + 2$; в) $\dfrac{8}{x^2} - \dfrac{3x}{7x+14}$;

г) $\dfrac{12x-1}{x^2+1}$; д) $\dfrac{15}{x^2-4}$.

1.86. Найдите область определения функции $y = \sqrt{(x-1)(x+3)}$.

1.87. Из данных функций выберите функции, достигающие наименьшего значения при $x = 1$:

а) $f(x) = 2(x-1)^2$; б) $f(x) = -3(x-1)^2$;
в) $f(x) = (x-1)^2 - 5$; г) $f(x) = (x-1)^2 + 5$.

Построим точку $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ единичной окружности поворотом точки P_0 вокруг начала координат на угол α. Рассмотрим прямоугольный треугольник $P_\alpha OH$, в котором гипотенуза $P_\alpha O$ равна 1 (радиусу единичной окружности), а его катеты равны: $OH = \cos\alpha$, $HP_\alpha = \sin\alpha$ (рис. 51).

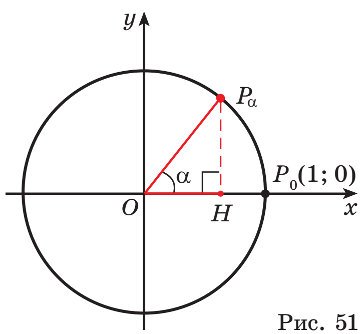


Рис. 51

По определению тангенса острого угла получим: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{HP_\alpha}{OH} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Определение. Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу угла α: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Например, $\operatorname{tg}0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Используя определение тангенса угла и значения синуса и косинуса этого угла, найдем также значения тангенсов углов $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{3}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Поскольку $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$ не существует.

Правообладатель Народная асвета

Через точку P_0 проведем прямую, перпендикулярную оси абсцисс, и продолжим луч OP_α до пересечения с этой прямой в точке A (рис. 52). Получим треугольник OAP_0, подобный треугольнику $OP_\alpha H$.

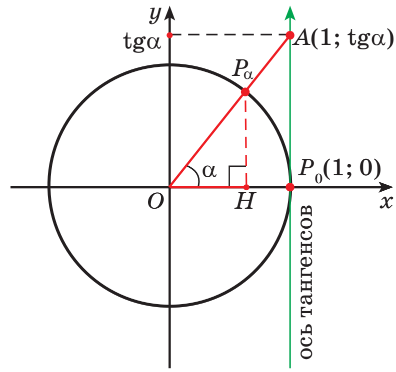
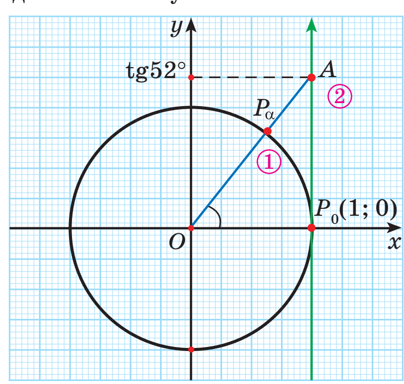


Рис. 52

Из подобия треугольников OAP_0 и $OP_\alpha H$ запишем равенство отношений их сторон: $\frac{AP_0}{OP_0} = \frac{P_\alpha H}{OH}$, или $\frac{AP_0}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поскольку $AP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, то ордината точки A равна тангенсу угла α.

Прямая, перпендикулярная оси абсцисс, проходящая через точку P_0, называется **осью тангенсов.**

Для того чтобы найти тангенс произвольного угла α с помощью оси тангенсов, нужно:

① Построить точку P_α на единичной окружности. ② Продолжить прямую OP_α до пересечения с осью тангенсов. ③ Найти ординату точки пересечения прямой OP_α с осью тангенсов.	Найдите тангенс угла $\alpha = 52°$.  ③ $\operatorname{tg} 52° \approx 1{,}3$.

Значения тангенса произвольного угла с помощью оси тангенсов можно указать только приближенно. Для нахождения значения тангенса произвольного угла используют четырехзначные таблицы значений тангенса (синуса, косинуса)* или калькулятор. Методы высшей математики позволяют вычислять значения тангенса (синуса, косинуса) с любой заданной степенью точности.

* Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы. — 13-е изд., стер. — М. : Дрофа, 2010. — 96 с.

Правообладатель Народная асвета

Пример 1. Определите с помощью оси тангенсов:

а) $\operatorname{tg} 40°$; б) $\operatorname{tg} 160°$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$.

Решение.

а) $\operatorname{tg} 40° \approx 0{,}8$ (рис. 53); б) $\operatorname{tg} 160° \approx -0{,}4$ (см. рис. 53);

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx -0{,}6$ (рис. 54); г) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} \approx 1{,}7$ (см. рис. 54).

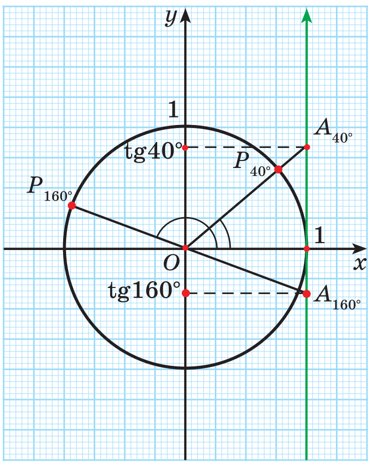


Рис. 53

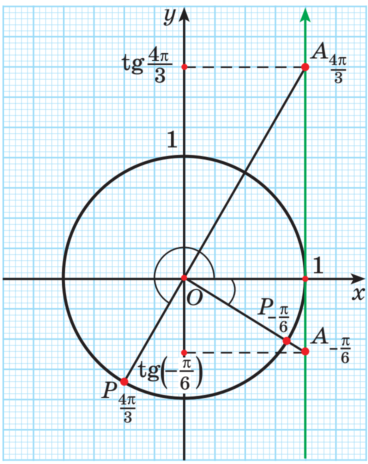


Рис. 54

Пример 2. С помощью оси тангенсов сравните значения выражений $\operatorname{tg} 30°$ и $\operatorname{tg} 160°$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точки, соответствующие углам 30° и 160° (рис. 55), и сравним ординаты этих точек. Ордината точки $A_{30°}$ больше ординаты точки $A_{160°}$, значит, $\operatorname{tg} 30° > \operatorname{tg} 160°$.

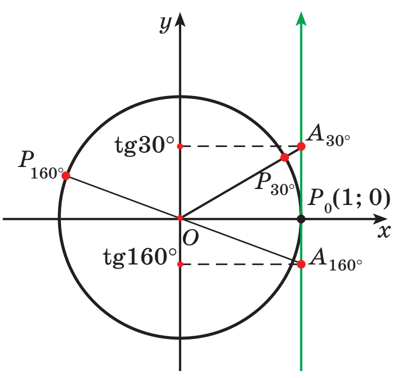


Рис. 55

Для углов $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; ... тангенс не существует, так как косинусы этих углов равны нулю. Например, $\operatorname{tg} 630°$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ не существуют.

Построим точку $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ единичной окружности поворотом точки P_0 вокруг начала координат на угол α. Рассмотрим прямоугольный треугольник $P_\alpha OH$, в котором гипотенуза $P_\alpha O$ равна 1 (радиусу единичной

Правообладатель Народная асвета

окружности), а его катеты равны: $OH = \cos\alpha$, $HP_\alpha = \sin\alpha$ (рис. 56).

По определению котангенса острого угла получим: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OH}{HP_\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

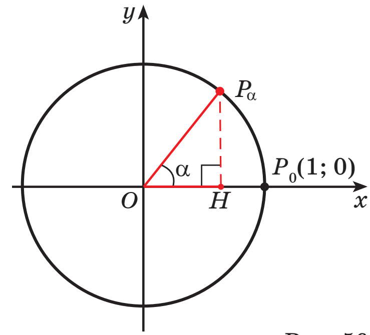


Рис. 56

> **Определение.** Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к синусу угла α: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Например, $\operatorname{ctg} 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Воспользуемся полученным равенством и найдем значения котангенсов углов $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$: $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Поскольку $\sin 0 = 0$, то $\operatorname{ctg} 0$ не существует.

Найденные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 0°; 30°; 45°; 60° и 90° занесем в таблицу.

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Правообладатель Народная асвета

Пример 3. Найдите значение выражения
$\operatorname{ctg} 45° + \operatorname{ctg} 30° - \operatorname{tg} 60° + 2\sin 30°$.

Решение. $\operatorname{ctg} 45° + \operatorname{ctg} 30° - \operatorname{tg} 60° + 2\sin 30° = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$

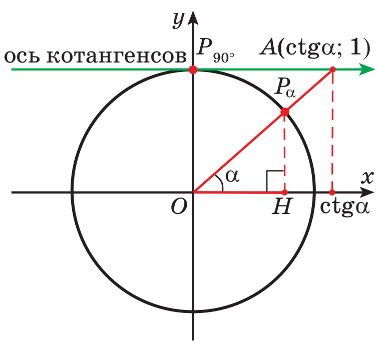


Рис. 57

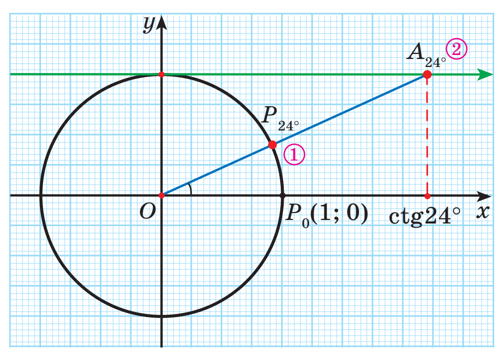
Через точку $P_{90°}(0; 1)$ проведем прямую, перпендикулярную оси ординат, и продолжим луч OP_α до пересечения с этой прямой в точке A (рис. 57).

Получим треугольник $OAP_{90°}$, подобный треугольнику $P_\alpha OH$.

Из подобия треугольников $OAP_{90°}$ и $P_\alpha OH$ запишем равенство отношений их сторон: $\frac{AP_{90°}}{OP_{90°}} = \frac{OH}{P_\alpha H}$, или $\frac{AP_{90°}}{1} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Поскольку $AP_{90°} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$, то абсцисса точки A равна котангенсу угла α.

Прямая, перпендикулярная оси ординат, проходящая через точку $P_{90°}$, называется **осью котангенсов**.

Для того чтобы найти котангенс произвольного угла α с помощью оси котангенсов, нужно:

① Построить точку P_α на единичной окружности. ② Продолжить прямую OP_α до пересечения с осью котангенсов. ③ Найти абсциссу точки пересечения прямой OP_α с осью котангенсов.	Найдите котангенс угла α = 24°.  ③ $\operatorname{ctg} 24° \approx 2{,}2$.

Значения котангенса произвольного угла с помощью оси котангенсов можно указать только приближенно.

Пример 4. Определите с помощью оси котангенсов:

а) $\operatorname{ctg} 40°$; б) $\operatorname{ctg} 140°$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}$.

Правообладатель Народная асвета

Решение.

а) $\operatorname{ctg} 40° \approx 1{,}2$ (рис. 58);

б) $\operatorname{ctg} 140° \approx -1{,}2$ (см. рис. 58);

в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx 1{,}7$ (рис. 59);

г) $\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3} \approx 0{,}6$ (см. рис. 59).

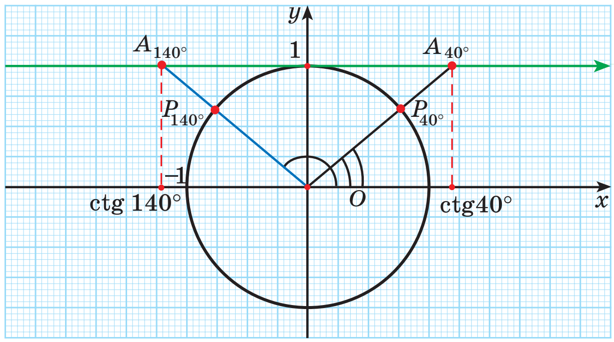


Рис. 58

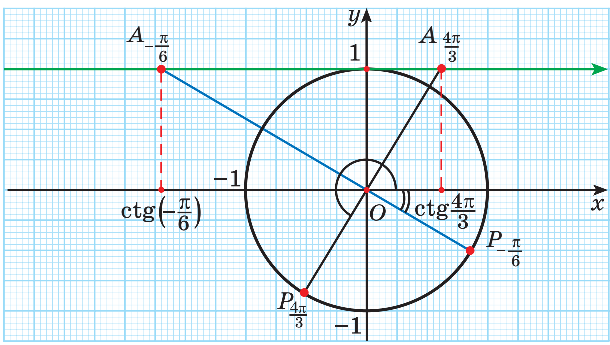


Рис. 59

Пример 5. С помощью оси котангенсов сравните значения выражений $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{15}$.

Решение. Отметим на оси котангенсов точки, соответствующие углам $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{15}$ (рис. 60), и сравним абсциссы этих точек. Абсцисса точки $A_{\frac{2\pi}{15}}$ больше абсциссы точки $A_{\frac{2\pi}{5}}$, значит, $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{15} > \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$.

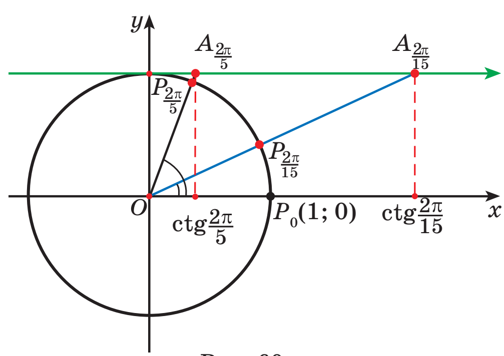


Рис. 60

Правообладатель Народная асвета

Для углов 0, π, 2π и т. д. котангенс не существует, так как синусы этих углов равны нулю. Например, $\operatorname{ctg} 900°$, $\operatorname{ctg}(-3\pi)$ не существуют.

Пример 6. С помощью оси:

а) тангенсов найдите один из углов, тангенс которого равен $\frac{3}{4}$;

б) котангенсов найдите один из углов, котангенс которого равен $-\frac{5}{4}$.

Решение. а) ① Отметим на оси тангенсов точку A_α, ордината которой равна $\frac{3}{4}$ (рис. 61).

② Соединим эту точку с началом координат.
③ Найдем соответствующую точку P_α на единичной окружности.
④ Отметим один из углов, соответствующий этой точке (см. рис. 61).

б) ① Отметим на оси котангенсов точку A_α, абсцисса которой равна $-\frac{5}{4}$ (рис. 62).
② Соединим эту точку с началом координат.
③ Найдем соответствующую точку P_α на единичной окружности.
④ Отметим один из углов, соответствующий этой точке (см. рис. 62).

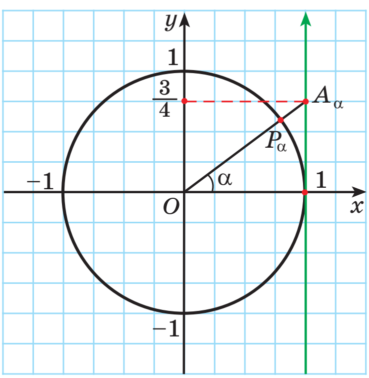


Рис. 61

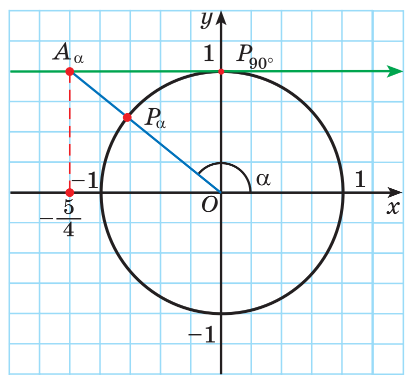


Рис. 62

Примеры основных заданий и их решения

1. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Используя определение тангенса и котангенса произвольного угла, найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. Так как точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, то $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, а $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

По определению тангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$.

По определению котангенса: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, значит, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}$.

2. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

3. Найдите, если это возможно, значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\pi$; б) $\operatorname{ctg}2\pi$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(-8{,}5\pi)$.

Решение. а) $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$;

б) $\operatorname{ctg}2\pi$ не существует, так как $\sin 2\pi = 0$;

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ не существует, так как $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$;

г) $\operatorname{ctg}(-8{,}5\pi) = \frac{\cos(-8{,}5\pi)}{\sin(-8{,}5\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$.

4. Если $\operatorname{tg}\alpha = 0$, то α может принимать значения:

а) $180°$; б) $90°$; в) $-90°$; г) $-180°$; д) $-270°$.

Выберите правильные ответы.

Решение. Так как тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу угла α, то нужно найти те углы α, синус которых равен нулю. Среди предложенных углов это углы $-180°$ и $180°$.

Можно также использовать ось тангенсов: найти точку на оси тангенсов, у которой ордината равна нулю (рис. 63), и определить соответствующие углы.

Правильные ответы а) и г).

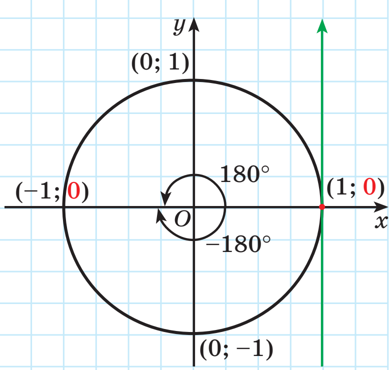


Рис. 63

Правообладатель Народная асвета

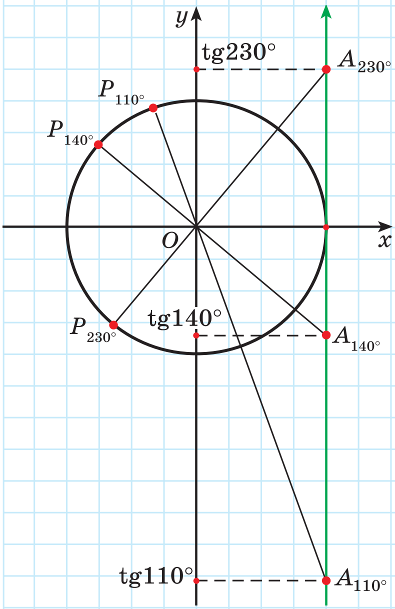


Рис. 64

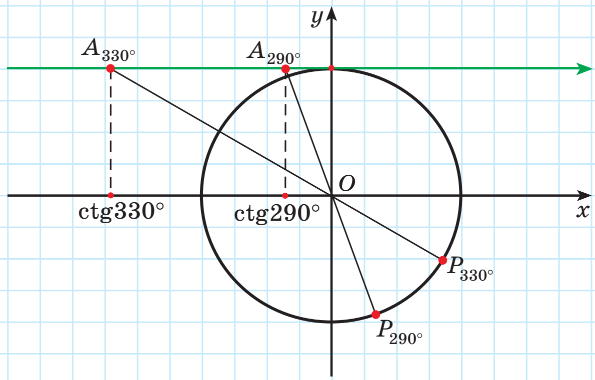


Рис. 65

5. Расположите в порядке возрастания: $\operatorname{tg}110°$; $\operatorname{tg}140°$ и $\operatorname{tg}230°$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точки, соответствующие углам 110°, 140° и 230° (рис. 64), и сравним ординаты этих точек. Поскольку ордината точки $A_{110°}$ меньше ординаты точки $A_{140°}$, а ордината точки $A_{140°}$ меньше ординаты точки $A_{230°}$, то $\operatorname{tg}110° < \operatorname{tg}140° < \operatorname{tg}230°$.

6. Верно ли, что $\operatorname{ctg}290° > \operatorname{ctg}330°$?

Решение. Отметим на оси котангенсов точки, соответствующие углам 290° и 330° (рис. 65), и сравним абсциссы этих точек. Поскольку абсцисса точки $A_{290°}$ больше абсциссы точки $A_{330°}$, то неравенство $\operatorname{ctg}290° > \operatorname{ctg}330°$ верное.

7. Определите знак выражения:

а) $\operatorname{tg}118°$; б) $\operatorname{ctg}(-149°)$.

Решение. а) Первый способ. По определению тангенса: $\operatorname{tg}118° = \frac{\sin 118°}{\cos 118°}$. Так как угол 118° находится во второй четверти, то $\sin 118° > 0$, а $\cos 118° < 0$, значит, $\operatorname{tg}118° < 0$.

Второй способ. Отметим на оси тангенсов точку, соответствующую углу 118° (рис. 66). Ордината точки $A_{118°}$ равна $\operatorname{tg}118°$. Поскольку точка $A_{118°}$ имеет отрицательную ординату, то $\operatorname{tg}118° < 0$.

Правообладатель Народная асвета

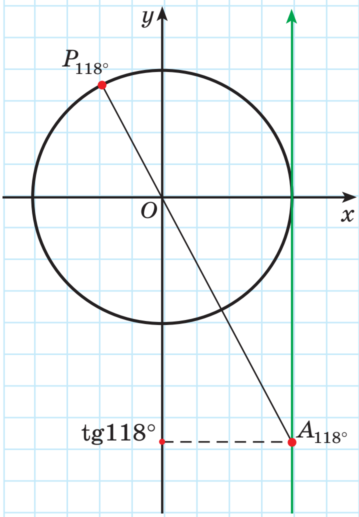


Рис. 66

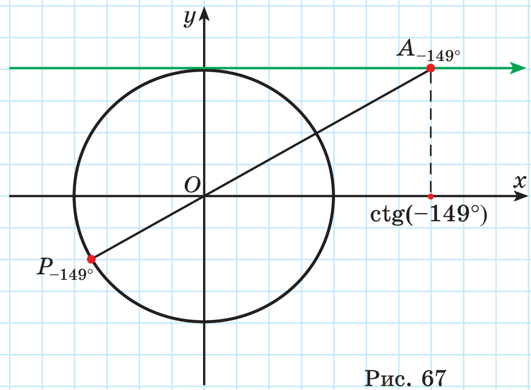


Рис. 67

б) Первый способ. По определению котангенса: $\mathrm{ctg}(-149°) = \dfrac{\cos(-149°)}{\sin(-149°)}$. Так как угол –149° находится в третьей четверти, то $\sin(-149°) < 0$ и $\cos(-149°) < 0$, значит, $\mathrm{ctg}(-149°) > 0$.

Второй способ. Отметим на оси котангенсов точку, соответствующую углу –149° (рис. 67). Абсцисса точки $A_{-149°}$ равна ctg(–149°). Поскольку точка $A_{-149°}$ имеет положительную абсциссу, то $\mathrm{ctg}(-149°) > 0$.

8. Определите знак произведения $\mathrm{ctg}\,3 \cdot \mathrm{tg}\,4$.

Решение. Так как угол 3 радиана находится во второй четверти, а угол 4 радиана — в третьей, то $\mathrm{ctg}\,3 < 0$, а $\mathrm{tg}\,4 > 0$, значит, $\mathrm{ctg}\,3 \cdot \mathrm{tg}\,4 < 0$.

?

1. На единичной окружности задана точка $P_\alpha(0; -1)$. Тогда для угла α верными являются равенства:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = 0$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$; д) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -1$.

Выберите правильный ответ.

2. На единичной окружности задана точка $P_\alpha(0,6; 0,8)$. Тогда для угла α верными являются равенства:

а) $\sin\alpha = 0,6$; б) $\cos\alpha = 0,6$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0,6$; д) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$.

Выберите правильный ответ.

Правообладатель Народная асвета

1.88. Используя определение тангенса и котангенса произвольного угла, найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты:

а) $P_\alpha\left(\frac{5}{13};\ -\frac{12}{13}\right)$; б) $P_\alpha\left(\frac{1}{7};\ \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$;

в) $P_\alpha(-0{,}8;\ -0{,}6)$; г) $P_\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

1.89. С помощью оси тангенсов (рис. 68) найдите приближенные значения тангенса угла:

а) $25°$; б) $160°$; в) $230°$; г) $-55°$.

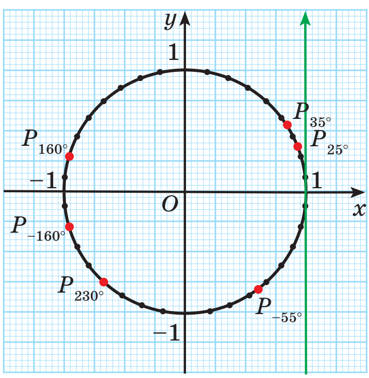


Рис. 68

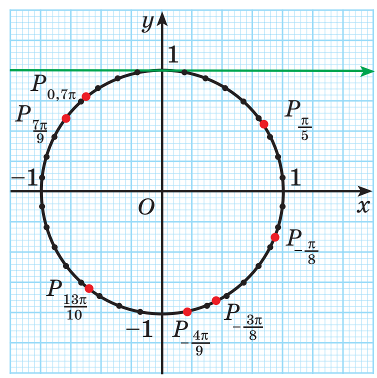


Рис. 69

1.90. С помощью оси котангенсов (рис. 69) найдите приближенное значение выражения:

а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; в) $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{10}$; г) $\operatorname{ctg}0{,}7\pi$.

1.91. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; б) $\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}$;

в) $6\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+4\cos\frac{\pi}{3}-9\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

1.92. С помощью единичной окружности найдите значение выражения (если это возможно):

а) $\operatorname{ctg}90°$; б) $\operatorname{tg}3\pi$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(-540°)$.

1.93. Для каких углов α не существует $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$?

Правообладатель Народная асвета

1.94. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; в) $\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

г) $2\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; е) $\cos(-3\pi) + 7\operatorname{tg}5\pi$.

1.95. Найдите несколько значений α, при которых:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

1.96. Сравните:

а) $\operatorname{tg}47°$ и $\operatorname{tg}53°$; б) $\operatorname{ctg}32°$ и $\operatorname{ctg}58°$;

в) $\operatorname{tg}189°$ и $\operatorname{tg}242°$;

г) $\operatorname{ctg}(-13°)$ и $\operatorname{ctg}(-25°)$.

1.97. Расположите в порядке убывания: $\operatorname{ctg}46°$; $\operatorname{ctg}118°$ и $\operatorname{ctg}79°$.

1.98. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам поворота α, β, γ и φ (рис. 70). Сравните с нулем значения тангенса и котангенса этих углов.

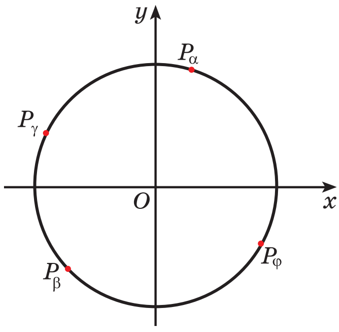


Рис. 70

1.99. Определите знак произведения:

а) $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{11} \cdot \operatorname{tg}\frac{14\pi}{13}$; б) $\operatorname{ctg}(-401°) \cdot \operatorname{ctg}(-739°)$; в) $\operatorname{ctg}4 \cdot \operatorname{tg}3$.

1.100. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; б) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$?

1.101. С помощью оси тангенсов найдите один из углов, тангенс которого равен: а) $\frac{5}{3}$; б) $-\frac{2}{5}$.

1.102. С помощью оси котангенсов найдите один из углов, котангенс которого равен: а) 2; б) $-\frac{2}{3}$.

1.103. Верно ли, что:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$?

1.104. Используя определение тангенса и котангенса произвольного угла, найдите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что точка P_α единичной окружности имеет координаты:

а) $P_\alpha\left(\frac{15}{17}; -\frac{8}{17}\right)$; б) $P_\alpha(0,6; -0,8)$.

Правообладатель Народная асвета

1.105. С помощью оси тангенсов на рисунке 68 (оси котангенсов на рисунке 69) найдите приближенное значение выражения:

а) $\operatorname{tg} 35°$; б) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}(-160°)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

1.106. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$; б) $\cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3}$.

1.107. С помощью единичной окружности найдите значение выражения (если это возможно):

а) $\operatorname{ctg} 180°$; б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$; в) $\operatorname{tg}(-3\pi)$; г) $\operatorname{ctg}(-450°)$.

1.108. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + 2\cos \frac{\pi}{3}$;

в) $\sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} 2\pi$; г) $\cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$.

1.109. Найдите несколько значений α, при которых:

а) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$; б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.110. Сравните:

а) $\operatorname{ctg} 55°$ и $\operatorname{ctg} 63°$; б) $\operatorname{tg} 42°$ и $\operatorname{tg} 68°$;
в) $\operatorname{ctg} 200°$ и $\operatorname{ctg} 225°$; г) $\operatorname{tg}(-35°)$ и $\operatorname{tg}(-55°)$.

1.111. На единичной окружности отмечены точки P_α, P_β, P_γ и P_φ, соответствующие углам α, β, γ и ϕ (рис. 71). Сравните с нулем значения тангенса и котангенса этих углов.

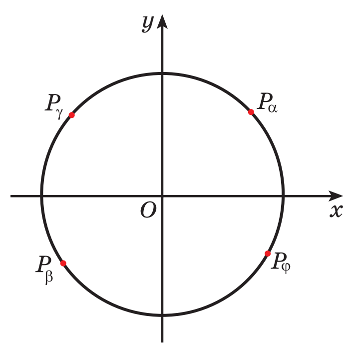


Рис. 71

1.112. Определите знак произведения:

а) $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9} \cdot \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}$;

б) $\operatorname{tg}(-511°) \cdot \operatorname{tg}(-183°)$;

в) $\operatorname{ctg} 2 \cdot \operatorname{tg} 5$.

1.113. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ и $\cos \alpha < 0$;

б) $\sin \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$?

1.114. С помощью оси тангенсов найдите один из углов, тангенс которого равен $\frac{4}{5}$.

1.115. С помощью оси котангенсов найдите один из углов, котангенс которого равен $-1{,}5$.

Правообладатель Народная асвета

1.116. Верно ли, что:

а) центром окружности, заданной уравнением $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$, является точка $(4; -8)$;

б) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + (y - 9)^2 = 36$, является точка $(0; -9)$;

в) центром окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 8$, является точка $(0; 0)$;

г) радиус окружности, заданной уравнением $(x + 5)^2 + y^2 = 16$, равен 4?

1.117. Найдите все значения переменной t, при которых:

а) $t^2 = 9$; б) $16t^2 = 1$; в) $t^2 = 5$; г) $t^2 = 0{,}75$.

1.118. Сократите дробь:

а) $\dfrac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2 - 2ac}$; б) $\dfrac{5x - 7x^2 - 5y + 7xy}{x^2 - xy}$.

§ 4. Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества)

1.119. Найдите все значения переменной m, при которых верно равенство:

а) $m^2 = 1$; б) $m^2 = \dfrac{49}{64}$; в) $m^2 = 2$; г) $m^2 = \dfrac{1}{3}$.

1.120. Определите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:

а) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$; б) $x^2 + (y + 2)^2 = 9$;
в) $(x + 5)^2 + y^2 = 7$; г) $x^2 + y^2 = 1$.

1.121. Сократите дробь $\dfrac{4a^2 - 4ab + b^2}{b^2 - 4a^2}$.

Установим соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла.

Так как центром единичной окружности является начало координат, а ее радиус равен 1 (рис. 72), то уравнение единичной окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$.

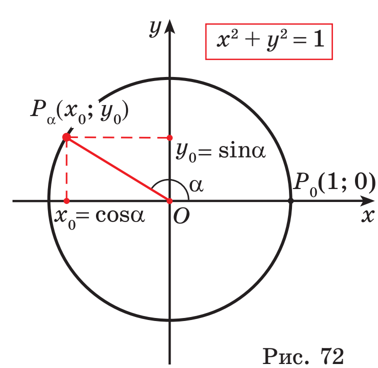


Рис. 72

Правообладатель Народная асвета

Координаты любой точки $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению этой окружности. По определению синуса и косинуса угла α точка $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ имеет координаты $x_0 = \cos\alpha$ и $y_0 = \sin\alpha$.

Подставим координаты точки $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ в уравнение единичной окружности и получим формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Полученную формулу называют **основным тригонометрическим тождеством**, а также тригонометрической единицей.

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

С помощью основного тригонометрического тождества, зная значения синуса (косинуса) угла α, можно найти косинус (синус) этого же угла.

Например, найдем $\cos\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Для этого из формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выразим $\cos^2\alpha$ и получим $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Так как $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, то найдем $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ или $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Знак $\cos\alpha$ зависит от того, в какой четверти находится угол α.

Пример 1. Известно, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Найдите $\sin\alpha$, если $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выразим $\sin^2\alpha$ и получим $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

По условию $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, тогда $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Значит, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ или $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

По условию $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ (четвертая четверть), тогда $\sin\alpha < 0$, значит, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

По определению тангенса угла α получим формулу $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Формула $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ справедлива для всех углов α таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Поскольку при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, абсцисса соответствующих точек единичной окружности равна нулю, то $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, т. е. дробь $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ при этих значениях α не имеет смысла.

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}}$$

Правообладатель Народная асвета

По определению котангенса угла α получим формулу $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Формула $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$ справедлива для всех углов α таких, что $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Поскольку при $\alpha = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ ордината соответствующих точек единичной окружности равна нулю, то $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi n$, $n \in Z$, т. е. дробь $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ при этих значениях α не имеет смысла.

Поскольку $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, то $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Формула $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ справедлива для всех углов α таких, что $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Разделим обе части основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$ и получим:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Разделив обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha$, получим формулу $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, где $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$
$$\alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$\alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

Формулы (***тригонометрические тождества***), которые мы вывели, описывают соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла.

Полученные формулы позволяют находить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если одно из этих значений известно.

Пример 2. Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ угла α, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. Из формулы $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ выразим $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Так как по условию $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75 = \frac{3}{4}$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$.

Правообладатель Народная асвета

По формуле $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ найдем $\cos\alpha$:

$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, значит, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ или $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ (третья четверть), то $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Из формулы $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ выразим $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$ и найдем $\sin\alpha =$ $= \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Рассмотрим, как тригонометрические тождества используются для упрощения выражений.

Пример 3. Упростите выражение:

а) $3 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

б) $\sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha$;

в) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$;

г) $\left(1 - \sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha - 1$.

Решение.

а) $3 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 3 - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 3 - 1 = 2$;

б) $\sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha = \cos\alpha + \cos\alpha =$ $= 2\cos\alpha$;

в) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

г) $\left(1 - \sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1 = \sin^2\alpha - 1 = -\left(1 - \sin^2\alpha\right) =$ $= -\cos^2\alpha$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Могут ли синус и косинус одного угла быть равными соответственно:

а) $\frac{5}{13}$ и $\frac{12}{13}$; б) $-0{,}3$ и $0{,}4$; в) $0{,}8$ и $0{,}6$?

Решение. Для ответа на вопрос достаточно проверить, верно ли равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (т. е. выполняется ли условие принадлежности точки P_α единичной окружности).

Правообладатель Народная асвета

а) $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25+144}{169} = 1,$ могут;

б) $(-0,3)^2 + (0,4)^2 = 0,09 + 0,16 = 0,25 \neq 1,$ не могут;

в) $(0,8)^2 + (0,6)^2 = 0,64 + 0,36 = 1,$ могут.

2. Найдите:

а) $\cos\beta$, если $\sin\beta = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

б) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $180° < \alpha < 270°$.

Решение. а) Из равенства $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ выразим $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$. Так как $\sin\beta = -\frac{5}{13}$, то $\cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$. Тогда $\cos\beta = \frac{12}{13}$ или $\cos\beta = -\frac{12}{13}$. Поскольку $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ (угол четвертой четверти), то $\cos\beta = \frac{12}{13}$.

б) Так как $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. Из формулы $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ найдем $\sin\alpha$: $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\frac{5}{4} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$. Так как $180° < \alpha < 270°$, а значения синуса угла в третьей четверти отрицательны, то $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 7$;

б) $\frac{2\sin\beta\cos\beta + 1}{\sin\beta + \cos\beta}$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$;

г) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Решение. а) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 7 = 1 - 7 = -6$;

б) $\frac{2\sin\beta\cos\beta + 1}{\sin\beta + \cos\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta + \sin^2\beta + \cos^2\beta}{\sin\beta + \cos\beta} = \frac{(\sin\beta + \cos\beta)^2}{\sin\beta + \cos\beta} = \sin\beta + \cos\beta$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 2 + 2 = 4$;

Правообладатель Народная асвета

г) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha - 1\right)\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$= -\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\left(-\sin^2\alpha + 1\right) =$

$= \cos^2\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^4\alpha.$

4*. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Решение. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 5$, т. е. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5$, тогда $\sin\alpha = 5\cos\alpha$.

Значит, $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{3 \cdot 5\cos\alpha - \cos\alpha}{5\cos\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{14\cos\alpha}{7\cos\alpha} = 2.$

?

Если $\operatorname{tg}\alpha = -2$, то:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Выберите правильный ответ.

1.122. Могут ли синус и косинус одного и того же угла быть равными соответственно:

а) 0,6 и –0,8; б) 0,2 и 0,4?

1.123. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же угла быть равными соответственно:

а) 4 и 0,25; б) $\sqrt{7}$ и $-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$?

1.124. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1.125. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $2\pi < \alpha < \dfrac{5\pi}{2}$.

1.126. Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha - 1$;

в) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 7$; г) $\dfrac{2\sin^2\alpha - 2}{1 - \cos^2\alpha}$;

д) $\cos\alpha\, \operatorname{tg}\alpha$; е) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha - 1$;

ж) $1 - \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$; з) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha$;

и) $\dfrac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; к) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} \cdot \left(\sin^2\alpha + 1\right)$.

Правообладатель Народная асвета

1.127. Найдите значение выражения:

а) $49(1-\cos^2\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{5}{7}$;

б) $36\left(\sin^2\alpha-1\right)$, если $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

1.128. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{7}{24}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

1.129. Докажите тождество:

а) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^4\alpha+\sin^2\alpha=1$;

б) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha$.

1.130. Упростите выражение:

а) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$;

б) $\frac{\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha+1}{1-\sin^2\alpha}$;

в) $\frac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-1}$;

г) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha$;

д) $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha\sin\alpha+\cos\alpha\sin^3\alpha}$;

е) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

ж) $\left(\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1\right):\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$;

з) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

1.131. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$ и $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$.

1.132. Найдите $9\sqrt{2}\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha<0$.

1.133. Докажите тождество:

а) $\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$.

1.134. Упростите выражение $(\operatorname{tg}\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha+3\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

1.135. Упростите выражение:

а) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha-(\cos\alpha\ \operatorname{tg}\alpha)^2$;

в) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

д) $\frac{\sin^3\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$;

е) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$.

1.136. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ и α лежит не во второй четверти.

Правообладатель Народная асвета

1.137. Докажите тождество:

а) $\sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos^4\alpha = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \cos^2\alpha$;

в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$.

1.138*. Найдите $\dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha + 2\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 7$.

1.139. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -0,6$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

1.140. Упростите выражение:

а) $1 - \cos^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha - 1$;

в) $5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha + 3$; г) $\dfrac{3 - 3\cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$;

д) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; е) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

ж) $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$; з) $(1 - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$.

1.141. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1.142. Докажите тождество:

а) $(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)\sin^4\alpha + \cos^2\alpha = 1$; б) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$.

1.143. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\dfrac{\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + 1}{1 - \cos^2\alpha}$; в) $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$;

г) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha$; д) $\dfrac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; е) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$;

ж) $\left(\dfrac{3\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \dfrac{3\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}\right)\cdot\cos\alpha$.

1.144. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ и $\sin\alpha < 0$.

1.145. Упростите выражение:

а) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - (\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha)^2$;

в) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

1.146. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ и α не лежит в первой четверти.

1.147*. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\dfrac{4\sin\alpha - 3\cos\alpha}{2\cos\alpha + 3\sin\alpha} = 3$.

Правообладатель Народная асвета

1.148. Найдите, не выполняя построения графика, точки пересечения с осями координат графика функции:

а) $f(x) = 8 - 9x$; б) $f(x) = 4x^2 + 3x - 1$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

1.149. Дана функция $y = q(x)$. Известно, что $q(-2) = 3$, а $q(9) = 7$. Найдите значение выражения $5q(2) - q(-9)$, если функция $y = q(x)$ является:

а) четной; б) нечетной.

1.150. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 73, найдите:

а) область определения функции;
б) множество значений функции;
в) нули функции;
г) промежутки знакопостоянства функции;
д) промежутки возрастания и убывания функции;
е) наибольшее и наименьшее значения функции.

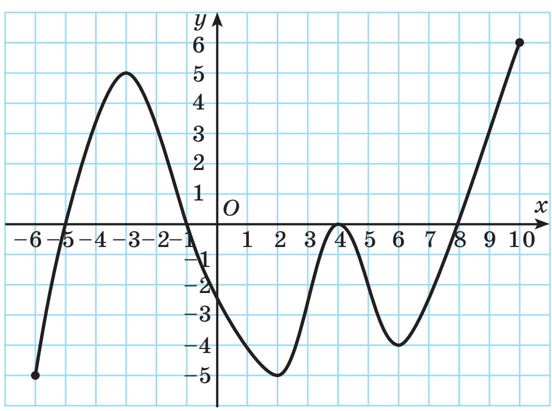


Рис. 73

§ 5. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Их свойства и графики

1.151. Известно, что функция $y = f(x)$ нечетная, а функция $y = q(x)$ четная и $f(2) = -5$; $q(7) = 9$. Найдите значение выражения $f(-2) + 3q(-7)$.

1.152. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2x + 1}$.

1.153. Найдите множество значений функции $y = x^2 + 5x - 6$.

Правообладатель Народная асвета

Функция $y = \sin x$. Свойства и график

Рассматривая произвольное действительное число x, мы можем поставить ему в соответствие угол в x радиан и определить значение синуса этого угла.

Таким образом, мы установим соответствие между множеством действительных чисел и множеством значений синусов углов. Каждому действительному числу соответствует единственное значение синуса. Такое соответствие определяет тригонометрическую функцию $y = \sin x$.

Определение. Зависимость, при которой каждому действительному числу x соответствует значение $\sin x$, называется функцией $y = \sin x$.

Рассмотрим свойства функции $y = \sin x$ и построим ее график.

$D(\sin x) = \boldsymbol{R}$

$E(\sin x) = [-1;\ 1]$

1. Областью определения функции $y = \sin x$ является множество всех действительных чисел, так как для любого $x \in \boldsymbol{R}$ существует $\sin x$.

Графически это означает, что для любой абсциссы найдется точка графика функции $y = \sin x$.

2. Множеством значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1;\ 1]$, так как ординаты точек единичной окружности (значения синусов чисел) изменяются от -1 до 1.

Графически это означает, что график функции $y = \sin x$ расположен в полосе между прямыми $y = -1$ и $y = 1$ (рис. 74).

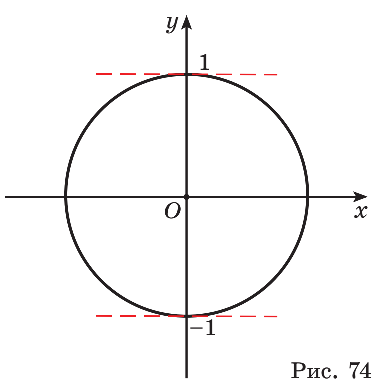


Рис. 74

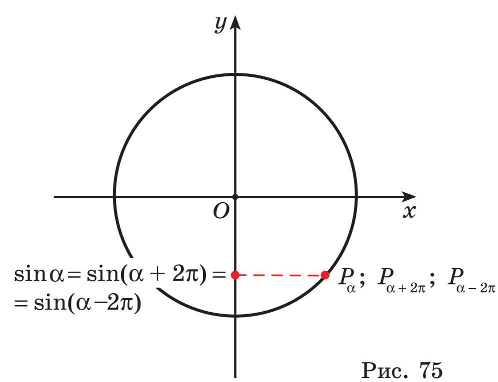


Рис. 75

3. Периодичность функции $y = \sin x$. Точки единичной окружности P_α, $P_{\alpha+2\pi}$, $P_{\alpha-2\pi}$ совпадают для любого α (рис. 75), значит, значения синусов этих углов также совпадают, т. е. $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha - 2\pi)$.

Правообладатель Народная асвета

Говорят, что число 2π является периодом функции $y = \sin x$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **периодической функцией с периодом $T \neq 0$**, если для любого значения x из области определения функции числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и при этом верно равенство

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Чтобы определить, является ли функция периодической с периодом $T \neq 0$, необходимо проверить:

1) принадлежат ли области определения функции числа $x + T$ и $x - T$, если x принадлежит области определения функции;

2) выполняется ли равенство $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Определим, верно ли, что число π является периодом функции $y = \sin x$.

1) Числа $x + \pi$ и $x - \pi$ принадлежат области определения функции, так как $D(\sin x) = \boldsymbol{R}$.

2) Проверим, выполняется ли равенство $\sin(x + \pi) = \sin x$ для всех x.

Пусть $x = -\frac{\pi}{2}$, тогда $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, а $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$,

т. е. $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) \neq \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Значит, число π не является периодом функции $y = \sin x$.

Периодом функции $y = \sin x$ являются числа вида $2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$. Число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \sin x$.

$$T = 2\pi$$

Функция $y = \sin x$ является периодической с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$ (рис. 76). Это означает, что ее график состоит из повторяющихся частей, поэтому достаточно его построить на отрезке длиной 2π (например, $[-\pi; \pi]$), а затем повторить построение на каждом следующем отрезке длиной 2π.

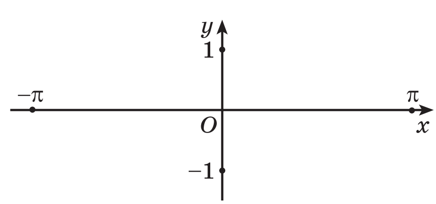


Рис. 76

4. Четность (нечетность) функции. $D(y) = \boldsymbol{R}$ — симметрична относительно нуля. Так как точки P_α и $P_{-\alpha}$ единичной окружности симметричны относительно

Правообладатель Народная асвета

оси абсцисс для любого $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то ординаты этих точек противоположны, т. е. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (рис. 77). Значит, функция $y = \sin x$ **нечетная.**

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, функция нечетная

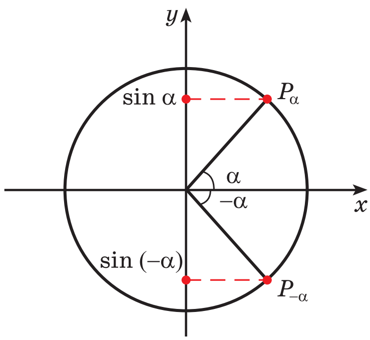


Рис. 77

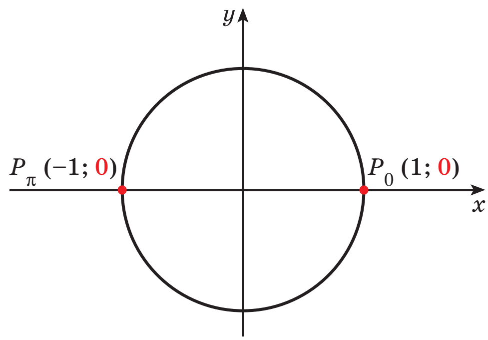


Рис. 78

Для построения ее графика достаточно построить его часть для неотрицательных значений аргумента и отобразить эту часть симметрично относительно начала координат.

5. Нули функции. Ординаты точек $P_0(1;\ 0)$ и $P_\pi(-1;\ 0)$ равны нулю. Значит, $\sin x = 0$ в точках $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 78), т. е. график функции пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Нули функции: $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

6. Промежутки знакопостоянства функции. На промежутках $(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, функция $y = \sin x$ принимает положительные значения, так как ординаты точек единичной окружности положительны в первой и во второй четвертях (рис. 79, *а*).

На промежутках $(\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения, так как ординаты точек единичной окружности отрицательны в третьей и четвертой четвертях (рис. 79, *б*).

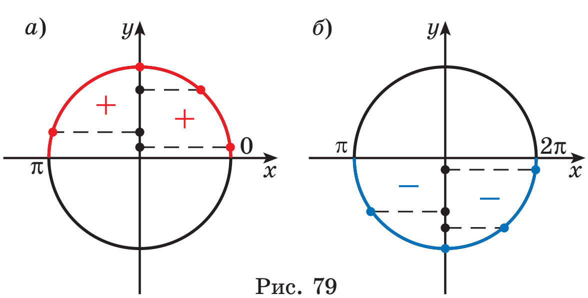


Рис. 79

$y > 0$ при $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$y < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Правообладатель Народная асвета

7. Монотонность функции. Так как ординаты точек единичной окружности увеличиваются от –1 до 1 при изменении угла от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 80, *а*) и уменьшаются от 1 до –1 при изменении угла от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ (рис. 80, *б*), то с учетом периодичности определим промежутки возрастания функции $y = \sin x$: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и промежутки убывания функции $y = \sin x$: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

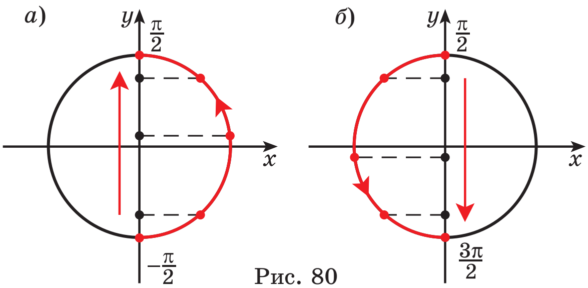


Рис. 80

Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Наибольшее значение функции $y = \sin x$ равно 1 и достигается в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Наименьшее значение функции $y = \sin x$ равно –1 и достигается в точках $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

На основании проведенного исследования построим график функции $y = \sin x$ на отрезке от $-\pi$ до π, длина которого равна 2π, т. е. длине периода функции $y = \sin x$.

На этом периоде функция $y = \sin x$:

- равна нулю в точках $-\pi$; 0; π;
- достигает значений, равных 1 и –1, соответственно в точках $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$;
- принимает положительные значения при значениях аргумента от 0 до π, а отрицательные — при значениях аргумента от $-\pi$ до 0;
- возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и убывает от $-\pi$ до $-\frac{\pi}{2}$ и от $\frac{\pi}{2}$ до π.

На рисунке 81 изображена часть графика функции $y = \sin x$ на промежутке от $-\pi$ до π.

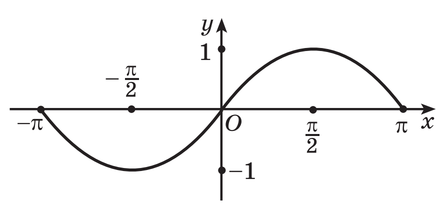


Рис. 81

Правообладатель Народная асвета

Перенесем эту часть на другие периоды и получим график функции $y = \sin x$ (рис. 82). График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой*.

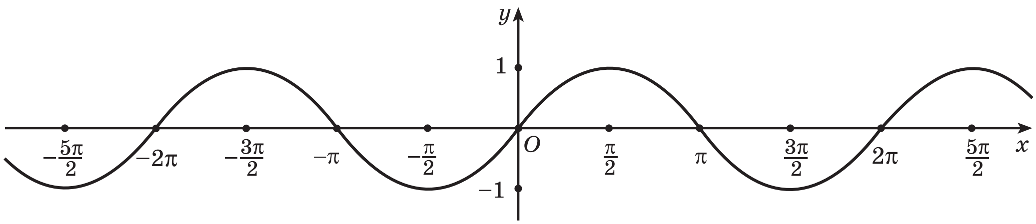


Рис. 82

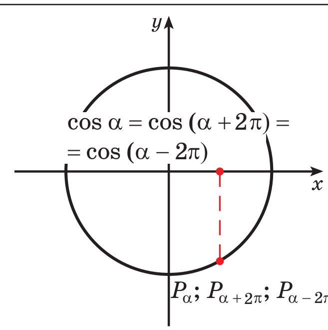
Функция $y = \cos x$. Свойства и график

Определение. Зависимость, при которой каждому действительному числу x соответствует значение $\cos x$, называется функцией $y = \cos x$.

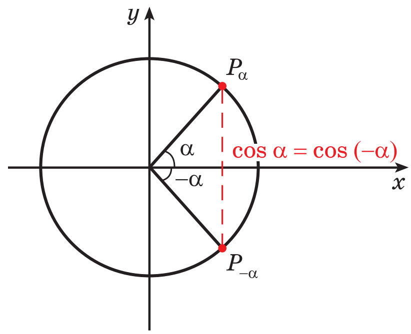
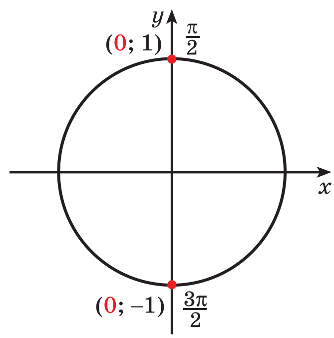
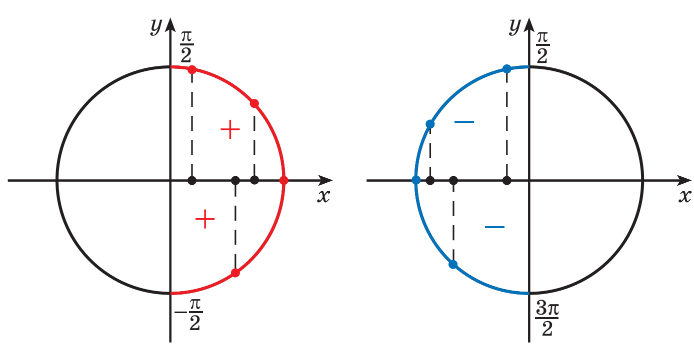
Некоторые свойства функции $y = \cos x$ совпадают со свойствами функции $y = \sin x$.

Например, областью определения функции $y = \cos x$ является множество всех действительных чисел, множеством значений функции $y = \cos x$ является отрезок $[-1; 1]$, наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π.

Свойства функции $y = \cos x$ приведены в таблице.

1. Область определения функции	$D = (-\infty; +\infty)$
2. Множество значений функции	$E = [-1; 1]$
3. Периодичность функции	Периодическая с периодом $T = 2\pi$ 

Правообладатель Народная асвета

4. Четность (нечетность) функции	$D(y) = \boldsymbol{R}$ — симметрична относительно нуля. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Четная	
5. Нули функции	$\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	
6. Промежутки знакопостоянства функции	$y > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$ $y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$ 	

Правообладатель Народная асвета

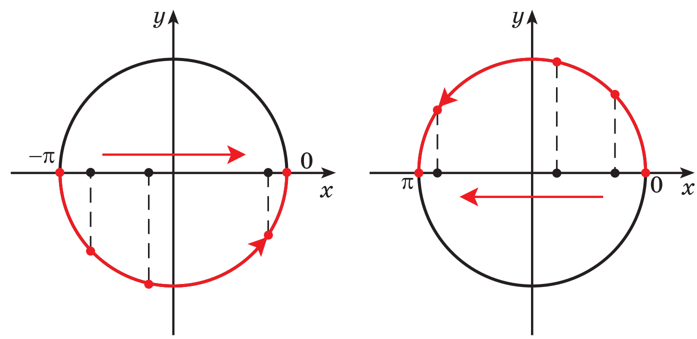
7. Монотонность функции	Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ Функция убывает на промежутках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ 
Наибольшее и наименьшее значения функции	$y_{\text{наиб}} = 1$ при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $y_{\text{наим}} = -1$ при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

График функции $y = \cos x$ изображен на рисунке 83. Этот график может быть получен путем преобразования (сдвига) графика функции $y = \sin x$.

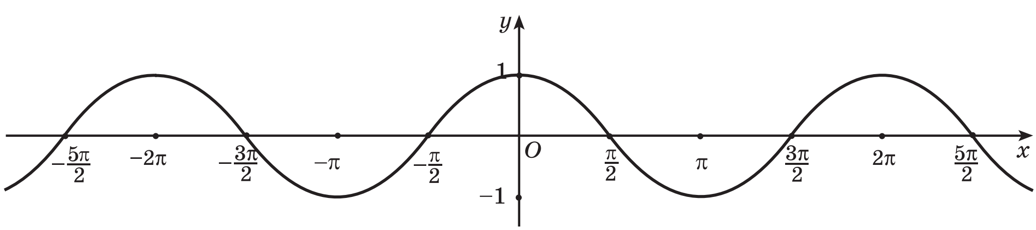


Рис. 83

Примеры основных заданий и их решения

1. Определите, принадлежит ли графику функции $y = \sin x$ точка:

а) $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; б) $B\left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $C(-\pi; 0)$; г) $D\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$.

Решение. а) Подставим в формулу $y = \sin x$ значение аргумента $x = \frac{\pi}{2}$ и найдем соответствующее значение функции $y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Правообладатель Народная асвета

Полученное значение функции равно ординате точки $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, значит, точка $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ принадлежит графику функции $y = \sin x$.

б) При $x = \frac{\pi}{4}$ получим $y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Точка $B\left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не принадлежит графику функции $y = \sin x$.

в) При $x = -\pi$ получим $y = \sin(-\pi) = 0$. Точка $C(-\pi; 0)$ принадлежит графику функции $y = \sin x$.

г) При $x = \frac{3\pi}{2}$ получим $y = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \neq 1$. Точка $D\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ не принадлежит графику функции $y = \sin x$.

2. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 2\sin 5x$; б) $g(x) = \sin\frac{x}{3} - 7$.

Решение. а) Так как область определения функции $y = \sin t$ — все действительные числа, т. е. $t \in (-\infty; +\infty)$, то и $5x \in (-\infty; +\infty)$, значит, $x \in (-\infty; +\infty)$. Таким образом, $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Множеством значений функции $y = \sin t$ является отрезок $[-1; 1]$, значит, $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant \sin 5x \leqslant 1$. Тогда по свойству неравенств $-2 \leqslant 2\sin 5x \leqslant 2$. Таким образом, $E(f) = [-2; 2]$.

б) $D(g) = (-\infty; +\infty)$. Поскольку $-1 \leqslant \sin\frac{x}{3} \leqslant 1$, то по свойству неравенств $-1 - 7 \leqslant \sin\frac{x}{3} - 7 \leqslant 1 - 7$; $-8 \leqslant \sin\frac{x}{3} - 7 \leqslant -6$, т. е. $E(g) = [-8; -6]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = -2\sin x + 5$.

Решение. Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, значит, $-2 \leqslant -2\sin x \leqslant 2$, тогда $-2 + 5 \leqslant -2\sin x + 5 \leqslant 2 + 5$. Таким образом, имеем: $3 \leqslant -2\sin x + 5 \leqslant 7$. Наибольшее значение функции $y = -2\sin x + 5$ равно 7.

4. Найдите значение выражения, используя свойство периодичности функции $f(x) = \sin x$:

а) $\sin\frac{9\pi}{4}$; б) $\sin\frac{13\pi}{3}$; в) $\sin\frac{21\pi}{2}$.

Решение. Так как число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \sin x$, то $\sin(2\pi n + \alpha) = \sin\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда:

Правообладатель Народная асвета

а) $\sin\frac{9\pi}{4} = \sin\frac{8\pi + \pi}{4} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin\frac{13\pi}{3} = \sin\frac{12\pi + \pi}{3} = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\frac{21\pi}{2} = \sin\frac{20\pi + \pi}{2} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi \cdot 5 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

5. Найдите значение выражения, используя свойство нечетности функции $y = \sin x$:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$.

Решение. Так как функция $y = \sin x$ нечетная, то $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Тогда:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

б) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -\sin\frac{5\pi}{2} = -\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$.

6. Исследуйте функцию на четность (нечетность):

а) $f(x) = -2\sin 6x$; б) $g(x) = 4x \cdot \sin 3x + 8$.

Решение. а) $D(f) = \boldsymbol{R}$ — область определения симметрична относительно нуля;

$f(-x) = -2\sin(-6x) = -2(-\sin 6x) = 2\sin 6x = -f(x)$, значит, функция является нечетной.

б) $D(g) = \boldsymbol{R}$ — область определения симметрична относительно нуля;

$g(-x) = 4(-x) \cdot \sin(-3x) + 8 = -4x \cdot (-\sin 3x) + 8 =$

$= 4x \cdot \sin 3x + 8 = g(x)$, значит, функция является четной.

7. Найдите нули функции:

а) $y = \sin 5x$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$.

Решение. а) Пусть $5x = t$. Нулями функции $y = \sin t$ являются числа $t = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $5x = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, значит, $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, числа $x = \frac{\pi n}{5}, n \in \boldsymbol{Z}$, являются нулями функции $y = \sin 5x$.

б) Пусть $x - \frac{\pi}{10} = t$. Нулями функции $y = \sin t$ являются числа $t = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $x - \frac{\pi}{10} = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, значит, $x = \frac{\pi}{10} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Правообладатель Народная асвета

Таким образом, числа $x = \frac{\pi}{10} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, являются нулями функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$.

8. Определите знак произведения $\sin 4 \cdot \sin 2 \cdot \sin 1$.

Решение. Так как $\pi \approx 3{,}14$, то $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, т. е. угол 4 радиана принадлежит промежутку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения, значит, $\sin 4 < 0$.
Углы 2 радиана и 1 радиан принадлежат промежутку $(0; \pi)$, на котором функция $y = \sin x$ принимает положительные значения, т. е. $\sin 2 > 0$ и $\sin 1 > 0$. Значит, $\sin 4 \cdot \sin 2 \cdot \sin 1 < 0$.

9. Что больше: $\sin 37°$ или $\sin 67°$?

Решение. Так как функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $[-90°; 90°]$ и $37° \in [-90°; 90°]$, $67° \in [-90°; 90°]$, то из того, что $37° < 67°$, следует, что $\sin 37° < \sin 67°$.

10. Постройте график функции:

а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \sin x + 2$.

Решение. а) График функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ получаем из графика функции $y = \sin x$ сдвигом его вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{3}$ влево (рис. 84).

б) График функции $y = \sin x + 2$ получаем из графика функции $y = \sin x$ сдвигом его вдоль оси ординат на 2 единицы вверх (рис. 85).

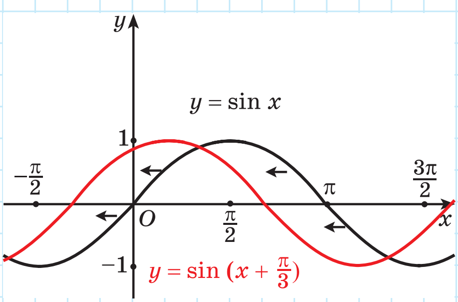


Рис. 84

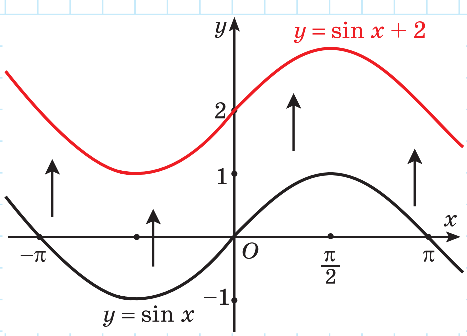


Рис. 85

Правообладатель Народная асвета

11. Определите, какие из данных точек принадлежат графику функции $y = \cos x$:

а) $A(\pi; -1)$; б) $B\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$; в) $C(0; 0)$; г) $D\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Решение. а) Подставим в формулу $y = \cos x$ значение аргумента $x = \pi$ и найдем соответствующее значение функции $y = \cos\pi = -1$. Полученное значение функции равно ординате точки $A(\pi; -1)$, значит, точка $A(\pi; -1)$ принадлежит графику функции $y = \cos x$.

б) При $x = \frac{\pi}{3}$ получим $y = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Точка $B\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$ принадлежит графику функции $y = \cos x$.

в) При $x = 0$ получим $y = \cos 0 = 1$. Точка $C(0; 0)$ не принадлежит графику функции $y = \cos x$.

г) При $x = \frac{\pi}{2}$ получим $y = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Точка $D\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ принадлежит графику функции $y = \cos x$.

12. Найдите область определения и множество значений функции $y = 3\cos x - 4$.

Решение. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, т. е. $D(y) = \boldsymbol{R}$.

Множеством значений функции $y = \cos x$ является отрезок $[-1; 1]$, значит, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Тогда по свойству неравенств $-3 \leqslant 3\cos x \leqslant 3$ и $-7 \leqslant 3\cos x - 4 \leqslant -1$. Таким образом, $E(y) = [-7; -1]$.

13. Найдите наименьшее значение функции $y = -\cos x - 5$.

Решение. Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, значит, $-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$, тогда $-6 \leqslant -\cos x - 5 \leqslant -4$.

Наименьшее значение функции $y = -\cos x - 5$ равно -6.

14. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \cos x$, найдите значение выражения:

а) $\cos\frac{9\pi}{4}$; б) $\cos\frac{19\pi}{3}$; в) $\cos 17\pi$.

Решение. Так как число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \cos x$, то $\cos(2\pi n + \alpha) = \cos\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда:

а) $\cos\frac{9\pi}{4} = \cos\frac{8\pi + \pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Правообладатель Народная асвета

б) $\cos\frac{19\pi}{3} = \cos\frac{18\pi + \pi}{3} = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi \cdot 3 + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

в) $\cos 17\pi = \cos(16\pi + \pi) = \cos(2\pi \cdot 8 + \pi) = \cos\pi = -1$.

15. Используя свойство четности функции $y = \cos x$, найдите значение выражения:

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\cos(-9\pi)$.

Решение. Так как функция $y = \cos x$ четная, то $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Тогда:

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos(-9\pi) = \cos 9\pi = \cos(8\pi + \pi) = \cos\pi = -1$.

16. Исследуйте функцию на четность (нечетность):

а) $f(x) = -2\cos 2x + 1$; б) $g(x) = 5x \cdot \cos 7x$.

Решение. а) $D(f) = \boldsymbol{R}$ — область определения симметрична относительно нуля;

$f(-x) = -2\cos(-2x) + 1 = -2\cos 2x + 1 = f(x)$, значит, функция является четной.

б) $D(g) = \boldsymbol{R}$ — область определения симметрична относительно нуля;

$g(-x) = 5(-x) \cdot \cos(-7x) = -5x \cdot \cos 7x = -g(x)$, значит, функция является нечетной.

17. Найдите нули функции:

а) $y = \cos\frac{x}{2}$; б) $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$.

Решение. а) Пусть $\frac{x}{2} = t$. Нулями функции $y = \cos t$ являются числа $t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, значит, $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Таким образом, числа $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, являются нулями функции $y = \cos\frac{x}{2}$.

б) Пусть $3x + \frac{\pi}{5} = t$. Нулями функции $y = \cos t$ являются числа $t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $3x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, значит, $3x = -\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $3x = \frac{3\pi}{10} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Правообладатель Народная асвета

Таким образом, числа $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$, являются нулями функции $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$.

18. Определите знак произведения $\cos 4{,}5 \cdot \cos 2 \cdot \cos 7$.

Решение. Так как $\pi \approx 3{,}14$, то $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ и $\pi < 4{,}5 < \frac{3\pi}{2}$, т. е. углы 4,5 радиана и 2 радиана принадлежат промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \cos x$ принимает отрицательные значения, значит, $\cos 4{,}5 < 0$ и $\cos 2 < 0$.

Угол 7 радиан принадлежит промежутку, на котором функция $y = \cos x$ принимает положительные значения, т. е. $\cos 7 > 0$. Значит, $\cos 4{,}5 \cdot \cos 2 \cdot \cos 7 > 0$.

19. Что больше: $\cos 137°$ или $\cos 167°$?

Решение. Так как функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0°;\ 180°]$ и $137° \in [0°; 180°]$, $167° \in [0°; 180°]$, то из того, что $137° < 167°$, следует, что $\cos 137° > \cos 167°$.

20. Постройте график функции:

а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos x - 2$.

Решение. а) График функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ получаем из графика функции $y = \cos x$ сдвигом его вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{6}$ влево (рис. 86).

б) График функции $y = \cos x - 2$ получаем из графика функции $y = \cos x$ сдвигом его вдоль оси ординат на 2 единицы вниз (рис. 87).

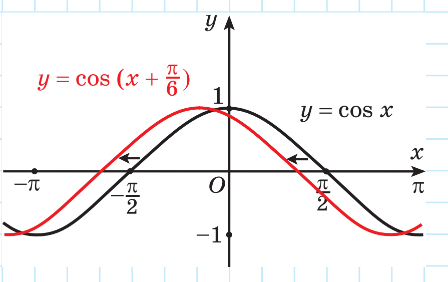


Рис. 86

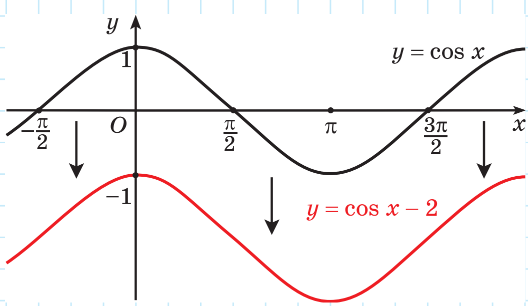


Рис. 87

Правообладатель Народная асвета

1. Возможно ли равенство:

а) $\sin x = 2$; б) $\sin x = -\sqrt{5}$; в) $\sin x = \frac{1}{2}$; г) $\sin x = -\frac{1}{3}$?

2. Возможно ли равенство:

а) $\cos x = -1{,}2$; б) $\cos x = \sqrt{7}$; в) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x = 0{,}4$?

1.154. Из данных точек выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \sin x$:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $B\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $C(-\pi; 0)$; г) $D\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$.

1.155. С помощью графика функции $y = \sin x$ определите, верно ли, что:

а) при значении аргумента, равном $\frac{\pi}{6}$, значение функции равно $\frac{1}{2}$;

б) числа π; 2π являются нулями функции;

в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$; г) $\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

1.156. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \sin x$ принимает значение, равное:

а) 0; б) -1; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$.

1.157. Найдите множество значений функции:

а) $y = \sin x - 6$; б) $y = 4\sin x + 2$; в) $y = 5 - 6\sin x$.

1.158. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 3\sin 2x$; б) $g(x) = \sin\frac{x}{2} + 5$;

в) $h(x) = -\sin 9x - 5$; г) $p(x) = 2\sin 7x + 6$.

1.159. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 2\sin 5x$; б) $y = 1{,}5\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \sin 9x + 8$; г) $y = -0{,}5\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - 1{,}2$.

1.160. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \sin x$, найдите:

а) $\sin\frac{13\pi}{6}$; б) $\sin\frac{19\pi}{3}$; в) $\sin\frac{17\pi}{4}$; г) $\sin\frac{13\pi}{2}$.

Верно ли, что числа -10π; -4π; -2π; 2π; 16π; 100π являются периодами данной функции?

1.161. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \sin x$, докажите, что $\sin(-20°) = \sin 340°$.

Правообладатель Народная асвета

1.162. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \sin x$, найдите:
а) $\sin 765°$; б) $\sin(-315°)$; в) $\sin(1080°)$; г) $\sin(-810°)$.

1.163. Используя свойство нечетности функции $f(x) = \sin x$, найдите:
а) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\sin(-2\pi)$; г) $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$.

1.164. Исследуйте функцию на четность (нечетность):
а) $f(x) = -\sin 2x$; б) $g(x) = 5x \cdot \sin 2x$;
в) $h(x) = 8x - \sin x$; г) $p(x) = 5\sin 7x - 1$.

1.165. Используя свойства нечетности и периодичности функции $f(x) = \sin x$, найдите:
а) $f\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$; б) $f\left(-\frac{47\pi}{2}\right)$; в) $f\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; г) $f(-9\pi)$.

1.166. Из чисел -10π; $-\frac{7\pi}{2}$; -3π; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{5\pi}{2}$; 6π выберите:

а) нули функции $f(x) = \sin x$; б) значения аргумента, при которых функция $f(x) = \sin x$ принимает наибольшее значение.

1.167. Найдите значение выражения $\sin 7\pi + \sin\frac{11\pi}{2} - \sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$.

1.168. Найдите нули функции:
а) $y = \sin 2x$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$; г) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

1.169. Из чисел $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{7\pi}{8}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{2}$ выберите значения аргумента, при которых функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения.

1.170. Верно ли, что $\sin x > 0$, если:
а) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$;
в) $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$; г) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$?

1.171. Определите знак выражения $\sin\frac{8\pi}{7} \cdot \sin\frac{13\pi}{6} \cdot \sin\frac{3\pi}{5}$.

1.172. Используя свойства функции $f(x) = \sin x$, докажите, что:
а) $\sin 15° < \sin 35°$; б) $\sin 100° < \sin 140°$.

1.173. Сравните значения выражений:
а) $\sin\frac{7\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{6}$; б) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Правообладатель Народная асвета

1.174. Расположите в порядке возрастания числа $\sin(-3)$, $\sin(-3,2)$ и $\sin(-1,6)$.

1.175. Постройте график функции:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin x + 2$; в) $y = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

г) $y = \sin x - 1$; д) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$; е) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

1.176. Определите, какие из данных точек принадлежат графику функции $y = \cos x$:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $B\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; в) $C\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $D(\pi; -1)$.

1.177. С помощью графика функции $y = \cos x$ определите, верно ли, что:

а) при значении аргумента, равном π, значение функции равно -1;

б) число $\frac{5\pi}{2}$ является нулем функции;

в) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; г) $\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.178. Найдите множество значений функции:

а) $y = \cos x + 2$; б) $y = 3,5\cos x - 4$; в) $y = 5 - 2\cos x$.

1.179. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 2\cos 3x$; б) $g(x) = \cos\frac{x}{3} - 4$;

в) $h(x) = -\cos 2x + 7$; г) $p(x) = 3\cos 5x - 2$.

1.180. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 5\cos 2x$; б) $y = 2,5\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \cos 7x - 3$; г) $y = -1,5\cos\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + 1,3$.

1.181. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает значение, равное:

а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.182. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \cos x$, найдите:

а) $\cos\frac{7\pi}{3}$; б) $\cos\frac{25\pi}{6}$; в) $\cos\frac{17\pi}{4}$; г) $\cos 19\pi$.

Верно ли, что число 8π является периодом данной функции?

1.183. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \cos x$, докажите, что $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{5\pi}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

1.184. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \cos x$, найдите:
а) $\cos 420°$; б) $\cos(-405°)$; в) $\cos 720°$; г) $\cos(-1170°)$.

1.185. Используя свойство четности функции $f(x) = \cos x$, найдите:

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\cos(-\pi)$; г) $\cos(-20\pi)$.

1.186. Исследуйте функцию на четность (нечетность):
а) $f(x) = \cos 8x$; б) $g(x) = x \cdot \cos 2x$;

в) $h(x) = x^2 - \cos x$; г) $p(x) = \cos\frac{x}{5} - x$.

1.187. Используя свойства четности и периодичности функции $f(x) = \cos x$, найдите:

а) $f(-63\pi)$; б) $f\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$; в) $f\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

1.188. Верно ли, что нулями функции $f(x) = \cos x$ являются числа:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{9\pi}{2}$; г) -5π; д) -6π; е) $-\frac{11\pi}{2}$?

Из данных чисел выберите значения аргумента, при которых функция $f(x) = \cos x$ принимает наименьшее значение.

1.189. Найдите значение выражения $\cos\frac{7\pi}{2} + \cos 11\pi - \cos(-13\pi)$.

1.190. Найдите нули функции:

а) $y = \cos 3x$; б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$.

1.191. Из чисел $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{7\pi}{8}$; π; $\frac{13\pi}{12}$ выберите значения аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает положительные значения.

1.192. Верно ли, что $\cos x < 0$, если:

а) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; в) $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$?

1.193. Определите знак выражения $\cos(-3) \cdot \cos(-2) \cdot \cos(-1)$.

1.194. Используя свойства функции $f(x) = \cos x$, докажите, что:

а) $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{7\pi}{8}$; б) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$.

1.195. Сравните значения выражений:
а) $\cos 20°$ и $\cos 70°$; б) $\cos 183°$ и $\cos 243°$.

1.196. Расположите в порядке убывания числа $\cos 1{,}8$, $\cos 2{,}3$ и $\cos 2$.

Правообладатель Народная асвета

1.197. Постройте график функции:

а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$; в) $y = \cos x - 1$;

г) $y = \cos x + 3$; д) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

1.198. Не выполняя построений, найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$; б) $y = \frac{1}{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{3}$.

1.199. Не выполняя построений, найдите наибольшее и наименьшее значения функции и значения аргумента, при которых они достигаются:

а) $y = \frac{1}{2}\sin x$; б) $y = -5\sin x$; в) $y = 0{,}2\cos x$; г) $y = -3\cos x$.

1.200. Постройте график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Пользуясь графиком, определите: а) нули функции; б) промежутки убывания и возрастания функции; в) наибольшее и наименьшее значения функции и значения аргумента, при которых они достигаются; г) промежутки знакопостоянства функции.

1.201. Постройте график функции $y = \cos x + 2{,}5$. Пользуясь графиком, определите: а) промежутки убывания и возрастания функции; б) наибольшее и наименьшее значения функции и значения аргумента, при которых они достигаются; в) нули функции; г) множество значений функции.

1.202*. Найдите наименьшее и наибольшее целые значения функции:

а) $y = 1{,}2\cos\frac{x}{5} + 3$; б) $y = -3{,}28\sin\left(9x + \frac{\pi}{12}\right) - 1$.

1.203. Верно ли, что точки $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(-\pi; 0)$ и $C\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ принадлежат графику функции $y = \sin x$?

1.204. С помощью графика функции $y = \sin x$ определите, верно ли, что:

а) при значении аргумента, равном $\frac{\pi}{2}$, значение функции равно 1;

б) числа -2π; π являются нулями функции;

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

1.205. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \sin x$ принимает значение, равное:

а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

1.206. Найдите множество значений функции:

а) $y = \sin x - 5$; б) $y = \sin x + 3$; в) $y = 4\sin x - 7$;
г) $y = 2 - 5\sin x$; д) $y = 1{,}5\sin x - 2$; е) $y = 1 - 3{,}2\sin x$.

1.207. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 4\sin 7x$; б) $g(x) = \sin \frac{x}{5} - 3$; в) $h(x) = -3\sin 2x + 7$.

1.208. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 3\sin 5x$; б) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = -4\sin 3x + 5$.

1.209. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \sin x$, найдите:

а) $\sin\frac{7\pi}{3}$; б) $\sin\frac{17\pi}{4}$; в) $\sin\frac{25\pi}{6}$; г) $\sin\frac{7\pi}{2}$.

1.210. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \sin x$, докажите, что $\sin 75° = \sin(-645°)$.

1.211. Используя свойство нечетности функции $f(x) = \sin x$, найдите:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $\sin(-2\pi)$.

1.212. Исследуйте функцию на четность (нечетность):

а) $f(x) = \sin 3x$; б) $g(x) = x \cdot \sin x$;

в) $h(x) = 2x + \sin 3x$; г) $p(x) = \sin x + 9$.

1.213. Используя свойства функции $f(x) = \sin x$, найдите:

а) $f\left(-\frac{19\pi}{2}\right)$; б) $f\left(-\frac{37\pi}{2}\right)$; в) $f\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; г) $f(-11\pi)$.

1.214. Верно ли, что нулями функции $f(x) = \sin x$ являются числа:

а) 2π; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) -9π; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $-\frac{9\pi}{2}$; е) 11π?

Из данных чисел выберите значения аргумента, при которых функция $f(x) = \sin x$ принимает наименьшее значение.

1.215. Найдите нули функции:

а) $y = \sin 5x$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.216. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; б) $\sin\frac{7\pi}{6}$; в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\sin\frac{11\pi}{5}$.

1.217. Определите знак произведения $\sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 4$.

1.218. Используя свойства функции $f(x) = \sin x$, сравните значения выражений:

Правообладатель Народная асвета

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\sin\frac{2\pi}{7}$; б) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\sin\frac{9\pi}{10}$.

1.219. Расположите в порядке убывания числа $\sin(-221°)$, $\sin(-100°)$ и $\sin(-181°)$.

1.220. Постройте график функции:

а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \sin x - 3$; в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

1.221. Верно ли, что точки $A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ и $C(2\pi; -1)$ принадлежат графику функции $y = \cos x$?

1.222. С помощью графика функции $y = \cos x$ определите, верно ли, что:

а) при значении аргумента, равном 0, значение функции равно 1;

б) числа $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ являются нулями функции;

в) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

1.223. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает значение, равное:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) -1.

1.224. Найдите множество значений функции:

а) $y = \cos x - 5$; б) $y = \frac{1}{2}\cos x + 3$;

в) $y = 4\cos x - 3{,}2$; г) $y = 4 - 5\cos x$.

1.225. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 3\cos 4x$; б) $g(x) = \cos\frac{x}{7} + 5$; в) $h(x) = -5\cos 8x - 3$.

1.226. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 5\cos 3x$; б) $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = -2\sin 5x - 1$.

1.227. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \cos x$, найдите:

а) $\cos\frac{13\pi}{6}$; б) $\cos\frac{19\pi}{3}$; в) $\cos\frac{33\pi}{4}$; г) $\cos 11\pi$.

1.228. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \cos x$, докажите, что $\cos(-123°) = \cos 237°$.

1.229. Используя свойство четности функции $f(x) = \cos x$, найдите:

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Правообладатель Народная асвета

1.230. Исследуйте функцию на четность (нечетность):

а) $f(x) = \cos 6x$; б) $g(x) = x \cdot \cos 7x$;

в) $h(x) = 3x^2 + \cos x$; г) $p(x) = \cos \frac{x}{6} + 4x$.

1.231. Используя свойства функции $f(x) = \cos x$, найдите:

а) $f(-47\pi)$; б) $f\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$; в) $f\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

1.232. Из чисел $-\frac{11\pi}{2}$; -4π; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; 0; 3π; $\frac{9\pi}{2}$ выберите:

а) нули функции $f(x) = \cos x$; б) значения аргумента, при которых функция $f(x) = \cos x$ принимает наибольшее значение.

1.233. Найдите нули функции:

а) $y = \cos 2x$; б) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1.234. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$; в) $\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$; г) $\cos\frac{15\pi}{7}$.

1.235. Определите знак произведения $\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos\frac{4\pi}{5}$.

1.236. Используя свойства функции $f(x) = \cos x$, сравните значения выражений: а) $\cos 0{,}5$ и $\cos 1$; б) $\cos(-2)$ и $\cos(-1)$.

1.237. Расположите в порядке возрастания числа $\cos 20°$, $\cos 57°$ и $\cos 32°$.

1.238. Постройте график функции:

а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$; в) $y = \cos x - 2$;

г) $y = \cos x + 1$; д) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - 3$.

1.239. Не выполняя построений, найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$; б) $y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5$.

1.240. Не выполняя построений, найдите наибольшее и наименьшее значения функции и значения аргумента, при которых они достигаются:

а) $y = 6\sin x$; б) $y = -4\sin x$; в) $y = 8{,}7\cos x$; г) $y = -\frac{1}{5}\cos x$.

1.241. Постройте график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;

б) промежутки убывания и возрастания функции;

Правообладатель Народная асвета

в) наибольшее и наименьшее значения функции и значения аргумента, при которых они достигаются;

г) промежутки знакопостоянства функции.

1.242. Постройте график функции $y = \sin x - 1{,}5$. Пользуясь графиком, определите:

а) промежутки убывания и возрастания функции;

б) наибольшее и наименьшее значения функции и значения аргумента, при которых они достигаются;

в) нули функции;

г) множество значений функции.

1.243. Решите неравенство $\frac{x+3}{4} - \frac{x}{2} \leqslant 3$. Верно ли, что неравенство $x + 3 \leqslant 0$ равносильно данному неравенству?

1.244. Найдите значение выражения $\frac{3^{11} \cdot 9^3}{27^5}$.

1.245. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{4}{x^2 - 7x + 6}$.

1.246. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 12, \\ y - 2x = 4. \end{cases}$

§ 6. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Их свойства и графики

1.247. Из чисел $-\frac{13\pi}{2}$; -6π; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; 0; 2π; $\frac{7\pi}{2}$ выберите нули функции:

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$.

1.248. Исследуйте на четность (нечетность) функцию $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.

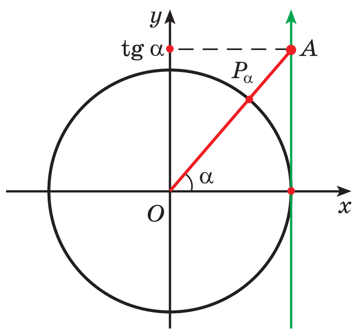
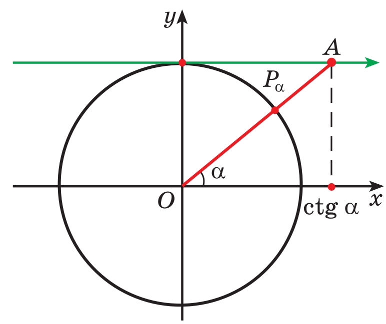
1.249. Найдите область определения функции $y = \frac{2}{x^2 - 9}$.

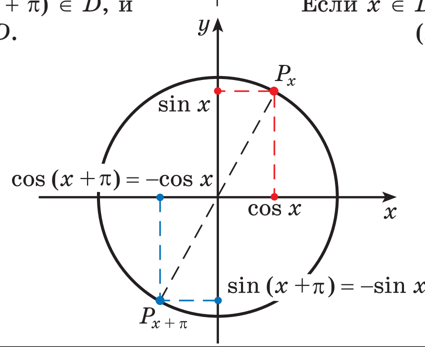
Определение. Зависимость, при которой каждому действительному числу $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует значение $\operatorname{tg} x$, называется функцией $y = \operatorname{tg} x$.

Определение. Зависимость, при которой каждому действительному числу $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует значение $\operatorname{ctg} x$, называется функцией $y = \operatorname{ctg} x$.

Правообладатель Народная асвета

Рассмотрим свойства этих функций.

Функция $y = \operatorname{tg} x$	Функция $y = \operatorname{ctg} x$
1. Область определения функции	
Все действительные числа, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.	Все действительные числа, кроме $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
2. Множество значений функции	
$E(\operatorname{tg} x) = (-\infty; +\infty)$ $\operatorname{tg} \alpha$ — это ордината точки A на оси тангенсов. При движении точки P_α по единичной окружности ордината соответствующей точки A изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.  	$E(\operatorname{ctg} x) = (-\infty; +\infty)$ $\operatorname{ctg} \alpha$ — это абсцисса точки A на оси котангенсов. При движении точки P_α по единичной окружности абсцисса соответствующей точки A изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. 
3. Периодичность функции	
Наименьший положительный период $T = \pi$. Если $x \in D$, то и $(x + \pi) \in D$, и $(x - \pi) \in D$. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} =$ $= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$.	Наименьший положительный период $T = \pi$. Если $x \in D$, то и $(x + \pi) \in D$, и $(x - \pi) \in D$. $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} =$ $= \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{ctg} x$.



Правообладатель Народная асвета

<table>
<tr><th colspan="2">4. Четность (нечетность) функции</th></tr>
<tr><td>Нечетная
① Область определения — все действительные числа, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
② $\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}\,x$.</td><td>Нечетная
① Область определения — все действительные числа, кроме $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
② $\mathrm{ctg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\mathrm{ctg}\,x$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">5. Нули функции</th></tr>
<tr><td>$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin x = 0$ при $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.</td><td>$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\cos x = 0$ при
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">6. Промежутки знакопостоянства функции</th></tr>
<tr><td>$y > 0$ при $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$
$y < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$
При $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$, (первая и третья четверти) значения $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки, значит, $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} > 0$.
При $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$, (вторая и четвертая четверти) значения $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки, значит, $\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} < 0$.</td><td>$y > 0$ при $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$
$y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$
При $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$, (первая и третья четверти) значения $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки, значит, $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x} > 0$.
При $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$, (вторая и четвертая четверти) значения $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки, значит, $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x} < 0$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">7. Монотонность функции</th></tr>
<tr><td>Функция возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$.</td><td>Функция убывает на каждом из промежутков $x \in (\pi n;\ \pi + \pi n),\ n \in \boldsymbol{Z}$.</td></tr>
<tr><td>Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.</td><td>Функция не имеет наибольшего и наименьшего значений.</td></tr>
</table>

Правообладатель Народная асвета

График функции $y = \operatorname{tg} x$ изображен на рисунке 88. Он называется *тангенсоидой*.

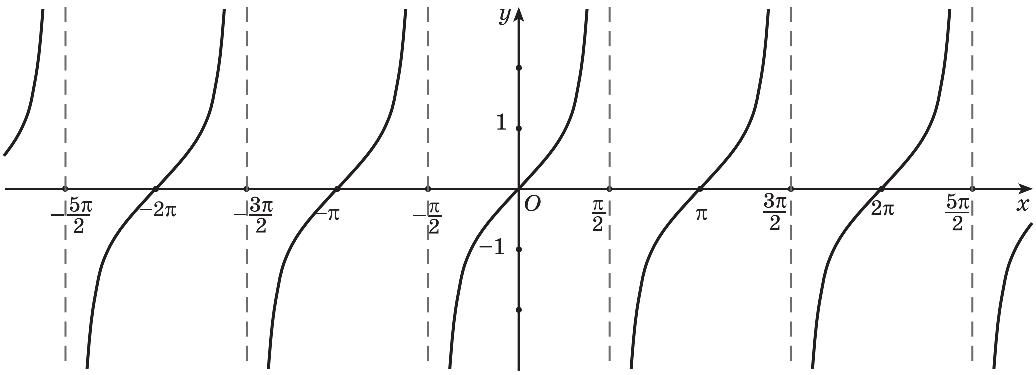


Рис. 88

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображен на рисунке 89. Этот график может быть получен путем преобразования графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

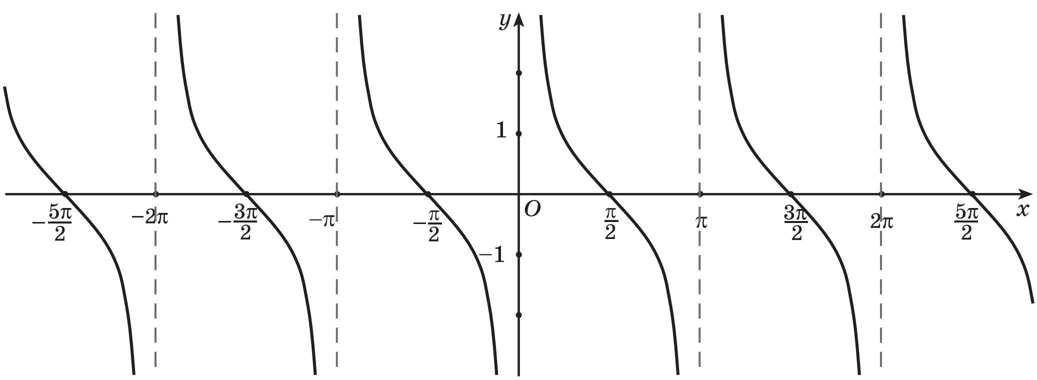


Рис. 89

Примеры основных заданий и их решения

1. Определите, принадлежит ли графику функции $y = \operatorname{tg} x$ точка:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B\left(\frac{\pi}{4}; -1\right)$; в) $C\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) Подставим в формулу $y = \operatorname{tg} x$ значение аргумента $x = 0$ и найдем соответствующее значение функции $y = \operatorname{tg} 0 = 0$. Полученное значение функции равно ординате точки $A(0; 0)$, значит, точка $A(0; 0)$ принадлежит графику функции $y = \operatorname{tg} x$.

б) При $x = \frac{\pi}{4}$ получим $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \neq -1$. Точка $B\left(\frac{\pi}{4}; -1\right)$ не принадлежит графику функции $y = \operatorname{tg} x$.

в) При $x = \frac{3\pi}{2}$ получим $y = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ — не существует. Точка $C\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ не принадлежит графику функции $y = \operatorname{tg} x$.

2. Верно ли, что график функции $y = \operatorname{ctg} x$ проходит через точку:

а) $A\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; б) $B\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $C(-\pi; 0)$?

Решение. а) Подставим в формулу $y = \operatorname{ctg} x$ значение аргумента $x = -\frac{\pi}{2}$ и найдем соответствующее значение функции $y = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Полученное значение функции равно ординате точки $A\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, значит, график функции $y = \operatorname{ctg} x$ проходит через точку $A\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Верно.

б) При $x = \frac{\pi}{6}$ получим $y = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ не проходит через точку $B\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Неверно.

в) При $x = -\pi$ получим $y = \operatorname{ctg}(-\pi)$ — не существует. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ не проходит через точку $C(-\pi; 0)$. Неверно.

3. Найдите область определения функции:

а) $y = \operatorname{ctg} 3x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{5}$.

Решение. а) Так как область определения функции $y = \operatorname{ctg} t$ — это все действительные числа, кроме чисел вида $t = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $3x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, значит, $x \neq \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, область определения данной функции — это все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Правообладатель Народная асвета

б) Областью определения функции $y = \operatorname{tg} t$ является множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Значит, $\frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x \neq \frac{5\pi}{2} + 5\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Область определения данной функции — это все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{5\pi}{2} + 5\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Найдите множество значений функции:

а) $y = \operatorname{tg}\frac{2x}{7}$; б) $y = \operatorname{ctg} 8x$.

Решение. а) Так как множество значений функции $y = \operatorname{tg} t$ — это множество всех действительных чисел, то и $E\left(\operatorname{tg}\frac{2x}{7}\right) = (-\infty; +\infty)$.

б) Так как множество значений функции $y = \operatorname{ctg} t$ — это множество всех действительных чисел, то и $E(\operatorname{ctg} 8x) = \boldsymbol{R}$.

5. Используя свойство периодичности функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\frac{31\pi}{6}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{47\pi}{2}$.

Решение. Так как число π является наименьшим положительным периодом функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, то $\operatorname{tg}(\pi n + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\operatorname{ctg}(\pi n + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда:

а) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{3\pi + \pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{8\pi + \pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$;

в) $\operatorname{tg}\frac{31\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{30\pi + \pi}{6} = \operatorname{tg}\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{47\pi}{2} = \operatorname{ctg}\frac{46\pi + \pi}{2} = \operatorname{ctg}\left(23\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$.

6. Используя свойство нечетности функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{tg}(-2\pi)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$.

Решение. Так как функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ являются нечетными, то $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Тогда:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$;

Правообладатель Народная асвета

в) $\operatorname{tg}(-2\pi) = -\operatorname{tg} 2\pi = 0;$

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{2} = -\operatorname{ctg}\frac{10\pi+\pi}{2} = -\operatorname{ctg}\left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0.$

7. Определите знак произведения $\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg} 4{,}5 \cdot \operatorname{tg} 7$.

Решение. Так как $\pi \approx 3{,}14$, то $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, т. е. угол 2 радиана принадлежит промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, на котором функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает отрицательные значения, значит, $\operatorname{tg} 2 < 0$.

Угол 4,5 радиана принадлежит промежутку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает положительные значения, значит, $\operatorname{ctg} 4{,}5 > 0$.

Угол 7 радиан принадлежит промежутку $\left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает положительные значения, т. е. $\operatorname{tg} 7 > 0$. Значит, $\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg} 4{,}5 \cdot \operatorname{tg} 7 < 0$.

8. Что больше: $\operatorname{ctg} 151°$ или $\operatorname{ctg} 178°$?

Решение. Поскольку углы $151°$ и $178°$ принадлежат промежутку $(0°; 180°)$, на котором функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает и $151° < 178°$, то $\operatorname{ctg} 151° > \operatorname{ctg} 178°$.

9. Постройте график функции:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \operatorname{ctg} x + 1$.

Решение. а) График функции $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ получаем сдвигом графика функции $y = \operatorname{tg} x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{3}$ вправо (рис. 90).

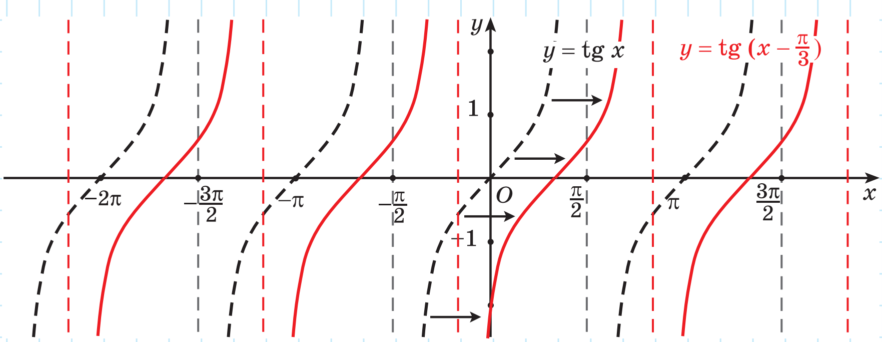


Рис. 90

Правообладатель Народная асвета

б) График функции $y = \operatorname{ctg} x + 1$ получаем сдвигом графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ вдоль оси ординат на 1 единицу вверх (рис. 91).

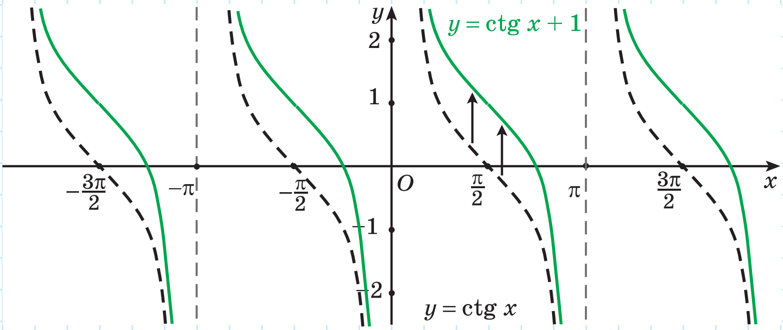


Рис. 91

Какие из чисел $-\frac{9\pi}{2}$; -3π; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\pi$; $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{3\pi}{2}$; 4π не принадлежат области определения функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$?

1.250. Определите, какие из данных точек принадлежат графику функции $y = \operatorname{tg} x$:

а) $A(\pi;\ 0)$; б) $B\left(-\frac{\pi}{4};\ -1\right)$; в) $C\left(\frac{\pi}{3};\ -\sqrt{3}\right)$; г) $D\left(-\frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

1.251. С помощью графика функции $y = \operatorname{tg} x$ определите, верно ли, что:

а) при значении аргумента, равном $\frac{\pi}{4}$, значение функции равно 1;

б) числа π; 2π являются нулями функции;

в) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3}$.

1.252. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значение, равное -1.

1.253. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = \operatorname{tg} 3x$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$.

1.254. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдите:

а) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{6}$; б) $\operatorname{tg} \frac{16\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{4}$; г) $\operatorname{tg} 19\pi$.

Правообладатель Народная асвета

Верно ли, что числа -9π; -4π; $-\pi$; 2π; 15π; 100π являются периодами данной функции?

1.255. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдите:
а) $\operatorname{tg} 405°$; б) $\operatorname{tg} 240°$; в) $\operatorname{tg} 720°$; г) $\operatorname{tg} 1110°$.

1.256. Используя свойство нечетности функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $\operatorname{tg}(-\pi)$; г) $\operatorname{tg}(-5\pi)$.

1.257. Используя свойства периодичности и нечетности функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдите:

а) $f\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; б) $f\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$; в) $f\left(-\frac{67\pi}{6}\right)$; г) $f(-57\pi)$.

1.258. Из чисел -12π; $-\frac{7\pi}{2}$; -2π; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{9\pi}{2}$; 5π выберите нули функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

1.259. Из чисел $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{6}$; 0; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{6}$; 2π выберите значения аргумента, при которых функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает отрицательные значения.

1.260. Верно ли, что $\operatorname{tg} x > 0$, если:

а) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$;

в) $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$; г) $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$?

1.261. Определите знак выражения $\operatorname{tg}(-189°) \cdot \operatorname{tg}(-35°) \cdot \operatorname{tg} 197°$.

1.262. Используя свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, сравните числа:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

1.263. Расположите в порядке возрастания числа $\operatorname{tg}(-0,5)$, $\operatorname{tg} 1,4$ и $\operatorname{tg} 0,3$.

1.264. С помощью графика функции $y = \operatorname{tg} x$ постройте график функции:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \operatorname{tg} x - 1$.

1.265. Верно ли, что график функции $y = \operatorname{ctg} x$ проходит через точку:

а) $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; б) $B\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $C\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; г) $D(\pi; -1)$?

1.266. С помощью графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ определите, верно ли, что:

а) при значении аргумента, равном $\frac{3\pi}{2}$, значение функции равно 0;

б) числа -2π; π являются нулями функции;

в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Правообладатель Народная асвета

1.267. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает значение, равное $\sqrt{3}$.

1.268. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = \operatorname{ctg} 5x$; б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

1.269. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4}$; в) $\operatorname{ctg} \frac{28\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{2}$.

1.270. Используя свойство нечетности функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

1.271. Используя свойства функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $f\left(-\frac{49\pi}{2}\right)$; б) $f\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$; в) $f\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

1.272. Из чисел $-\frac{11\pi}{2}$; -5π; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; 0; 3π; $\frac{9\pi}{2}$ выберите нули функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

1.273. Из чисел $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$ выберите значения аргумента, при которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает положительные значения.

1.274. Верно ли, что $\operatorname{ctg} x < 0$, если:

а) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$;

в) $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$; г) $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$?

1.275. Определите знак выражения $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{13\pi}{7}$.

1.276. Используя свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$, сравните числа:

а) $\operatorname{ctg} 20°$ и $\operatorname{ctg} 130°$; б) $\operatorname{ctg}(-125°)$ и $\operatorname{ctg}(-100°)$.

1.277. Расположите в порядке убывания числа $\operatorname{ctg} 1$, $\operatorname{ctg} 3$ и $\operatorname{ctg} 2$.

1.278. Постройте график функции $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$. Пользуясь графиком, определите: а) нули функции; б) промежутки убывания и возрастания функции; в) промежутки знакопостоянства функции.

1.279. Верно ли, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ проходит через точку:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; б) $B(2\pi; 0)$; в) $C\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$?

Правообладатель Народная асвета

1.280. С помощью графика функции $y = \operatorname{tg} x$ определите, верно ли, что: а) при значении аргумента, равном $-\pi$, значение функции равно 0; б) число $\frac{\pi}{2}$ является нулем функции; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

1.281. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значение, равное $\sqrt{3}$.

1.282. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{8}$.

1.283. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдите:

а) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$; б) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\frac{19\pi}{6}$; г) $\operatorname{tg} 7\pi$.

1.284. Используя свойство нечетности функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\operatorname{tg}(-3\pi)$.

1.285. Используя свойства функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдите:

а) $f(-5\pi)$; б) $f\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$; в) $f\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$.

1.286. Верно ли, что нулями функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ являются числа:

а) 2π; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) -9π; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $-\frac{9\pi}{2}$; е) 11π?

1.287. Определите знак выражения $\operatorname{tg}(-1) \cdot \operatorname{tg} 0,5 \cdot \operatorname{tg} 1$.

1.288. Используя свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, сравните числа $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}$.

1.289. Расположите в порядке убывания числа $\operatorname{tg}(-37°)$, $\operatorname{tg} 67°$ и $\operatorname{tg} 23°$.

1.290. С помощью графика функции $y = \operatorname{tg} x$ постройте график функции:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \operatorname{tg} x + 2$.

1.291. Определите, принадлежит ли графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ точка:

а) $A\left(-\frac{\pi}{4}; -1\right)$; б) $B\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$; в) $C(2\pi; 0)$.

1.292. С помощью графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ определите, верно ли, что: а) при значении аргумента, равном π, значение функции равно 0; б) число $\frac{5\pi}{2}$ является нулем функции; в) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = 1$.

1.293. Найдите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает значение, равное 1.

1.294. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = \operatorname{ctg} 8x$; б) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

1.295. Используя свойство периодичности функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{31\pi}{6}$; в) $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{2}$.

Верно ли, что число 7π является периодом данной функции?

1.296. Используя свойство нечетности функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

1.297. Используя свойства функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$, найдите:

а) $f(-7{,}5\pi)$; б) $f\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$; в) $f\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

1.298. Верно ли, что нулями функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$ являются числа:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 5π; в) $-\frac{9\pi}{2}$; г) π; д) -7π; е) $\frac{11\pi}{2}$?

1.299. Определите знак выражения $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$.

1.300. Используя свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$, сравните числа $\operatorname{ctg}(-100°)$ и $\operatorname{ctg}(-30°)$.

1.301. Расположите в порядке возрастания числа $\operatorname{ctg} 1$, $\operatorname{ctg} 0{,}5$ и $\operatorname{ctg} 2$.

1.302. С помощью графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ постройте график функции:

а) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \operatorname{ctg} x - 1$.

1.303. Постройте график функции $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$. Пользуясь графиком, определите: а) нули функции; б) промежутки убывания и возрастания функции; в) промежутки знакопостоянства функции.

1.304. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 13x - 15 = 0$, найдите значение выражения $\frac{x_1 + x_2}{4x_1x_2}$.

1.305. Упростите выражение:

а) $6\sqrt{7} - \sqrt{28}$; б) $\left(\sqrt{20} - \sqrt{5}\right)^2$;

в) $-\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{2} + \sqrt{18}\right)$; г) $\left(\sqrt{27} - \sqrt{75}\right):\left(2\sqrt{3}\right)$.

1.306. Решите систему неравенств $\begin{cases} x - \frac{x}{4} \leqslant 2, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} < 1. \end{cases}$

1.307. В геометрической прогрессии $b_1 = 0{,}125$, $q = 2$. Найдите b_{10} и S_{10}.

Правообладатель Народная асвета

§ 7. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа

1.308. При каком значении аргумента значение функции $y = 3x - 6$ равно:

а) 0; б) 6; в) –3; г) 1,5?

1.309. Существует ли значение аргумента, при котором значение функции $y = 2x^2$ равно:

а) 8; б) –8; в) 32; г) 0?

1.310. Сколько значений аргумента соответствует значению функции $y = |x|$, равному:

а) 2,5; б) $\frac{3}{7}$; в) –10; г) 0?

При изучении тригонометрических функций часто возникает вопрос о нахождении значения аргумента, при котором значение функции равно заданному числу.

Например, найдем все значения аргумента, при которых значение функции $y = \sin x$ равно $\frac{1}{2}$, т. е. выполняется равенство $\sin x = \frac{1}{2}$.

Так как $y_\alpha = \sin\alpha$, то на оси ординат отметим $\frac{1}{2}$ и через точку $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ проведем прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 92).

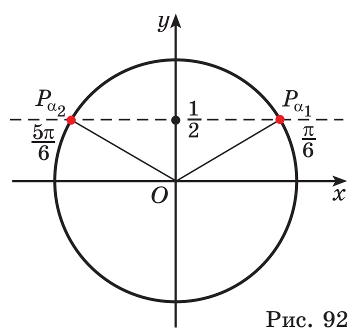


Рис. 92

На единичной окружности найдем точки P_{α_1} и P_{α_2}, ординаты которых равны $\frac{1}{2}$. Этим точкам соответствуют углы $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и таких углов бесконечно много.

Однако, если рассмотреть промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то на нем функция $y = \sin x$ возрастает и принимает все значения от –1 до 1. Поэтому для любого числа α из промежутка [–1; 1] существует единственное число $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $\sin x = a$.

Так, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственное значение аргумента, при котором значение функции $y = \sin x$ равно $\frac{1}{2}$, — это угол, равный $\frac{\pi}{6}$ (рис. 93).

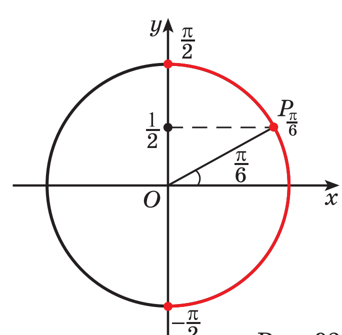


Рис. 93

Правообладатель Народная асвета

Определение. Арксинусом числа a называется угол, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a (рис. 94).

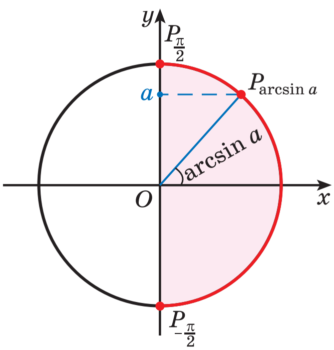


Рис. 94

Этот угол обозначают $\arcsin a$.

Так, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

> $\arcsin a = \alpha$, если
> $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \alpha = a$

Пример 1. Вычислите:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arcsin 1$.

Решение. а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, так как $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (рис. 95, *а*);

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, так как $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 95, *б*).

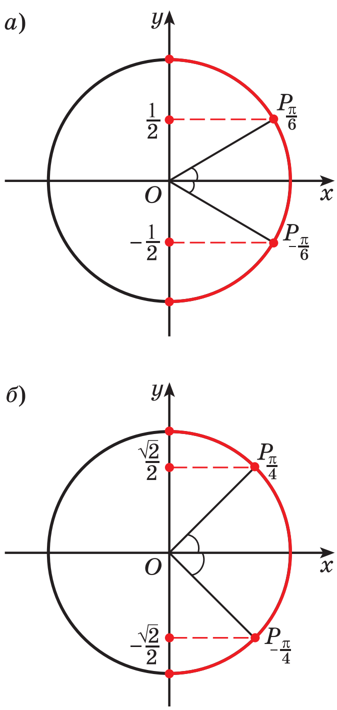


Рис. 95

Заметим, что $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 95).

Так как углы, соответствующие точкам P_α и $P_{-\alpha}$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, с ординатами a и $-a$ отли-

Правообладатель Народная асвета

чаются только знаком, то $\arcsin(-a) = -\arcsin a$, для любого числа $a \in [-1;\ 1]$ (рис. 96).

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

Пусть $\alpha = \arcsin a$, тогда $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = a$.
Так как точки P_α и $P_{-\alpha}$ имеют противоположные ординаты, то $\sin(-\alpha) = -a$.
Поскольку $-\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin(-\alpha) = -a$, то по определению арксинуса $\arcsin(-a) = -\alpha$.
Так как $\alpha = \arcsin a$, то $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ для любого числа $a \in [-1; 1]$.

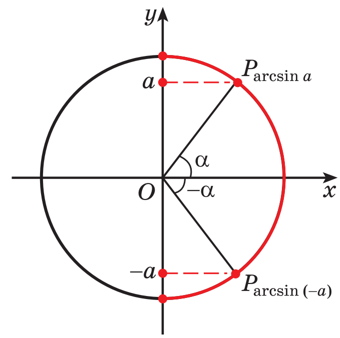


Рис. 96

Воспользуемся полученным равенством и найдем значение выражения

$$\arcsin(-1) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Так как $\arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, то $\arcsin(-1) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Отметим, что областью определения выражения $\arcsin a$ является отрезок $[-1;\ 1]$. Если $|a| > 1$, то выражение $\arcsin a$ не имеет смысла.

Например, выражения $\arcsin 3$, $\arcsin(-5)$, $\arcsin\pi$ не имеют смысла, так как $3 \notin [-1; 1]$, $-5 \notin [-1; 1]$, $\pi \notin [-1; 1]$.

Выражение $\arcsin(-1{,}7)$ **не имеет смысла,** так как $-1{,}7 \notin [-1; 1]$

Из определения арксинуса числа следует, что $\sin(\arcsin a) = a$, если $a \in [-1; 1]$, и $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Например, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}$,

а $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$.

Рассмотрим промежуток $[0;\ \pi]$, на котором функция $y = \cos x$ возрастает и принимает все значения от -1 до 1. Для любого числа a из промежутка $[-1;\ 1]$ существует единственное число $x \in [0;\ \pi]$ такое, что $\cos x = a$.

Правообладатель Народная асвета

Определение. Арккосинусом числа a называется угол, принадлежащий промежутку $[0; \pi]$, косинус которого равен a (рис. 97).

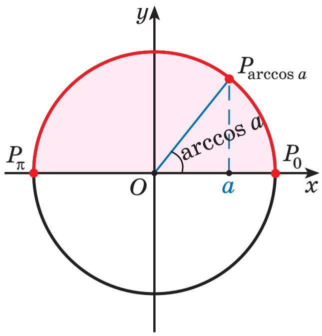


Рис. 97

Этот угол обозначают $\arccos a$.

Например, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos a = \alpha$, если $\alpha \in [0; \pi]$ и $\cos \alpha = a$

Пример 3. Вычислите:

а) $\arccos \frac{1}{2}$;

б) $\arccos 0$.

Решение. а) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

б) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, так как $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Пример 4. Найдите значение выражения:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, так как $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (рис. 98, *а*);

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, так как $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$ и $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 98, *б*).

Заметим, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 98).

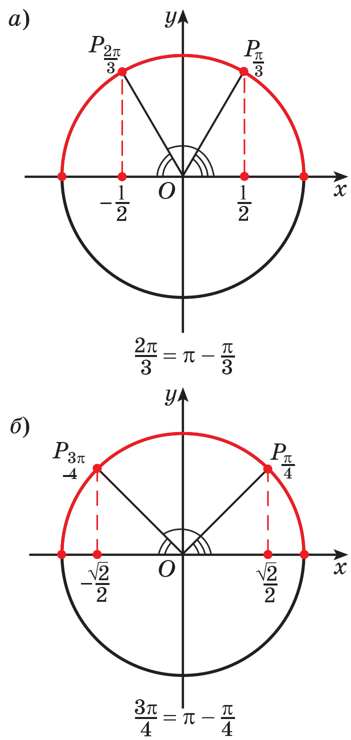


Рис. 98

Правообладатель Народная асвета

Пусть $\alpha = \arccos a$, тогда $\alpha \in [0; \pi]$ и $\cos\alpha = a$.
Так как точки P_α и $P_{\pi-\alpha}$ имеют противоположные абсциссы, то $\cos(\pi - \alpha) = -a$.
Поскольку $\pi - \alpha \in [0; \pi]$ и $\cos(\pi - \alpha) = -a$, то по определению арккосинуса $\arccos(-a) = \pi - \alpha$. Так как $\alpha = \arccos a$, то $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ для любого числа $a \in [-1; 1]$ (рис. 99).

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

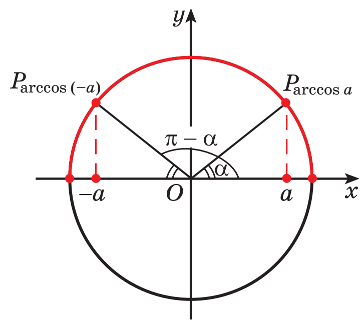


Рис. 99

Воспользуемся полученным равенством и найдем значение выражения

$$\arccos(-1) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Так как $\arccos(-1) = \pi - \arccos 1 = \pi - 0 = \pi$

и $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

то $\arccos(-1) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi + 2\cdot\frac{5\pi}{6} = \pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$.

Областью определения выражения $\arccos a$ является отрезок $[-1; 1]$. Если $|a| > 1$, то выражение $\arccos a$ не имеет смысла.

Так, выражения $\arccos 1{,}5$, $\arccos(-8)$, $\arccos\frac{\pi}{2}$ не имеют смысла, поскольку $1{,}5 \notin [-1; 1]$, $-8 \notin [-1; 1]$, $\frac{\pi}{2} \notin [-1; 1]$.

Выражение $\arccos(-\sqrt{3})$ **не имеет смысла**, так как $-\sqrt{3} \notin [-1; 1]$

Из определения арккосинуса числа следует, что $\cos(\arccos a) = a$, если $a \in [-1; 1]$, и $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in [0; \pi]$.

Например, $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}$, а $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{7\pi}{8}$.

На промежутке монотонности $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функции $y = \operatorname{tg} x$ существует единственный угол, тангенс которого равен некоторому данному числу a.

Правообладатель Народная асвета

Определение. Арктангенсом числа a называется угол, принадлежащий промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a (рис. 100).

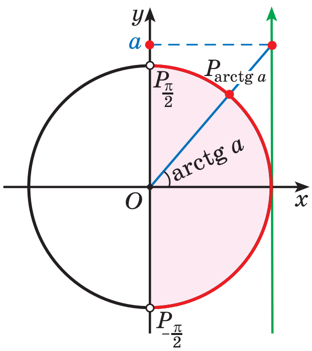


Рис. 100

Этот угол обозначают $\text{arctg}\,a$.

Так, $\text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$.

$\text{arctg}\,a = \alpha$, если $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\,\alpha = a$

Пример 5. Вычислите:

а) $\text{arctg}\sqrt{3}$;
б) $\text{arctg}\,0$;
в) $\text{arctg}\,(-1)$.

Решение. а) $\text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

б) $\text{arctg}\,0 = 0$, так как $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\,0 = 0$;

в) $\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, так как $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

$\text{arctg}\,(-a) = -\text{arctg}\,a$

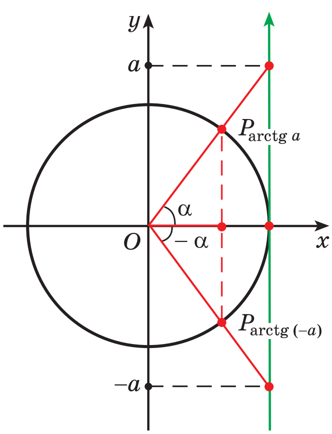


Рис. 101

Для любого числа $a \in \boldsymbol{R}$ верно равенство $\text{arctg}\,(-a) = -\,\text{arctg}\,a$ (рис. 101).

Пример 6. Найдите значение выражения $5\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решение. Так как $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\text{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ и $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$, то

$$5\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = -\frac{21\pi}{12} = -\frac{7\pi}{4}.$$

Из определения арктангенса числа следует, что $\text{tg}\,(\text{arctg}\,a) = a$ при $a \in \boldsymbol{R}$ и $\text{arctg}\,(\text{tg}\,\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Правообладатель Народная асвета

Например, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}$, а $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = -\frac{\pi}{5}$.

На промежутке монотонности $(0; \pi)$ функции $y = \operatorname{ctg} x$ существует единственный угол, котангенс которого равен некоторому данному числу a.

Определение. Арккотангенсом числа a называется угол, принадлежащий промежутку $(0; \pi)$, котангенс которого равен a (рис. 102).

Этот угол обозначают $\operatorname{arcctg} a$.

Например, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

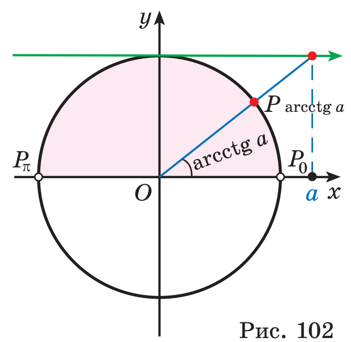


Рис. 102

Пример 7. Вычислите:

а) $\operatorname{arcctg} 1$;

б) $\operatorname{arcctg} 0$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решение. а) $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$;

б) $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, так как $\frac{\pi}{2} \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, так как $\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\operatorname{arcctg} a = \alpha$, если $\alpha \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = a$

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

Для любого числа $a \in \boldsymbol{R}$ верно равенство $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ (рис. 103).

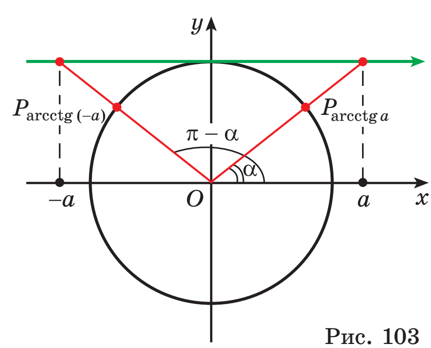


Рис. 103

Пример 8. Найдите значение выражения $3\operatorname{arcctg}(-1) - \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. Так как $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ и $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, то $3\operatorname{arcctg}(-1) - \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = 3 \cdot \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = \frac{9\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = \frac{17\pi}{12}$.

Из определения арккотангенса числа следует, что $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$, если $a \in \boldsymbol{R}$, и $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in (0; \pi)$.

Например, $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}(-7)\right) = -7$, а $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{7\pi}{8}$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Верно ли, что:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; б) $\arccos 1 = 0$;

в) $\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$?

Решение. а) Верно, так как $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) верно, так как $0 \in [0; \pi]$ и $\cos 0 = 1$;

в) неверно, так как $\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

г) неверно, так как $-\frac{\pi}{3} \notin (0; \pi)$.

2. Вычислите:

а) $\arcsin(-1)$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}(-1)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Решение. а) $\arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$;

Правообладатель Народная асвета

г) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\arccos(-1) + \arcsin(-1) + \operatorname{arctg}(-1)$;

б) $\arccos 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 0$.

Решение. а) $\arccos(-1) + \arcsin(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

б) $\arccos 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{3}$.

4. Оцените значение выражения $\operatorname{arctg}x - \frac{3\pi}{4}$.

Решение. По определению арктангенса числа $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}x < \frac{\pi}{2}$.
Воспользуемся свойствами числовых неравенств и получим:
$-\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} < \operatorname{arctg}x - \frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4} < \operatorname{arctg}x - \frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{4}$.

5. Найдите область определения выражения:

а) $\arcsin(x - 1)$; б) $\arccos(2x + 5)$.

Решение. а) По определению арксинуса числа $\arcsin(x - 1)$ — это угол, синус которого равен $(x - 1)$, т. е. $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x \in [0;\ 2]$.

б) По определению арккосинуса числа $\arccos(2x + 5)$ — это угол, косинус которого равен $(2x + 5)$, т. е. $-1 \leqslant 2x + 5 \leqslant 1$, $-6 \leqslant 2x \leqslant -4$, $-3 \leqslant x \leqslant -2$, $x \in [-3;\ -2]$.

6. Найдите значение выражения:

а) $\arccos(\sin 2\pi)$; б) $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Решение. а) $\arccos(\sin 2\pi) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot(-1)\right) = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

7. Вычислите $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Правообладатель Народная асвета

8*. Найдите значение выражения $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{5}\right)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ при $\alpha \in [0; \pi]$. Поскольку $\frac{11\pi}{5} \notin [0; \pi]$, то эту формулу сразу применить нельзя.

Так как $\cos\frac{11\pi}{5} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$ и $\frac{\pi}{5} \in [0; \pi]$, то $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{5}\right) =$ $= \arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$.

9*. Найдите значение выражения $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{7}\right)\right) + \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{7}\right)$.

Решение. Так как $\sin(\arcsin a) = a$ при $a \in [-1; 1]$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$ при $a \in \boldsymbol{R}$, то $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{7}\right)\right) + \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{7}\right) = -\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$.

1. Из чисел $-\frac{\pi}{2}$; 0 и π выберите число, которое не может быть значением выражения $\arcsin b$.

2. Из чисел $\frac{\pi}{7}$; $-\frac{3\pi}{8}$ и $\frac{5\pi}{9}$ выберите число, которое может быть значением выражения $\operatorname{arcctg}\alpha$.

1.311. Верно ли, что:

а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; б) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$?

1.312. Используйте определение $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$ или $\operatorname{arcctg} a$ и найдите значение выражения:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\arcsin 0$; г) $\arcsin(-1)$;

д) $\arccos\frac{1}{2}$; е) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ж) $\arccos 1$; з) $\arccos 0$;

и) $\operatorname{arctg} 1$; к) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; л) $\operatorname{arctg} 0$; м) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

н) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; о) $\operatorname{arcctg} 0$; п) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; р) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

Правообладатель Народная асвета

1.313. Найдите значение выражения:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{2\pi}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1)-\frac{3\pi}{4}$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\pi$.

1.314. Используйте определения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ и вычислите:

а) $\operatorname{arctg}1+3\arccos 1$; б) $2\operatorname{arctg}(-1)-\arcsin(-1)$;

в) $4\arccos(-0{,}5)+\arcsin(-0{,}5)$; г) $2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1.315. Оцените значение выражения:

а) $\operatorname{arctg} b+\frac{\pi}{8}$; б) $2\arccos b-\frac{4\pi}{15}$.

1.316. Найдите область определения выражения:

а) $\arcsin(2x-3)$; б) $\arccos(5-3x)$.

1.317. Определите последовательность действий для вычисления значения выражения и вычислите:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

г) $\arcsin\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right)$; д) $\arccos(3\sin\pi)$; е) $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}\cos 4\pi\right)$.

1.318. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\cos\left(8\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

в) $\sin\left(11\operatorname{arcctg}(-1)\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$;

д) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$; е) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.319. Используйте определения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$ и найдите значение выражения $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\arccos 0$.

1.320. Вычислите: $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)+\sin\left(3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

1.321. Найдите значение выражения:

а) $\arcsin 0+\arccos 0+\operatorname{arctg}0+\operatorname{arcctg}0-\pi$;

б) $\arcsin(-1)+2\arccos(-1)+4\operatorname{arctg}(-1)+2\operatorname{arcctg}(-1)+13\pi$.

Правообладатель Народная асвета

1.322. Используйте определение $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$ или $\operatorname{arcctg} a$ и найдите значение выражения:

а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg} 1$; д) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

ж) $\arcsin 1$; з) $\arccos(-1)$; и) $\operatorname{arctg} 0$.

1.323. Используйте определения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ и вычислите:

а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3\pi}{4}$; б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\pi$.

1.324. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arcctg}(-1)$; б) $\arccos 0 - \arcsin 0$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + 2\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; г) $2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.325. Оцените значение выражения:

а) $\operatorname{arcctg} b - 2\pi$; б) $3\arcsin b + \frac{\pi}{6}$.

1.326. Найдите область определения выражения:

а) $\arccos(8x + 1)$; б) $\arcsin\left(7 - \frac{x}{2}\right)$.

1.327. Выберите последовательность действий и найдите значение выражения:

а) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; г) $\operatorname{arctg}(2\sin 3\pi)$.

1.328. Вычислите значение тригонометрической функции, используя значения $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$:

а) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; б) $\cos(2\operatorname{arctg} 1)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$; е) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Правообладатель Народная асвета

1.329. Найдите значение выражения

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 5\operatorname{arcctg}(-1) - \arccos 1.$$

1.330. Вычислите:

а) $5\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin 0;$

б) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

1.331. Переведите 1 234 500 км в метры и результат запишите в стандартном виде.

1.332. Найдите корни уравнения $\frac{x^2 - 49}{x - 7} = 0.$

1.333. Разложите на множители:

а) $7a^2 - a;$ б) $4m^2 - 9n^2;$ в) $b^3 - b^2 + b - 1;$ г) $x^2 - 6x + 8.$

1.334. Найдите нуль функции $y = -\frac{3}{4}x - 12.$ Приведите пример линейной функции, не имеющей нулей.

1.335. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 \leqslant 0, \\ 7x - 14 > 0. \end{array}\right.$

1.336. Найдите значение выражения $\frac{9}{\sqrt{13} - 2} + \frac{3}{4 + \sqrt{13}}.$

1.337. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(8; -5)$ относительно оси симметрии параболы $y = 4x^2 + 8x + 3.$

§ 8. Тригонометрические уравнения

1.338. Сколько корней имеет уравнение:

а) $(x - 1)(x + 2{,}1)(x + 1{,}5) = 0;$ б) $x^2 = -3?$

1.339. Из чисел $-3; -\sqrt{3}; -1; 0; 1; \sqrt{3}; 3$ выберите корни уравнения $x^4 - 4x^2 + 3 = 0.$

1.340. Верно ли, что уравнения $2x - 12 = 0$ и $\frac{x^2 - 36}{x - 6} = 0$ равносильны?

Правообладатель Народная асвета

При изучении физических процессов, связанных с гармоническими колебаниями, рассматривают функцию $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота колебания, φ — начальная фаза колебания.

Например, $f(t) = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$, $A = 3$, $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Одна из задач, которую решают при изучении процесса колебания, заключается в том, чтобы найти моменты времени t, в которые амплитуда колебания достигает некоторого значения, например равного 2. Для решения этой задачи нужно решить уравнение: $3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = 2$. Это уравнение относится к тригонометрическим.

Рассмотрим методы решения тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения — это уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$.

Например, уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -1$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} x = 5$ являются простейшими тригонометрическими уравнениями.

Уравнение $\sin x = a$

1. При $|a| > 1$, т. е. $a < -1$ или $a > 1$, уравнение $\sin x = a$ не имеет корней, так как множеством значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$. Например, уравнения $\sin x = \sqrt{5}$, $\sin x = -2$, $\sin x = 1{,}2$ не имеют корней.

2. Рассмотрим частные случаи решения уравнения $\sin x = a$ для $a = 0$, $a = 1$ и $a = -1$.

а) Решим уравнение $\sin x = 0$. Синус числа равен нулю (т. е. ордината соответствующей числу точки равна нулю) только в двух точках единичной окружности (рис. 104). Эти точки получены из точки $P_0(1; 0)$ в результате поворотов на углы 0; π; 2π; 3π; ... или $-\pi$; -2π; -3π; ... .

Таким образом, получим, что $\sin x = 0$ при $x = \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

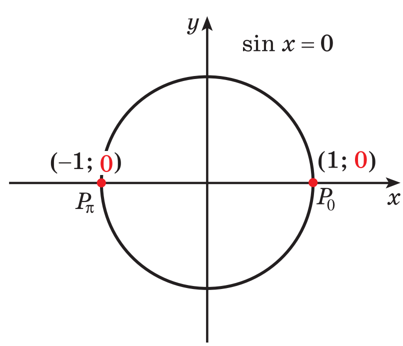


Рис. 104

$$\sin x = 0$$
$$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

Правообладатель Народная асвета

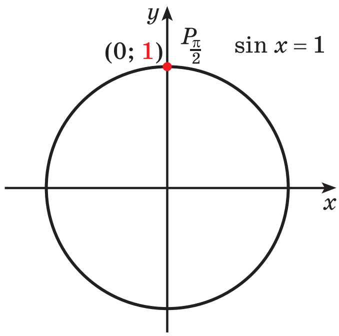


Рис. 105

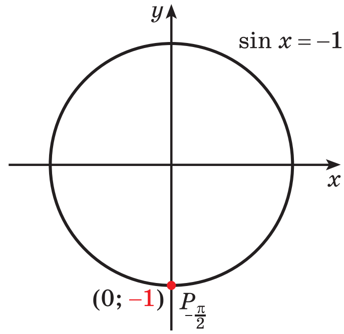


Рис. 106

$$\sin x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$\sin x = -1$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

б) Решим уравнение $\sin x = 1$. Синус числа равен 1 для $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку ордината точки $P_{\frac{\pi}{2}}$ равна 1 (рис. 105). Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, получим, что $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Решим уравнение $\sin x = -1$. Синус числа равен -1 для $x = -\frac{\pi}{2}$, поскольку ордината точки $P_{-\frac{\pi}{2}}$ равна -1 (рис. 106). В соответствии со свойством периодичности функции синус получим, что все решения уравнения $\sin x = -1$ — это числа вида $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Решим уравнение $\sin x = a$ для $0 < |a| < 1$, т. е. для $-1 < a < 0$ или $0 < a < 1$.

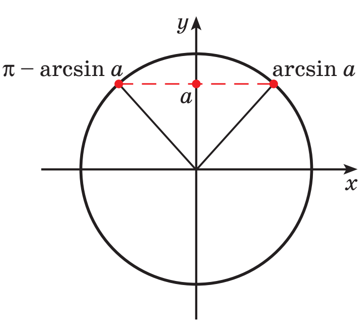


Рис. 107

Рассмотрим решение уравнения $\sin x = a$ на промежутке $[-\pi; \pi]$, равном периоду функции $y = \sin x$.

На промежутке возрастания функции $y = \sin x$, принадлежащем этому периоду, существует единственное значение аргумента, при котором значение функции равно a, это $x = \arcsin a$ (рис. 107). На промежутке убывания функции $y = \sin x$ из этого периода существует единственное значение аргумента, при котором значение функции равно a, это

Правообладатель Народная асвета

$x = \pi - \arcsin a$ (см. рис. 107). Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, получим все решения этого уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

$$\sin x = a,$$
$$0 < |a| < 1,$$
$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$
$$n \in \boldsymbol{Z}$$

Запишем полученные решения в виде

$$\left[\begin{array}{ll} x = \arcsin a + \pi \cdot 2k, & (1) \\ x = -\arcsin a + \pi \cdot (2k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}, & (2) \end{array}\right.$$

и объединим эти две формулы в одну: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Из нее при четном n получаем формулу (1), а при нечетном — формулу (2).

Таким образом, получены все решения уравнения $\sin x = a$ при любых значениях a:

Решения уравнения $\sin x = a$	
$\lvert a \rvert > 1$	Нет корней
$a = 0$	$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\lvert a \rvert < 1,\ a \neq 0$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Пример 1. Решите уравнение:

а) $\sin x = 2{,}4$; б) $\sin \frac{x}{5} = 0$; в) $\sin 3x = -1$;

г) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sin x = \frac{2}{7}$.

Решение. а) Так как $2{,}4 > 1$, то уравнение $\sin x = 2{,}4$ не имеет корней.

Ответ: нет корней.

б) $\sin \frac{x}{5} = 0$; $\frac{x}{5} = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Умножим обе части этого уравнения на 5 и получим: $x = 5\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $5\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}$$
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}$$

Правообладатель Народная асвета

в) $\sin 3x = -1;$ $3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$. Разделим обе части этого уравнения на 3 и получим:

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^n \left(-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^n \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

г) Так как $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, то для решения уравнения $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ воспользуемся формулой корней тригонометрического уравнения

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Тогда $2x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$ $2x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ Разделим обе части этого уравнения на 2 и получим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

д) Так как $0 < \frac{2}{7} < 1$, то по формуле корней тригонометрического уравнения $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, получим: $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{7} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{2}{7} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Уравнение $\cos x = a$

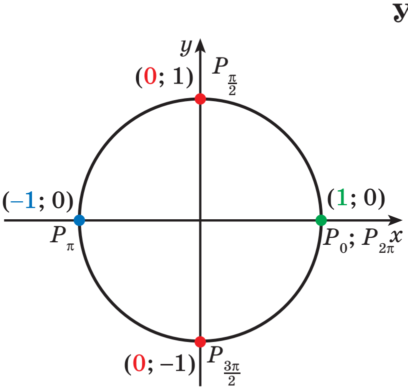


Рис. 108

1. При $|a| > 1$, т. е. $a < -1$ или $a > 1$, уравнение $\cos x = a$ не имеет корней, так как множеством значений функции $y = \cos x$ является промежуток $[-1; 1]$.

Например, уравнения $\cos x = 7$, $\cos x = \sqrt{6}$, $\cos x = -\pi$ не имеют корней.

2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$ для $a = 0$, $a = 1$ и $a = -1$ отмечены на единичной окружности (рис. 108) и приведены в таблице.

Правообладатель Народная асвета

а) $\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
б) $\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
в) $\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

3. Решим уравнение $\cos x = a$ для $0 < |a| < 1$, т. е. для $-1 < a < 0$ или $0 < a < 1$.

Рассмотрим решение уравнения $\cos x = a$ на промежутке $[-\pi; \pi]$.

Для $x \in [0; \pi]$ существует единственное значение аргумента, при котором значение функции $y = \cos x$ равно a, это $x = \arccos a$, оно является единственным решением уравнения $\cos x = a$ на этом промежутке (рис. 109).

Так как функция $y = \cos x$ четная, то $x = -\arccos a$ также является решением этого уравнения.

Учитывая периодичность функции $y = \cos x$, получим все решения этого уравнения:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

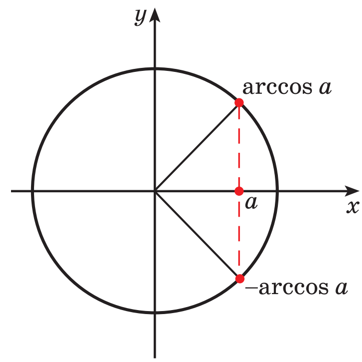


Рис. 109

$\cos x = a,\ 0 < |a| < 1,$
$x = \pm\arccos a + 2\pi n,$
$n \in \boldsymbol{Z}$

Таким образом, получены все решения уравнения $\cos x = a$ при любых значениях a. Представим их в виде таблицы.

Решения уравнения $\cos x = a$	
$\lvert a\rvert > 1$	Нет корней
$a = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$a = 1$	$x = 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$a = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\lvert a\rvert < 1, a \neq 0$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Пример 2. Решите уравнение:

а) $\cos x = -\sqrt{2}$; б) $\cos 7x = 0$; в) $\cos \frac{2x}{9} = 1$;

г) $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\cos \frac{x}{8} = 0{,}9$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) Так как $-\sqrt{2} < -1$, то уравнение $\cos x = -\sqrt{2}$ не имеет корней.

Ответ: нет корней.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

б) $\cos 7x = 0$; $7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \boldsymbol{Z}$.

в) $\cos\frac{2x}{9} = 1$; $\frac{2x}{9} = 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{9} = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $x = 9\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $9\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

г) Для решения уравнения $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ воспользуемся четностью функции косинус и получим уравнение $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, то для решения уравнения $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ применим формулу корней тригонометрического уравнения $x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, и получим: $3x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $3x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

д) Так как $0 < 0{,}9 < 1$, то по формуле корней тригонометрического уравнения $x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$, получим: $\frac{x}{8} = \pm\arccos 0{,}9 + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm 8\arccos 0{,}9 + 16\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm 8\arccos 0{,}9 + 16\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Множеством значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

При любом $a \in \boldsymbol{R}$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует единственное значение аргумента, при котором значение функции $y = \operatorname{tg} x$ равно a, это

Правообладатель Народная асвета

$x = \operatorname{arctg} a$, оно является единственным решением уравнения $\operatorname{tg} x = a$ на этом промежутке (рис. 110). Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, получим все решения этого уравнения: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

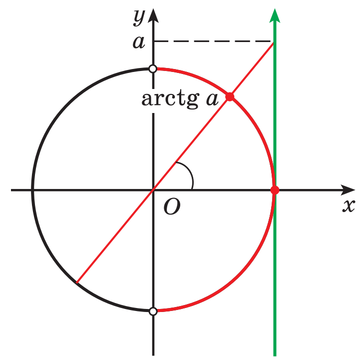


Рис. 110

$\operatorname{tg} x = a$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Пример 3. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{tg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{tg}(-x) = 5$; г) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = 0$.

Решение. а) По формуле $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, получим: $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

б) $2x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$2x = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $2x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Для решения уравнения $\operatorname{tg}(-x) = 5$ воспользуемся нечетностью функции тангенс и получим: $-\operatorname{tg} x = 5$; $\operatorname{tg} x = -5$. Тогда $x = \operatorname{arctg}(-5) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

г) $\frac{x}{4} = \operatorname{arctg} 0 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{4} = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

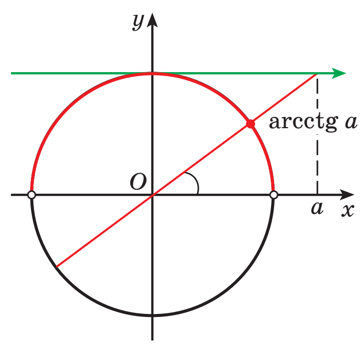


Рис. 111

$\operatorname{ctg} x = a$
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

Множеством значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Все решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ можно найти по формуле $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 111).

Пример 4. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = -1$; в) $\operatorname{ctg} \frac{3x}{7} = 0$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) По формуле $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, получим: $x = \operatorname{arcctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

б) $x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi - \operatorname{arcctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

в) $\frac{3x}{7} = \operatorname{arcctg} 0 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{3x}{7} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $3x = \frac{7\pi}{2} + 7\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Тригонометрические уравнения при решении, как правило, сводятся к простейшим.

Некоторые виды тригонометрических уравнений

1. Уравнения, в которых можно выполнить замену переменной

Рассмотрим уравнения вида

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые действительные числа, $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из тригонометрических функций.

Например, решим уравнение $4\sin^2 x + 5\sin x + 1 = 0$.

Введем новую переменную $t = \sin x$, тогда данное уравнение можно записать в виде $4t^2 + 5t + 1 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение: $D = 9,\ \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$

Подставим найденные значения t в равенство $t = \sin x$ и получим простейшие тригонометрические уравнения: $\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$

Решения первого уравнения совокупности: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Решения второго уравнения: $x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Правообладатель Народная асвета

2. Однородные тригонометрические уравнения

Однородные тригонометрические уравнения второй степени — это уравнения, которые можно привести к виду $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + k\cos^2 x = 0$, где a, b, k — некоторые действительные числа, $a \neq 0$, $k \neq 0$.

Заметим, что в однородном уравнении $\cos x \neq 0$. В противном случае, если $\cos x = 0$, то уравнение принимает вид $a\sin^2 x = 0$, а значит, $\sin x = 0$, но равенства $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$ одновременно выполняться не могут.

Решим уравнение $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ $\left(\cos^2 x \neq 0\right)$:

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$ и получим уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

Выполнив замену переменной $\operatorname{tg} x = t$, получим квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$.

Значит, $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = 2$.

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = 1$ и получим $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ являются числа $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Решите уравнение:

а) $\sin 4x = 0{,}5$;

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$;

в) $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 10x\right) = 0$;

д) $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$;

е) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2\pi}{3} - 3x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. а) Поскольку $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, то по формуле $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, имеем: $4x = (-1)^n \arcsin 0{,}5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $4x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Разделим обе части этого уравнения на 4 и получим: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Правообладатель Народная асвета

б) Так как функция синус является нечетной функцией, то данное уравнение равносильно уравнению $-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Умножим обе части этого уравнения на (–1) и получим уравнение $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. Тогда $x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $x-\frac{\pi}{3}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

в) Поскольку $-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$, то для решения данного уравнения воспользуемся формулой $x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, и получим: $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Тогда $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+$ $+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Умножим обе части этого уравнения на 2 и получим: $x=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{5\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

г) Воспользуемся четностью функции косинус и получим уравнение $\cos\left(10x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, равносильное данному. Тогда $10x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $10x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $10x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Разделим обе части уравнения на 10 и получим: $x=\frac{3\pi}{40}+\frac{\pi n}{10},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

д) Запишем уравнение $\operatorname{tg}\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$ в виде $\operatorname{tg}\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$ и по формуле $x=\operatorname{arctg}a+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, получим: $x+\frac{5\pi}{6}=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x+\frac{5\pi}{6}=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $x+\frac{5\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $x=-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $x=-\frac{7\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

е) Воспользуемся нечетностью функции котангенс и получим уравнение $-\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, тогда $\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. По формуле

Правообладатель Народная асвета

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, имеем: $3x - \frac{2\pi}{3} = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $3x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $3x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $3x - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $3x = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $3x = \frac{4\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: а) $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2} \pm \frac{5\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{3\pi}{40} + \frac{\pi n}{10},\ n \in \boldsymbol{Z}$; д) $-\frac{7\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{4\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Решите уравнение:

а) $6\cos^2 x + 5\sin x = 7$; б) $2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$.

Решение. а) Используем основное тригонометрическое тождество и заменим $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. Тогда уравнение примет вид: $6(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 7$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. Пусть $\sin x = t$, тогда $6t^2 - 5t + 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3}, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Подставим найденные значения t в равенство $\sin x = t$, получим и решим простейшие тригонометрические уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{3}, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$.

б) Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение можно записать в виде $2\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3$. Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$2t + \frac{1}{t} = 3; \quad \begin{cases} 2t^2 - 3t + 1 = 0, \\ t \neq 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Правообладатель Народная асвета

Подставим найденные значения t в равенство $\operatorname{tg} x = t$, получим и решим совокупность простейших тригонометрических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

3. Решите уравнение:

а) $\cos x \sin 3x = 0$; б) $\sqrt{3}\sin x = \cos^2 x \sin x$.

Решение. а) $\cos x \sin 3x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \cos x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z};\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

б) $\sqrt{3}\sin x - \cos^2 x \sin x = 0;\ \sin x\left(\sqrt{3} - \cos^2 x\right) = 0;\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos^2 x = \sqrt{3}.\end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности не имеет корней, поскольку $\sqrt{3} > 1$. Тогда $\sin x = 0;\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 0$; б) $8\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$.

Решение. а) Уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 0$ является однородным уравнением первой степени. Так как значения переменной, при которых $\cos 2x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos 2x$ и получим:

$$\sqrt{3}\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = 0;\quad \sqrt{3}\operatorname{tg} 2x + 1 = 0;\ \operatorname{tg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

б) Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим: $8\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3\cdot\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$

Правообладатель Народная асвета

$5\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. Тогда $5\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 4\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $5\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 4 = 0$.

Пусть $\mathrm{tg}\, x = t$, тогда $5t^2 - t - 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -\frac{4}{5}. \end{array}\right.$ Таким образом,

$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = 1, \\ \mathrm{tg}\, x = -\frac{4}{5}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -\mathrm{arctg}\,\frac{4}{5} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\mathrm{arctg}\,\frac{4}{5} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5*. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения $\cos(2x - 12^\circ) = 0$.

Решение. $\cos(2x - 12^\circ) = 0$; $2x - 12^\circ = 90^\circ + 180^\circ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $2x = 102^\circ + 180^\circ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = 51^\circ + 90^\circ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Наименьший положительный корень уравнения равен 51°.

Ответ: 51°.

?

1. Из данных уравнений выберите уравнения, не имеющие корней:
а) $\sin x = 2$; б) $\cos x = 2$; в) $\mathrm{tg}\, x = 2$; г) $\mathrm{ctg}\, x = 2$.

2. Множество чисел $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, является решением уравнения:
а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = 0$; в) $\mathrm{tg}\, x = 0$; г) $\mathrm{ctg}\, x = 0$.
Выберите правильный ответ.

1.341. Решите уравнение, используя формулы решения простейших тригонометрических уравнений:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = 1$;
г) $\sin x = 1{,}5$; д) $\sin 2x = 0$; е) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
ж) $\cos x = -\frac{1}{2}$; з) $\cos x = -1$; и) $\cos x = \frac{1}{3}$;
к) $\cos 4x = 0$; л) $\sin \frac{x}{4} = 1$; м) $\cos \frac{2x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
н) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; о) $\cos 5x = \sqrt{2}$; п) $\sin 8x = -2{,}3$.

Правообладатель Народная асвета

1.342. Найдите корни уравнения:

а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1;$ б) $\cos\left(x-\frac{\pi}{9}\right)=1;$

в) $\sin\left(x+\frac{\pi}{10}\right)=\frac{2}{7};$ г) $\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$

д) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2};$ е) $\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)+0{,}5=0.$

1.343. Решите уравнение, используя формулы решения простейших тригонометрических уравнений:

а) $\operatorname{tg} x=\sqrt{3};$ б) $\operatorname{ctg} x=1;$ в) $\operatorname{tg} 5x=0;$

г) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=0;$ д) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{9}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3};$ е) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)=-1;$

ж) $\operatorname{ctg}\left(4x+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3};$ з) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)+1=0.$

1.344. Воспользуйтесь свойством четности (нечетности) тригонометрических функций и решите уравнение:

а) $\sin(-2x)=\frac{1}{2};$ б) $\cos\left(-\frac{x}{5}\right)=-1;$

в) $\operatorname{tg}(-7x)=-\sqrt{3};$ г) $\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

1.345. Найдите нули функции $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{12}-5x\right)-1.$

1.346. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x+3\sin x-4=0;$ б) $2\cos^2 x+3\cos x+1=0;$

в) $2\sin^2 x-7\cos x-5=0;$ г) $2\cos^2 x-5\sin x+1=0;$

д) $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-3=0;$ е) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x+3=\frac{3}{\cos^2 x}.$

1.347. Решите уравнение, используя способ разложения выражения на множители:

а) $(\sin x-0{,}5)(\sin x+1)=0;$ б) $3\cos\frac{x}{3}+4\cos^2\frac{x}{3}=0;$

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x=0;$ г) $3-4\cos^2 x=0;$

д) $4\sin x=\cos^2 x\sin x;$ е) $\sqrt{3}\sin 3x=2\cos x\sin 3x.$

1.348. Определите, можно ли представить уравнение в виде однородного, и решите уравнение:

а) $\sin x+\cos x=0;$ б) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0;$

в) $3\sin^2 x+\sin x\cos x=2\cos^2 x;$ г) $6\cos^2 x+4\sin x\cos x=1;$

д) $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0;$

е) $2\sin^2 x+\cos^2 x+3\sin x\cos x=3.$

Правообладатель Народная асвета

1.349*. Найдите (в градусах) наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения:

а) $\sin(60^\circ + x) = -1$; б) $\cos(30^\circ - 5x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) = \sqrt{3}$.

1.350*. Найдите (в градусах) все корни уравнения $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$, принадлежащие промежутку $[-180^\circ; 60^\circ]$.

1.351. Решите простейшее тригонометрическое уравнение:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\sin\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = -\frac{1}{2}$; е) $\cos\left(x + \frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{3}$;

ж) $\sin x = \frac{5}{6}$; з) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; и) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

1.352. Найдите все корни уравнения:

а) $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\mathrm{ctg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{8} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

г) $\mathrm{tg}\frac{x}{3} = 7$; д) $\mathrm{ctg}\,5x = 2$; е) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{10}\right) = 0$.

1.353. Воспользуйтесь свойством четности (нечетности) тригонометрических функций и решите уравнение:

а) $\sin(-4x) = -1$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) - \sqrt{3} = 0$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.354. Найдите нули функции $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \sqrt{3}$.

1.355. Решите уравнение, выполнив замену переменной:

а) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$; б) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

в) $\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0$; г) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;

д) $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$; е) $3\cos x = 2\sin^2 x$;

ж) $\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}\,x - 3 = 0$; з) $\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

1.356. Используйте способ разложения на множители и решите уравнение:

а) $(\cos x + 0{,}5)(\cos x - 1) = 0$; б) $2\sin\frac{x}{2} = 3\sin^2\frac{x}{2}$;

в) $3\mathrm{tg}^2\frac{x}{4} - 9 = 0$; г) $1 - 4\sin^2 x = 0$;

д) $9\cos x = \sin^2 x\cos x$; е) $\sin x = \cos 2x\sin x$.

Правообладатель Народная асвета

1.357. Решите уравнение, используя метод решения однородных уравнений:

а) $\sin x - \cos x = 0$;

б) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

в) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x$;

г) $3\cos^2 x + 4\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 2$.

1.358*. Найдите (в градусах) наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения:

а) $\sin(30° - x) = \frac{1}{2}$; б) $\cos(45° - 2x) = 0$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + 60°\right) = 1$.

1.359. Найдите 25 % от числа $7 \cdot 10^6$.

1.360. Решите двойное неравенство $7x \leqslant x^2 - 8 \leqslant 3x - 4$.

1.361. Расположите в порядке возрастания числа $-2\sqrt{50}$, $-4\sqrt{18}$ и $-\sqrt{162}$.

1.362. Воспользуйтесь методом замены переменной и решите уравнение $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$.

1.363. Площадь прямоугольной площадки, одна из сторон которой на 3 м больше другой, равна 54 м^2. Найдите (в метрах) длину изгороди, которая потребуется для ограждения всей площадки по периметру.

1.364. Выполните сложение рациональных дробей: $\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 7x + 5} + \frac{1}{x + 1}$.

§ 9. Формулы приведения

1.365. Какой координатной четверти принадлежит угол α, если:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$?

1.366. Определите знак $\sin\alpha$, если:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$;

в) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$; г) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1.367. Определите знак $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$;

в) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$; г) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

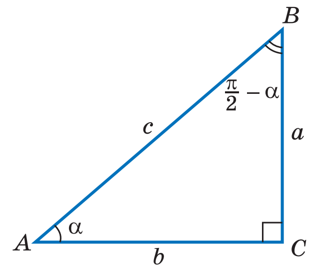
Правообладатель Народная асвета

При изучении геометрии вы установили, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\text{и}\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha,$$

если α — острый угол (рис. 112).



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{b}{c}=\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a}{c}=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$$

Рис. 112

Свойство периодичности тригонометрических функций позволяет свести вычисление значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла к вычислению значений этих функций при значениях аргумента, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$. Например,

$$\sin 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

На практике принято сводить значения тригонометрических функций произвольного угла к вычислению значений этих функций для угла, принадлежащего промежутку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Это можно делать с помощью ***формул приведения***.

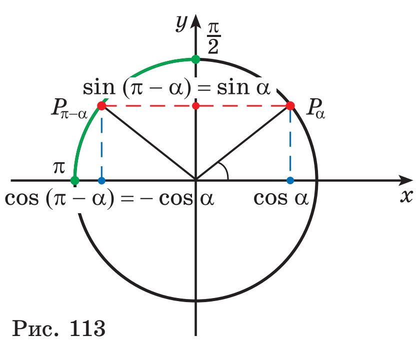


Рис. 113

Рассмотрим промежуток $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. Любое число φ из этого промежутка можно представить в виде $\varphi=\pi-\alpha$, где $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Например, $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$.

Поскольку ординаты точек P_α и $P_{\pi-\alpha}$ равны, а абсциссы отличаются только знаком, то: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, а $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ (рис. 113).

Тогда для $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ получим, что

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,\ \text{т. е.}\ \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

И для $\alpha\neq 0$ имеем:

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,\ \text{т. е.}\ \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Правообладатель Народная асвета

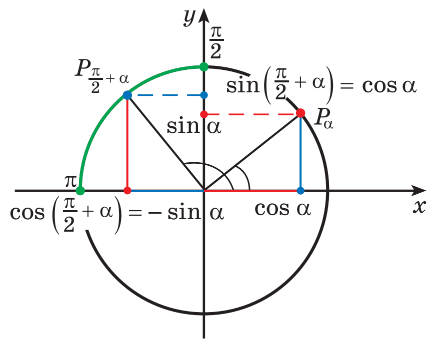


Рис. 114

Вместе с тем любое число φ из промежутка $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ можно также представить в виде $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, где $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Например, $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$.

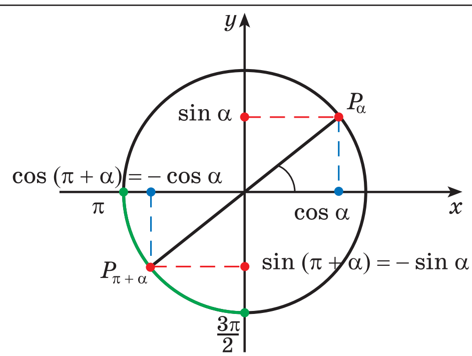
Так как ордината точки $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ равна абсциссе точки P_α, а абсцисса точки $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ отличается от ординаты точки P_α только знаком (рис. 114), то: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$.

Для $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ т. е. } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Так как любое число φ из промежутка $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ можно представить в виде $\varphi = \pi + \alpha$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, то, рассуждая аналогично, получим формулы приведения:

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ $\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	

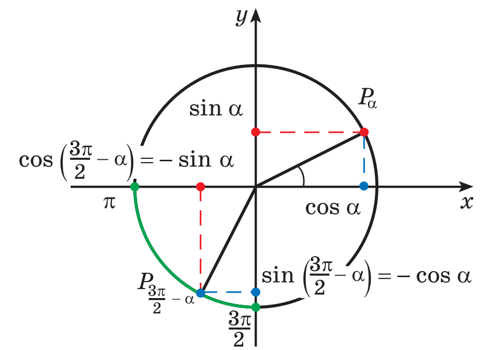
Правообладатель Народная асвета

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$



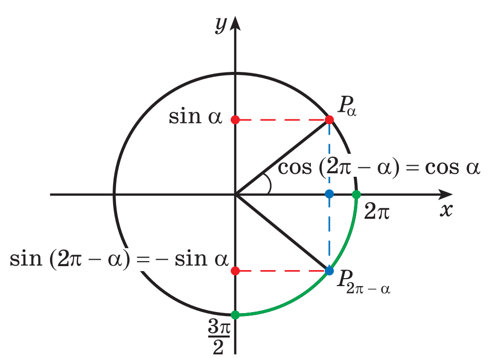
Поскольку любое число φ из промежутка $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$ можно представить в виде $\varphi = 2\pi - \alpha$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2} + \alpha$, где $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, то получим:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

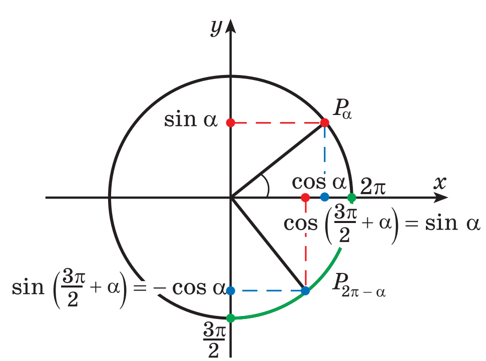


$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$



Правообладатель Народная асвета

Проанализировав полученные формулы, можно заметить закономерности, позволяющие сформулировать **правило**, с помощью которого можно применять формулы приведения, не заучивая их:

① В правой части формулы приведения ставится тот знак, который имеет в соответствующей четверти исходная функция, если считать, что угол α — острый.

② Если в формуле приведения аргумент имеет вид:

- $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$, то название функции не меняется;
- $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то название функции меняется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Например, применим полученное правило для выражения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

① Если считать, что угол α — острый, то $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ — угол третьей четверти. В третьей четверти косинус (исходная функция) отрицательный, значит, в правой части равенства нужно поставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, то название функции «косинус» нужно поменять на «синус». Таким образом, получим: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

название меняется

$$\cos\left(\underbrace{\overbrace{3\pi}\over 2}_{} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

III четверть
косинус отрицательный

Пример 1. Приведите выражение к тригонометрической функции числа α, применив формулы приведения:

а) $\cos(2\pi - \alpha)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\sin(\pi - \alpha)$.

Решение. Применим правило:

а) ① Так как $2\pi - \alpha$ — угол четвертой четверти, в которой косинус положительный, то в правой части равенства не нужно ставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $2\pi - \alpha$, то название функции «косинус» не меняется. Значит, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

название не меняется

$$\cos\left(\underbrace{\overbrace{2\pi} - \alpha}_{}\right) = \cos\alpha$$

IV четверть
косинус положительный

б) ① Так как $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ — угол четвертой четверти, в которой тангенс отрицательный, то в правой части равенства нужно поставить знак «минус».

название меняется

$$\operatorname{tg}\left(\underbrace{\frac{\overbrace{3\pi}}{2} + \alpha}_{}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

IV четверть
тангенс отрицательный

Правообладатель Народная асвета

② Поскольку аргумент имеет вид $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, название функции «тангенс» нужно поменять на «котангенс». Тогда $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

в) ① Так как $\pi - \alpha$ — угол второй четверти, в которой синус положительный, то в правой части равенства не нужно ставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $\pi - \alpha$, то название функции «синус» не меняется. Значит, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

название не меняется

$$\sin\,(\underbrace{\pi - \alpha}_{\text{II четверть}}) = \sin\alpha$$

синус положительный

Пример 2. Используйте формулы приведения и найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}$; в) $\cos 240°$; г) $\mathrm{ctg}\,300°$.

Решение. а) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ или $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Первый способ.

① Так как $\pi - \frac{\pi}{4}$ — угол второй четверти, в которой синус положительный, то в правой части равенства не нужно ставить знак «минус».

② Поскольку аргумент имеет вид $\pi - \frac{\pi}{4}$, то название функции «синус» не меняется. Значит, $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Второй способ.

название меняется

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}_{\text{II четверть}}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

синус положительный

б) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} = \mathrm{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (в третьей четверти тангенс положительный, название функции не меняется).

в) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ (в третьей четверти косинус отрицательный, название функции не меняется).

г) $\mathrm{ctg}\,300° = \mathrm{ctg}(360° - 60°) = -\mathrm{ctg}\,60° = -\sqrt{3}$ (в четвертой четверти котангенс отрицательный, название функции не меняется).

Правообладатель Народная асвета

Примеры основных заданий и их решения

1. Вычислите, используя формулы приведения:
а) $\cos 315°$; б) $\sin 120°$; в) $\mathrm{ctg}\, 210°$; г) $\mathrm{tg}\, 330°$.

Решение. а) $\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (в четвертой четверти косинус положительный, название функции не меняется);
б) $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (во второй четверти синус положительный, название функции не меняется);
в) $\mathrm{ctg}\, 210° = \mathrm{ctg}(270° - 60°) = \mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3}$ (в третьей четверти котангенс положительный, название функции меняется);
г) $\mathrm{tg}\, 330° = \mathrm{tg}(360° - 30°) = -\mathrm{tg}\, 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (в четвертой четверти тангенс отрицательный, название функции не меняется).

2. Найдите значение выражения:
а) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; в) $\mathrm{tg}\,\frac{8\pi}{3}$; г) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$.

Решение. а) Так как синус — нечетная функция, то

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Применим формулы приведения:

$$-\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Воспользуемся свойством четности косинуса и получим:

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6}.$$

По формулам приведения: $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) Воспользуемся свойством периодичности тангенса и получим:

$$\mathrm{tg}\,\frac{8\pi}{3} = \mathrm{tg}\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3}.$$

Применим формулы приведения: $\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3} = \mathrm{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

г) Поскольку котангенс — нечетная функция, то $\mathrm{ctg}\left(-\frac{19\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\,\frac{19\pi}{4}$.

Правообладатель Народная асвета

Используем свойство периодичности котангенса и получим:

$-\mathrm{ctg}\,\frac{19\pi}{4} = -\mathrm{ctg}\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4}.$

По формулам приведения:

$-\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4} = -\mathrm{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(-\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = 1.$

3. Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\cos(7\pi + \alpha)$; б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\sin\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right)$.

Решение. а) Используем свойство периодичности косинуса и получим: $\cos(7\pi + \alpha) = \cos(6\pi + (\pi + \alpha)) = \cos(\pi + \alpha)$.

По формулам приведения: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

б) Воспользуемся свойством периодичности котангенса:

$\mathrm{ctg}\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\left(6\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$

Применим формулы приведения: $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

в) Так как тангенс — нечетная функция, то $\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

По формулам приведения: $-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

г) Поскольку синус — нечетная функция, то

$\sin\left(\alpha - \frac{11\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right).$

Воспользуемся свойством периодичности синуса и получим:

$-\sin\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(4\pi + \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right).$

По формулам приведения: $-\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -(-\cos\alpha) = \cos\alpha$.

4. Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\mathrm{tg}^2\left(\alpha - \frac{17\pi}{2}\right)$.

Решение. а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 = (-\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$;

Правообладатель Народная асвета

б) $\mathrm{tg}^2\left(\alpha - \frac{17\pi}{2}\right) = \left(\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{17\pi}{2}\right)\right)^2 = \left(-\mathrm{tg}\left(\frac{17\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 = \left(\mathrm{tg}\left(\frac{17\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 =$

$= \left(\mathrm{tg}\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 = \left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 = (\mathrm{ctg}\alpha)^2 = \mathrm{ctg}^2\alpha.$

5. Вычислите:

а) $\sin^2 225°$; б) $\mathrm{ctg}^2 210°$.

Решение. а) $\sin^2 225° = (\sin 225°)^2 = (\sin(180° + 45°))^2 = (-\sin 45°)^2 =$

$= (\sin 45°)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$;

б) $\mathrm{ctg}^2 210° = (\mathrm{ctg} 210°)^2 = (\mathrm{ctg}(180° + 30°))^2 = (\mathrm{ctg} 30°)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3.$

6. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)$; б) $\cos^2(3\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$;

в) $\frac{\sin(270° - \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} \cdot \mathrm{tg}(180° - \alpha)$; г) $\mathrm{tg}(450° + \alpha) + \mathrm{ctg}(\alpha - 180°)$.

Решение. а) Применим формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha - \cos\alpha = 0.$$

б) Воспользуемся периодичностью косинуса и формулами приведения и получим:

$$\cos^2(3\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

в) Применим формулы приведения:

$$\frac{\sin(270° - \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} \cdot \mathrm{tg}(180° - \alpha) = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} \cdot (-\mathrm{tg}\,\alpha) = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha =$$

$$= -\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = -1.$$

г) Используем периодичность тангенса, нечетность котангенса и формулы приведения:

$$\mathrm{tg}(450° + \alpha) + \mathrm{ctg}(\alpha - 180°) = \mathrm{tg}(90° + \alpha) - \mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 0.$$

7. Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\sin(x + \pi)\cos x$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. Применим формулы приведения и получим:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin(x+\pi)\cos x \Leftrightarrow\ -\sin x=-\sqrt{2}\sin x\cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(-1+\sqrt{2}\cos x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ -1+\sqrt{2}\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

1. В каких выражениях $\sin(\pi-\beta)$, $\cos(\pi+\beta)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\lambda\right)$, $\cos(2\pi-\alpha)$ название функции после применения формул приведения будет «косинус»?

2. В каких выражениях $\sin(\pi-\beta)$, $\cos(\pi+\beta)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\lambda\right)$, $\cos(2\pi-\alpha)$ после применения формул приведения в правой части равенства будет поставлен знак «минус»?

1.368. Используйте формулы приведения и приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;
г) $\sin(\pi+\alpha)$; д) $\cos(2\pi+\alpha)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

1.369. Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\cos(270°-\alpha)$; б) $\operatorname{tg}(180°-\alpha)$; в) $\sin(\alpha-90°)$;
г) $\cos(\alpha-180°)$; д) $\operatorname{ctg}(\alpha-360°)$; е) $\operatorname{tg}(\alpha-270°)$.

1.370. Найдите значение выражения, используя формулы приведения:

а) $\operatorname{tg}240°$; б) $\sin210°$; в) $\operatorname{ctg}(-300°)$;
г) $\cos(-120°)$; д) $\sin(-840°)$; е) $\operatorname{tg}(-570°)$.

1.371. Используйте формулы приведения и преобразуйте выражение:

а) $\cos^2(\pi+\alpha)$; б) $\sin^2(90°-\alpha)$; в) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$.

1.372. Найдите значение выражения, используя периодичность тригонометрических функций и формулы приведения:

Правообладатель Народная асвета

а) $\sin\frac{7\pi}{6}$; б) $\cos\frac{5\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}$;

г) $\cos\left(-\frac{61\pi}{4}\right)$; д) $\sin^2\frac{29\pi}{4}$; е) $\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{40\pi}{3}\right)$.

1.373. Упростите выражение:

а) $\cos(\pi + \alpha) + \cos(-\alpha)$; б) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(-\alpha) + \cos(\alpha - 2\pi)$; г) $\cos^2(\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

1.374. Сравните значения выражений:

а) $\sin 32°$ и $\cos 58°$; б) $\sin 28°$ и $\cos 42°$; в) $\operatorname{tg} 44°$ и $\operatorname{ctg} 46°$.

1.375. Используйте формулы приведения и решите уравнение:

а) $\operatorname{tg}(\pi + x) = 1$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2} = 0$; г) $3\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$.

1.376. Найдите значение выражения:

а) $\sin(-300°) \cdot \operatorname{tg}(-210°)$; б) $2\sin 870° + 2\sqrt{3}\cos 570° - \operatorname{tg}^2 420°$.

1.377. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}(360° - \alpha) - \operatorname{ctg}(270° - \alpha)$;

б) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) \cdot \cos(90° - \alpha) - \sin(270° + \alpha)$;

в) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270° + \alpha) + \sin^2\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg}(180° + \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha)}{\cos(270° + \alpha)}$.

1.378. Известно, что $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

1.379. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$; б) $1 + \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$; г) $\frac{1}{\cos^2(\pi - \alpha)} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

д) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$; е) $\frac{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)\sin(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

Правообладатель Народная асвета

1.380. Для функции $f(x) = 3\cos 4x + 1$ найдите:

а) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; б) $f\left(-\frac{5\pi}{16}\right)$.

1.381. Решите уравнение:

а) $2\sin(2\pi - x) - \sin x = -3$; б) $\cos x - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$;

в) $\sin^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 6 = 0$; г) $4\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$.

1.382. Найдите все корни уравнения:

а) $\sin(2\pi - x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$; б) $\sin(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$.

1.383. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1$; б) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1$.

1.384*. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arcctg} 7\right)$; б) $\cos\left(\pi + \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

1.385*. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.386. Приведите к тригонометрической функции угла α выражение:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$;

г) $\cos(\pi + \alpha)$; д) $\sin(2\pi + \alpha)$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

1.387. Используйте формулы приведения и запишите тригонометрическую функцию угла α:

а) $\sin(270° - \alpha)$; б) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$; в) $\cos(\alpha - 90°)$;
г) $\sin(\alpha - 180°)$; д) $\operatorname{tg}(\alpha - 360°)$; е) $\operatorname{ctg}(\alpha - 270°)$.

1.388. Найдите значение выражения, используя периодичность тригонометрических функций и формулы приведения:

а) $\sin 315°$; б) $\operatorname{ctg} 300°$; в) $\operatorname{tg}(-240°)$; г) $\cos 480°$;
д) $\operatorname{tg}(-570°)$; е) $\operatorname{ctg}(-585°)$; ж) $\operatorname{tg} 1050°$; з) $\sin(-690°)$.

1.389. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; б) $\sin\frac{17\pi}{6}$; в) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; г) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

Правообладатель Народная асвета

д) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; е) $\sin\frac{19\pi}{6}$; ж) $\cos^2\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; з) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$.

1.390. Преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin^2(5\pi-\alpha)$; в) $\cos^2(630^\circ+\alpha)$.

1.391. Упростите выражение:

а) $\sin(270^\circ-\alpha)-\cos(180^\circ+\alpha)$;
б) $\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)$.

1.392. Упростите выражение:

а) $\sin(\pi+\alpha)-\sin(-\alpha)$; б) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

в) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\cos\alpha-\sin(2\pi-\alpha)$; г) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^2(\pi-\alpha)$.

1.393. Используйте формулы приведения и решите уравнение:

а) $2\cos(\pi+x)=\sqrt{3}$; б) $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+1=0$;

в) $3\operatorname{tg}\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}=0$; г) $5\operatorname{ctg}(\pi-x)+3=0$.

1.394. Найдите значение выражения:

а) $\cos(-135^\circ)\cdot\operatorname{ctg}(-120^\circ)$; б) $4\cos840^\circ-4\sqrt{3}\sin660^\circ+\operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

1.395. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)+\cos^2\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ+\alpha)}$.

1.396. Известно, что $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

1.397. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$; б) $1+\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; г) $\dfrac{1}{\sin^2(\pi+\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$;

д) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$; е) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

Правообладатель Народная асвета

1.398. Решите уравнение:

а) $4\sin(2\pi - x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -5;$ б) $\sqrt{3}\sin x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0.$

1.399. Найдите все корни уравнения:

а) $\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3};$ б) $\cos(2\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 1;$

в) $2\cos^2 x = \sqrt{3}\sin(1{,}5\pi + x).$

1.400*. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(\pi - \alpha)}{2\sin(\pi + \alpha) - 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 5$.

1.401. Из дробей $\frac{3}{7}$; $\frac{13}{13}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{17}$; $\frac{19}{3}$ выберите все неправильные дроби.

1.402. Найдите НОК (48, 30).

1.403. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5^{13}\cdot\left(5^{10}\right)^2}{5^{31}}$; б) $\dfrac{12^8}{27^2\cdot 2^{15}}$.

1.404. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 5x}{3 - 6x} < 0$ и выберите его наименьшее целое отрицательное решение.

1.405. Найдите нули функции $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

1.406. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $-x^2 - 11x - 10$; б) $8a^2 + 2a - 1$.

1.407. Найдите значение выражения $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 3\right)$.

§ 10. Синус, косинус, тангенс суммы и разности

1.408. Найдите высоту треугольника, если она в два раза больше стороны, к которой проведена, а площадь треугольника равна 32 см^2.

1.409. В прямоугольном треугольнике отношение одного из катетов к гипотенузе равно 0,6. Найдите отношение другого катета к гипотенузе.

Известные значения синуса, косинуса, тангенса углов можно использовать для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса других углов.

Угол 75° можно представить в виде $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, но $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) \neq \sin 45^\circ + \sin 30^\circ$, так как $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2} > 1$.

Правообладатель Народная асвета

Выведем формулу $\sin(\alpha + \beta)$ — синуса суммы двух углов.

Рассмотрим случай, когда α и β — острые углы в треугольнике ABC (рис. 115).

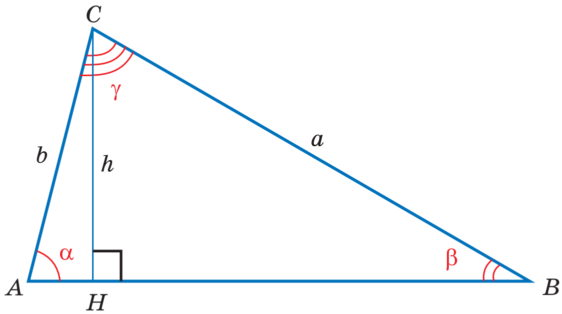


Рис. 115

Выразим площадь треугольника ABC дважды:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\sin\left(\pi - (\alpha+\beta)\right) = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta), \quad (1)$$

$$S_{ABC} = S_{AHC} + S_{BHC} = \frac{1}{2}CH \cdot AH + \frac{1}{2}CH \cdot BH.$$

Треугольник BCH — прямоугольный, тогда $CH = a\sin\beta$ и $BH = a\cos\beta$.

Из прямоугольного треугольника ACH имеем: $CH = b\sin\alpha$ и $AH = b\cos\alpha$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\sin\beta \cdot b\cos\alpha + \frac{1}{2}b\sin\alpha \cdot a\cos\beta = \frac{1}{2}ab(\sin\beta \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\beta). \quad (2)$$

Приравняем правые части равенств (1) и (2):

$$\frac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}ab(\sin\beta \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\beta).$$

Разделим обе части равенства на $\frac{1}{2}ab$ и получим формулу синуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Если углы α и β не являются острыми, то можно воспользоваться свойством периодичности синуса и формулами приведения.

Например, если α и β являются углами второй четверти, то $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$ — острые углы.

Применим к ним выведенную для острых углов формулу синуса суммы:

$$\sin(\pi - \alpha + \pi - \beta) = \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \alpha). \quad (3)$$

Воспользуемся формулами приведения в левой части равенства (3) и получим:

$$\sin(\pi - \alpha + \pi - \beta) = \sin\left(2\pi - (\alpha+\beta)\right) = -\sin(\alpha+\beta).$$

Применим формулы приведения к правой части равенства (3):

$$\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \alpha) =$$
$$= \sin\alpha \cdot (-\cos\beta) + \sin\beta \cdot (-\cos\alpha) = -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Правообладатель Народная асвета

Таким образом,
$-\sin(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ или $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ — формула **синуса суммы двух углов.**
Остальные случаи принадлежности углов различным четвертям рассматриваются аналогично предыдущему.

Воспользуемся полученной формулой и вычислим $\sin 75°$.

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) =$
$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

Синус суммы
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Выведем формулу синуса разности двух углов.

Для этого $\sin(\alpha - \beta)$ представим в виде $\sin(\alpha + (-\beta))$ и применим формулу синуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Получили формулу **синуса разности двух углов:**

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Вычислим, например, $\sin 15°$.

$\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$
$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

Синус разности
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Для вывода формулы косинуса суммы двух углов воспользуемся формулами приведения и получим: $\cos(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right).$

Тогда по формуле синуса разности двух углов имеем:

$$\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Получили формулу **косинуса суммы двух углов:**

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Применим полученную формулу и вычислим, например, $\cos 105°$.

$\cos 105° = \cos(60° + 45°) =$
$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$

Косинус суммы
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Правообладатель Народная асвета

Представив разность $\alpha - \beta$ в виде суммы $\alpha + (-\beta)$, можно получить формулу **косинуса разности двух углов:**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Найдем, например, $\cos 15°$.

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$$

$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Косинус разности
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Пример 1. Вычислите:

а) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$;

б) $\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{36} - \cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{\pi}{36}$;

в) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$;

г) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5}$.

Решение. Применим полученные формулы «справа налево»:

а) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{6\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$

б) $\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{36} - \cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{\pi}{36} = \sin\left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{36}\right) = \sin\frac{9\pi}{36} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9} = \cos\left(\frac{7\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right) = \cos\pi = -1;$

г) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{30}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Выведем формулы тангенса суммы и тангенса разности двух углов.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha\,\cos\beta$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, тогда:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Таким образом, получили формулу **тангенса суммы двух углов:**

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Правообладатель Народная асвета

Воспользуемся формулой тангенса суммы и вычислим, например, $\operatorname{tg} 105°$.

$$\operatorname{tg}105° = \operatorname{tg}(60° + 45°) = \frac{\operatorname{tg}60° + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}60°\operatorname{tg}45°} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}.$$

Тангенс суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Представив разность $\alpha - \beta$ в виде суммы $\alpha + (-\beta)$, можно получить формулу **тангенса разности двух углов:**

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Найдем, например, $\operatorname{tg} 15°$.

$$\operatorname{tg}15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \frac{\operatorname{tg}60° - \operatorname{tg}45°}{1 + \operatorname{tg}60°\operatorname{tg}45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 2-\sqrt{3}.$$

Пример 2. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}$.

Тангенс разности

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Решение. Применим формулы тангенса суммы и тангенса разности «справа налево»:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{15} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{15} + \dfrac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{15} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{16} - \dfrac{3\pi}{16}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{16} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1.$

Полученные формулы синуса суммы, синуса разности, косинуса суммы, косинуса разности, тангенса суммы, тангенса разности двух углов называют **формулами сложения.**

Примеры основных заданий и их решения

1. С помощью формул сложения преобразуйте выражение:

а) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) По формуле синуса разности получим:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha.$$

б) Применим формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}45°\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}.$$

2. Найдите значение выражения:

а) $\sin 56°\cos 34° + \cos 56°\sin 34°$; б) $\cos 28°\cos 88° - \sin 88°\sin 208°$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}20° + \operatorname{ctg}155°}{1 + \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}65°}$.

Решение. а) По формуле синуса суммы получим:

$$\sin 56°\cos 34° + \cos 56°\sin 34° = \sin(56° + 34°) = \sin 90° = 1.$$

б) По формулам приведения получим, что

$\sin 208° = \sin(180° + 28°) = -\sin 28°$.

Тогда $\cos 28°\cos 88° - \sin 88°\sin 208° =$

$$= \cos 28°\cos 88° - \sin 88°(-\sin 28°) = \cos 28°\cos 88° + \sin 88°\sin 28°.$$

Воспользуемся формулой косинуса разности и получим:

$$\cos 28°\cos 88° + \sin 88°\sin 28° = \cos(28° - 88°) = \cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

в) По формулам приведения $\operatorname{ctg}155° = \operatorname{ctg}(90° + 65°) = -\operatorname{tg}65°$.

Тогда $\dfrac{\operatorname{tg}20° + \operatorname{ctg}155°}{1 + \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}65°} = \dfrac{\operatorname{tg}20° - \operatorname{tg}65°}{1 + \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}65°}$.

По формуле тангенса разности:

$$\frac{\operatorname{tg}20° - \operatorname{tg}65°}{1 + \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}65°} = \operatorname{tg}(20° - 65°) = \operatorname{tg}(-45°) = -\operatorname{tg}45° = -1.$$

3. Вычислите:

а) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{23\pi}{12}$.

Решение. а) $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Правообладатель Народная асвета

б) По формулам приведения: $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

По формуле тангенса разности получим:

$$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{\left(1 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)} =$$

$$= -\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 2.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{12} = \sqrt{3} - 2$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin(-\alpha)\sin\beta - \cos(\alpha + \beta)$; б) $\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Решение. а) Воспользуемся нечетностью синуса и формулой косинуса разности:

$$\sin(-\alpha)\sin\beta - \cos(\alpha + \beta) = -\sin\alpha\sin\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -\cos\alpha\cos\beta.$$

б) Применим формулу косинуса разности и получим:

$$\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\alpha - \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) =$$

$$= \cos\alpha - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) = \cos\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha = -\sin\alpha.$$

5. Решите уравнение $\cos 5x \sin 8x = \cos 8x \sin 5x$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin 8x \cos 5x - \cos 8x \sin 5x = 0$ и по формуле синуса разности получим: $\sin(8x - 5x) = 0$; $\sin 3x = 0$; $3x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Вычислите $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Решение. Применим формулу косинуса разности:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Правообладатель Народная асвета

Из основного тригонометрического тождества выразим $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ и найдем $\cos\alpha$. Так как $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, то $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. Значит, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ или $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Поскольку $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, т. е. α — угол второй четверти, то $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Тогда $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

7. Докажите тождество $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) + \sqrt{3}\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулами сложения и получим:

$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2(\cos 60°\cos\alpha - \sin 60°\sin\alpha)}{2(\sin 60°\cos\alpha + \cos 60°\sin\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

8. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\cos 310°\cos 50° + \sin 310°\sin 50°}{\sin 390°\cos 20° - \cos 390°\sin 20°}$;

б) $\dfrac{\cos 67° \cdot \cos 7° - \cos 83°\cos 23°}{\cos 128°\sin 68° + \cos 38°\sin 22°}$.

Решение. а) $\dfrac{\cos 310°\cos 50° + \sin 310°\sin 50°}{\sin 390°\cos 20° - \cos 390°\sin 20°} = \dfrac{\cos(310° - 50°)}{\sin(390° - 20°)} = \dfrac{\cos 260°}{\sin 370°} =$

$$= \frac{\cos(270° - 10°)}{\sin(360° + 10°)} = \frac{-\sin 10°}{\sin 10°} = -1;$$

б) $\dfrac{\cos 67°\cos 7° - \cos 83°\cos 23°}{\cos 128°\sin 68° + \cos 38°\sin 22°} = \dfrac{\cos(90° - 23°)\cos 7° - \cos(90° - 7°)\cos 23°}{\cos(90° + 38°)\sin(90° - 22°) + \cos 38°\sin 22°} =$

$$= \frac{\sin 23°\cos 7° - \sin 7°\cos 23°}{-\sin 38°\cos 22° + \cos 38°\sin 22°} = \frac{\sin(23° - 7°)}{\sin(22° - 38°)} = \frac{\sin 16°}{\sin(-16°)} = \frac{\sin 16°}{-\sin 16°} = -1.$$

9. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \sin 7x\cos 5x - \cos 7x\sin 5x + 5.$$

Правообладатель Народная асвета

Решение. Применим формулу синуса разности и запишем функцию в виде $f(x) = \sin(7x - 5x) + 5$, или $f(x) = \sin 2x + 5$.

Так как $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, то $-1 + 5 \leqslant \sin 2x + 5 \leqslant 1 + 5$. Таким образом, имеем: $4 \leqslant \sin 2x + 5 \leqslant 6$, т. е. $E(f) = [4;\ 6]$.

Выберите равенство, верное для любых углов α и β:

а) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \sin\beta$;

б) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \cos\beta$;

в) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

г) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$.

1.410. С помощью формул сложения преобразуйте выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; б) $\cos(30° + \alpha)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

1.411. Вычислите, используя формулы сложения:

а) $\sin 46° \cos 44° + \sin 44° \cos 46°$; б) $\cos 17° \cos 43° - \sin 17° \sin 43°$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 26° + \operatorname{tg} 19°}{1 - \operatorname{tg} 19° \operatorname{tg} 26°}$.

1.412. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha - \beta) - \cos(-\alpha)\sin(-\beta)$; б) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$.

1.413. Вычислите значение выражения, приведя его к синусу (косинусу) суммы (разности):

а) $\sin 97° \sin 37° + \cos 37° \cos 97°$; б) $\sin 53° \cos 7 - \cos 53° \sin(-7°)$;

в) $\sin(-75°)\cos 15° + \cos 75° \sin 15°$.

1.414. Вычислите:

а) $\sin 75°$; б) $\cos 105°$; в) $\operatorname{tg} 15°$.

1.415. Решите уравнение:

а) $\sin x \sin 3x = \cos 3x \cos x$; б) $\sin x \cos\frac{5x}{2} = \cos x \sin\frac{5x}{2}$;

в) $\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x = \frac{1}{2}$; г) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.416. Вычислите $\sin(60° + \alpha)$, используя формулу синуса суммы, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $630° < \alpha < 720°$.

Правообладатель Народная асвета

1.417. Вычислите, преобразуя выражение с помощью формул сложения:

а) $\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{28} - \sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{28}$; б) $\sin\frac{14\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{14\pi}{9}\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18} - 1}$.

1.418. Упростите выражение, используя формулы сложения и значения тригонометрических функций:

а) $\frac{1}{2}\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; б) $2\cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$.

1.419. Упростите выражение $\cos(120^\circ + \alpha) + \cos(\alpha - 60^\circ)$.

1.420. Найдите множество значений функции

$f(x) = \cos x\cos 4x - \sin x\sin 4x - 5$.

1.421. Рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\dfrac{\sin 40^\circ\sin 5^\circ - \cos 40^\circ\cos 5^\circ}{\sin 20^\circ\cos 40^\circ + \sin 40^\circ\cos 20^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 120^\circ\cos 50^\circ + \sin 120^\circ\sin 50^\circ}{\cos 25^\circ\cos 45^\circ - \sin 25^\circ\sin 45^\circ}$?

1.422. Найдите значение выражения:

а) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\beta = -\frac{5}{13}$, причем $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2$.

1.423. Решите уравнение:

а) $\sin 5x\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) - \cos 5x\sin 4x = 1$;

б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 6x\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6x\right)\sin x = 1$;

г) $\cos\frac{7x}{9}\cos\frac{10x}{9} - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{7x}{9}\right)\sin\frac{10x}{9} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.424. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha\cos 4\alpha - \cos\alpha\sin 4\alpha = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}\sin(\beta - 45^\circ) + \cos\beta}{\sqrt{2}\cos(\beta + 45^\circ) + \sin\beta} = \operatorname{tg}\beta$.

Правообладатель Народная асвета

1.425. Найдите нули функции:

а) $y = \cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x + 1$;

б) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\cos x + \sin 2x \sin(\pi + x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.426. Постройте график функции

$$y = \cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin 2x.$$

1.427. Вычислите:

а) $\cos 57°30' \cos 27°30' + \sin 57°30' \sin 27°30'$;

б) $\sin 200° \sin 310° + \cos 340° \cos 50°$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 161° + \operatorname{tg} 319°}{1 + \operatorname{tg} 161° \operatorname{ctg} 49°}$.

1.428. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$; б) $\frac{\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$.

1.429. Вычислите значение тригонометрической функции, используя формулы приведения и формулы сложения:

а) $\sin 195°$; б) $\operatorname{tg} 285°$.

1.430. Найдите значение выражения $\frac{\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}}$.

1.431. Докажите тождество $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

1.432. Вычислите $\frac{\sin 56° \sin 124° - \sin 34° \cos 236°}{\cos 28° \cos 88° + \cos 178° \sin 208°}$.

1.433. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

1.434. Известно, что α и β — углы второй четверти и $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

1.435*. Найдите сумму корней уравнения $\sin 3x \cos 2x = \cos 3x \sin 2x$, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$.

1.436*. Найдите $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Правообладатель Народная асвета

1.437. Вычислите, используя формулы сложения:

а) $\sin 61^\circ \cos 31^\circ - \sin 31^\circ \cos 61^\circ$; б) $\cos 29^\circ \cos 74^\circ + \sin 29^\circ \sin 74^\circ$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$.

1.438. Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\sin(-\beta)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \cos(\alpha - \beta)$.

1.439. Вычислите, представив угол в виде суммы или разности:

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 15^\circ$; в) $\operatorname{tg} 75^\circ$.

1.440. Составьте план и решите уравнение:

а) $\sin x \cos \frac{x}{2} = -\sin \frac{x}{2} \cos x$; б) $\sin 5x \cos x - \cos 5x \sin x = \frac{1}{2}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 2x} = 1$.

1.441. Вычислите, используя формулы сложения:

а) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1.442. Рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10} + \sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$; б) $\sin\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{14} - \operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{14}\operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}}$?

1.443. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{2}\sin\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha - \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$.

1.444. Найдите множество значений функции
$f(x) = \sin 7x \cos 2x + \cos 7x \sin 2x + 8$.

1.445. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 17^\circ \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cos 17^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 5^\circ \cos 15^\circ + \cos 5^\circ \cos 15^\circ}{\cos 80^\circ \cos 150^\circ + \sin 80^\circ \sin 150^\circ}$.

Правообладатель Народная асвета

1.446. Найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = -\frac{5}{13}$, причем α и β — углы одной четверти;

б) $\operatorname{tg}\beta$, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.447. Решите уравнение, приведя его с помощью формул сложения к простейшему:

а) $\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x = 1$;

б) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.448. Найдите все корни уравнения $\cos 5x \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin 5x \sin 2x = \frac{1}{2}$.

1.449. Докажите тождество:

а) $\sin 6\alpha \sin\alpha - \cos 6\alpha \cos\alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 7\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $\dfrac{2\sin(\alpha + 30^\circ) - \cos\alpha}{2\cos(\alpha - 30^\circ) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}$.

1.450. Найдите нули функции:

а) $y = \sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x + 1$;

б) $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right)\cos 3x + \cos 4x \sin 3x$.

1.451. Постройте график функции

$$y = \sin 3x \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos 3x.$$

1.452. Вычислите:

а) $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' - \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30'$;

б) $\sin 113^\circ \cos 323^\circ + \cos 247^\circ \cos 307^\circ$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 273^\circ - \operatorname{ctg} 207^\circ}{1 - \operatorname{ctg} 3^\circ \operatorname{tg} 63^\circ}$.

1.453. Упростите выражение $\dfrac{2\cos\alpha \sin\beta + \sin(\alpha - \beta)}{2\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}$.

1.454. Вычислите $\cos 255^\circ$.

1.455. Вычислите $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{7\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{21} - \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{21}}$.

1.456. Докажите тождество $\dfrac{\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.

Правообладатель Народная асвета

1.457. Вычислите: $\dfrac{\sin 22° \cos 8° + \cos 158° \cos 98°}{\sin 23° \cos 7° + \cos 157° \cos 97°}$.

1.458. Упростите выражение $\sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

1.459*. Найдите сумму корней уравнения $\sin 5x \cos 2x = \cos 5x \sin 2x$, принадлежащих промежутку $(0; \pi)$.

1.460*. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$, если известно, что $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

1.461. Представьте трехчлен $49a^2 - 14ab + b^2$ в виде квадрата двучлена.

1.462. Решите уравнение $\dfrac{3x - 2}{5} = \dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{3 - 7x}{10}$.

1.463. Упростите выражение $\dfrac{\left(a^3\right)^{-2} \cdot \left(a^{-7}\right)^{-1}}{\left(a^{-2}\right)^{-2} : \left(a^{-1}\right)^{4}}$.

1.464. Найдите значение выражения $\sin\alpha - \sin 2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

1.465. С помощью метода интервалов решите неравенство $\dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 3)^2} \geqslant 0$.

1.466. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $5;\ 1;\ \dfrac{1}{5};\ \ldots$.

1.467. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 16x + 25$ и $y = x - 5$.

1.468. Внесите множитель под знак корня:

а) $\dfrac{2}{3}\sqrt{18}$; б) $\dfrac{1}{b}\sqrt{b}$; в) $x\sqrt{a^2}$, если $x < 0$;

г) $(7 - a)\sqrt{\dfrac{1}{a - 7}}$; д) $x\sqrt{-x^3}$.

§ 11. Формулы двойного аргумента

1.469. Сравните значения выражений $\sin 30°$ и $\sin 60°$.

1.470. Верно ли, что $\cos 120° > \cos 60°$?

1.471. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}$.

Преобразования тригонометрических выражений можно упростить, если рассмотреть частные случаи общих формул.

Правообладатель Народная асвета

Рассмотрим формулу синуса суммы $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ для случая $\alpha=\beta$. Тогда $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=$ $=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Получили формулу **синуса двойного аргумента:** $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Выведем формулу косинуса двойного аргумента. Используем формулу косинуса суммы $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ для случая $\alpha=\beta$ и получим:

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Формула **косинуса двойного аргумента:** $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Для вывода формулы тангенса двойного аргумента рассмотрим формулу тангенса суммы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ при $\alpha=\beta$. В этом случае имеем:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Получили формулу **тангенса двойного аргумента:** $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$; в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)$.

Решение. Применим формулы двойного аргумента:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha$;

б) $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)=$

$=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha-1)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Формулы двойного аргумента

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Пример 2. Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; б) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$; в) $\dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

Решение. Применим формулы двойного аргумента «справа налево»:

а) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\sin(2\cdot 15^\circ)=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$;

б) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\dfrac{2\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}=\operatorname{tg}(2\cdot 75^\circ)=\operatorname{tg}150^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-30^\circ)=-\operatorname{tg}30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Правообладатель Народная асвета

Пример 3. Найдите значение выражения $\sin 120°$ двумя способами.

Решение. Первый способ. Применим формулы приведения:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Второй способ. Применим формулу синуса двойного аргумента:

$$\sin 120° = \sin(2 \cdot 60°) = 2\sin 60° \cos 60° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Примеры основных заданий и их решения

1. Представьте данный угол в виде $2t$:

а) $30°$; б) $45°$; в) β; г) 3β; д) π; е) $\frac{\pi}{16}$.

Решение.

а) $30° = 2 \cdot 15°$; б) $45° = 2 \cdot 22{,}5°$; в) $\beta = 2 \cdot \frac{\beta}{2}$;

г) $3\beta = 2 \cdot \frac{3\beta}{2}$; д) $\pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{16} = 2 \cdot \frac{\pi}{32}$.

2. Преобразуйте каждое из выражений с помощью формул двойного угла:

а) $\sin 10\alpha$; б) $\sin 7\alpha$; в) $\cos 6\alpha$;

г) $\cos\frac{\alpha}{2}$; д) $\operatorname{tg} 3\alpha$; е) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

Решение. Представим угол в каждом из выражений в виде $2t$ и применим формулу двойного аргумента:

а) $\sin 10\alpha = \sin(2 \cdot 5\alpha) = 2\sin 5\alpha \cos 5\alpha$;

б) $\sin 7\alpha = \sin\left(2 \cdot \frac{7\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}$;

в) $\cos 6\alpha = \cos(2 \cdot 3\alpha) = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$;

г) $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{4}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}$;

д) $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2 \cdot 1{,}5\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg} 1{,}5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$;

е) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\alpha}{8}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{8}}$.

Правообладатель Народная асвета

3. Упростите выражение:

а) $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$; в) $\cos 6\alpha - \cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha$;

г) $\cos 8\alpha + 2\sin^2 4\alpha$; д) $\frac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha}$; е) $\frac{6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}$.

Решение. Применим формулы двойного аргумента и получим:

а) $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha = \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$;

б) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\cos 6\alpha - \cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = \cos 6\alpha - \left(\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha\right) =$

$= \cos 6\alpha - \cos(2 \cdot 3\alpha) = \cos 6\alpha - \cos 6\alpha = 0$;

г) $\cos 8\alpha + 2\sin^2 4\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha + 2\sin^2 4\alpha = \cos^2 4\alpha + \sin^2 4\alpha = 1$;

д) $\frac{\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 5\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(2 \cdot 5\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} 10\alpha$;

е) $\frac{6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = 3 \cdot \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = 3 \cdot \operatorname{tg}\left(2 \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\right) =$

$= 3 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = 3\operatorname{ctg} 2\alpha$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\sin 15° \cos 15°$; б) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

в) $10\sin 75° \cos 75°$; г) $\frac{8\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} - 1}$.

Решение. а) $\sin 15° \cos 15° = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 15° \cos 15° = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 15°) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

б) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12} = \sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12} - 2\sin^2\frac{\pi}{12} = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} =$

$= \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Правообладатель Народная асвета

в) $10\sin 75°\cos 75° = 5\cdot 2\sin 75°\cos 75° = 5\cdot \sin(2\cdot 75°) = 5\cdot \sin 150° =$
$= 5\cdot \sin(180° - 30°) = 5\sin 30° = 5\cdot\frac{1}{2} = 2{,}5;$

г) $\dfrac{8\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} - 1} = 4\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{-\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)} = -4\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}} = -4\cdot\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) =$

$= -4\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -4\cdot 1 = -4.$

5. Вычислите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Решение. Применим формулу тангенса двойного аргумента и получим: $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 2}{1 - 4} = -\dfrac{4}{3} = -1\dfrac{1}{3}.$

6. Вычислите:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2;$ б) $1 - 8\sin^2\frac{17\pi}{16}\cos^2\frac{15\pi}{16}.$

Решение.

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) =$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$

б) По формулам приведения

$\sin^2\frac{17\pi}{16} = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{16}\right) = \sin^2\frac{\pi}{16}$ и $\cos^2\frac{15\pi}{16} = \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{16}\right) = \cos^2\frac{\pi}{16}.$

Тогда $1 - 8\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} = 1 - 2\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\right)^2 = 1 - 2\cdot\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 =$
$= 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} - 2\sin^2\frac{\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

7. Вычислите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. 1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$

Так как $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, то $\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25};$ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ или $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}.$

Правообладатель Народная асвета

3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = -\dfrac{8}{3}\cdot\left(-\dfrac{9}{7}\right) = \dfrac{24}{7} = 3\dfrac{3}{7}$.

Ответ: $3\frac{3}{7}$.

8. Решите уравнение $\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1$.

Решение. Используем формулу синуса двойного аргумента:

$\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\cos x - \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0, \\ \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

9. Решите уравнение $\cos^2 x - 7\sin^2 x = 3\sin 2x$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного угла и получим $\cos^2 x - 7\sin^2 x = 6\sin x\cos x$, или $7\sin^2 x + 6\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Так как значения переменной, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получим $7\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 1 = 0$.
Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда уравнение примет вид $7t^2 + 6t - 1 = 0$;
$D = 36 - 4\cdot 7\cdot(-1) = 64$;

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{7}, \\ t = -1, \end{array}\right. \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{1}{7}, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

10*. Докажите тождество $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. Умножим и разделим выражение $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ на $2\sin\frac{\pi}{7}$ и применим формулу синуса двойного аргумента:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cdot 2\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

Выберите равенство, верное для любого угла β:
а) $\sin 2\beta = 2\sin\beta$; б) $\sin 2\beta = \sin^2\beta$; в) $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$; г) $\sin 2\beta = 2\cos\beta$.

1.472. С помощью формулы синуса двойного угла упростите выражение:

а) $2\sin 3\alpha\cos 3\alpha$; б) $\sin\alpha\cos\alpha$; в) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

г) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; д) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$; е) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

1.473. С помощью формулы косинуса двойного угла упростите выражение:

а) $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$; б) $\sin^2 5\alpha - \cos^2 5\alpha$;

в) $\cos^2(\pi-\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;

д) $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos\alpha}$; е) $\frac{\cos 2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

1.474. С помощью формулы тангенса двойного угла упростите выражение:

а) $\frac{2\operatorname{tg} 7\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 7\alpha}$; б) $\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$;

в) $\operatorname{tg} 2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)$; г) $\operatorname{tg} 4\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha$.

1.475. Найдите значение выражения, используя формулы двойных углов:

а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; б) $6\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

г) $\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$; д) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12} - 1}$; е) $\frac{2\operatorname{tg} 165^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 165^\circ}$.

Правообладатель Народная асвета

1.476. Найдите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{2}{9}$.

1.477. Используйте формулы двойных углов и решите уравнение:

а) $4\sin x\cos x = -\sqrt{3}$;

б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1{,}5$;

г) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(x - \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin 2x = \sin x$;

е) $\sqrt{2}\sin^2 x + 1 = \sqrt{2}\cos^2 x$.

1.478. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 67{,}5^\circ \cos 67{,}5^\circ$;

б) $8\cos 165^\circ \sin 165^\circ$;

в) $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$;

г) $\cos^2 210^\circ - \sin^2 210^\circ$;

д) $2\cos^2 15^\circ - 1$;

е) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$;

ж) $\frac{6\,\mathrm{tg}\,15^\circ}{1 - \mathrm{tg}^2\,15^\circ}$;

з) $\frac{\mathrm{tg}\,22^\circ 30'}{1 - \mathrm{tg}^2\,22^\circ 30'}$;

и) $\frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{12}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}$.

1.479. Докажите тождество:

а) $1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$;

б) $2\sin^2 2\alpha + \cos 4\alpha = 1$;

в) $\frac{2\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha$.

1.480. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$;

б) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$;

в) $2\sin x + \sin 2x = \cos x + 1$;

г) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;

д) $\cos 2x = \sin x$;

е) $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

1.481. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 8\alpha}{\sin 4\alpha} - 2\cos^2 2\alpha$;

б) $\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} - \mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

в) $\cos^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

г) $\cos^2(5\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin 2\alpha$;

д) $\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(\pi + 2\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

е) $\frac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha - \pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

1.482. Постройте график функции $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.483. Найдите все корни уравнения $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

1.484. Упростите выражение:

а) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1 + 4\sin 2\alpha$; б) $\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right)$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$; г) $\frac{1 - \operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

1.485. Найдите значение выражения:

а) $(\sin 75° - \cos 75°)^2$; б) $\frac{\sin 15°}{\sin 5°} - \frac{\cos 15°}{\cos 5°}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$; г) $\sin 75°\sin 15°$.

1.486. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y = \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$; б) $y = 3\cos x$ и $y = 6\sin 2x$.

1.487. Найдите значение выражения $\frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.488. Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

1.489. Решите уравнение:

а) $\cos x\sin(-x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $\cos 2x = 2\sin x - 1{,}5$;

в) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$; г) $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$.

1.490. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + 2$; б) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha$;

в) $\sin^2(\pi - \alpha)\cos^2(\pi + \alpha) - \frac{1}{4}\sin^2\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.491. Найдите значение выражения:

а) $(\sin 15° + \cos 15°)^2$; б) $\sin^3\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} + \cos^3\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$.

1.492. Докажите, что значение выражения $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}$ не зависит от α.

1.493. Решите уравнение:

а) $\sin x\cos x\cos 2x = -\frac{1}{8}$; б) $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$.

1.494. Докажите тождество $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

1.495. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4\sin 25°\sin 65°}{\cos 40°}$; б) $\frac{10\cos 10°}{\sin 40°\sin 230°}$; в)* $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

Правообладатель Народная асвета

1.496. Упростите выражение, используя формулы двойных углов:

а) $2\sin 6\alpha \cos 6\alpha$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; в) $\frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

г) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; д) $\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$; е) $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

ж) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; з) $(1+\cos 2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha$; и) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,4\alpha}{1-\mathrm{tg}^2 4\alpha}$;

к) $\frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; л) $\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

1.497. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ$; б) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$; в) $\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

1.498. Найдите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{7}$.

1.499. Воспользуйтесь формулами двойных углов и решите уравнение:

а) $\sin x \cos x = 0{,}25$; б) $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$;

в) $7\cos x + 2\sin 2x = 0$; г) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin^2(x-\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $(\sin x + \cos x)^2 = 1$; е) $2\sin^2 x = 2\cos^2 x + \sqrt{3}$.

1.500. Найдите значение выражения:

а) $4\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; б) $2\cos^2 15^\circ\,\mathrm{tg}\,15^\circ$; в) $2\cos^2 75^\circ - 1$;

г) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$; д) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,105^\circ}{\mathrm{tg}^2 105^\circ - 1}$; е) $\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}$.

1.501. Докажите тождество:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$; б) $2\cos^2 2\alpha - \cos 4\alpha = 1$;

в) $\frac{2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = -\mathrm{tg}\,2\alpha$.

1.502. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$; б) $\sqrt{3}\sin 2x = 2\sin^2 x$;

в) $2\sin x - \sin 2x = \cos x - 1$; г) $\sin^4 x - \cos^4 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\cos 2x = \cos x$; е) $1 - \cos 2x = 2\sin x$.

Правообладатель Народная асвета

1.503. Упростите выражение:

а) $\frac{1+\sin\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}$; б) $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \sin 2\alpha$;

в) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\frac{2\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)}$.

1.504. Постройте график функции $y=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$.

1.505. Упростите выражение:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+1-\sin 2\alpha$; б) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha \sin 2\alpha - \cos 2\alpha$.

1.506. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}15° + \operatorname{ctg}15°$; б) $\sin^4 15° - \cos^4 15°$.

1.507. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=5\cos x$ и $y=\sin 2x$.

1.508. Найдите $\frac{3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha}{5\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.509. Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

1.510. Решите уравнение:

а) $\sin x\cos(-x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $1+\cos x+\cos 2x = 0$;

в) $\sin^2 x - 2\sin 2x = 5\cos^2 x$; г) $(\sin x - \cos x)^2 = \cos 2x$.

1.511. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 9\alpha}{\sin 3\alpha} - \frac{\cos 9\alpha}{\cos 3\alpha} - 2$; б) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$;

в) $8\sin^2(\pi-\alpha)\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-1$.

1.512. Решите уравнение $\sin^2 9x + \sin 18x = 0$.

1.513. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения a^2, a^3 и $3a\sqrt{2}$ при $a=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1.514. Вычислите: $5^4-\left(\frac{2}{3}\right)^5+1^8$.

Правообладатель Народная асвета

1.515. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 2x - 15 > 0$; б) $x^2 + 7x \leqslant 0$;
в) $x^2 - 9 \geqslant 0$; г) $x^2 - 3x + 5 < 0$.

1.516. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y - x = 5, \\ x^2 - xy - y^2 = -29. \end{cases}$

1.517. Выберите функции, графики которых параллельны:

а) $y = 2x + 1$; б) $y = -3 + 2x$; в) $y = 2 + x$; г) $y = \frac{6x - 5}{3}$.

§ 12. Формулы преобразования суммы и разности синусов (косинусов) в произведение

1.518. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 7y = 3, \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$ способом сложения.

1.519. Сравните значения выражений $\sin 30° + \sin 60°$ и $\sin 90°$.

1.520. Верно ли, что $\cos 90° - \cos 30° > \cos 60°$?

Формулы синуса суммы и разности двух углов можно использовать для получения новых формул, необходимых для решения уравнений, изучения свойств функций и т. п.

Например, решим уравнение $\sin x + \sin 5x = 0$.

Для решения данного уравнения сумму $\sin x + \sin 5x$ удобно представить в виде произведения и затем воспользоваться условием равенства нулю произведения.

Выведем формулу, преобразующую сумму синусов в произведение.

Сложим почленно два равенства:

$$+\begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \end{array}$$

Обозначим $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$ и решим систему уравнений $\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y: \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ 2\alpha = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha = \frac{x + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - \frac{x + y}{2}, \\ \alpha = \frac{x + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{x - y}{2}, \\ \alpha = \frac{x + y}{2}. \end{cases}$$

Правообладатель Народная асвета

Подставим выражения для α и β в равенство $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$ и получим **формулу суммы синусов двух углов:** $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Вернемся к решению уравнения $\sin x + \sin 5x = 0$ и применим формулу суммы синусов: $\sin x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-5x}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos(-2x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0, \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вычтя из равенства $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ равенство $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$, можно получить **формулу разности синусов двух углов:** $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$.

Аналогично, с помощью равенств $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ и $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ можно получить **формулы**

- **суммы косинусов двух углов:** $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;
- **разности косинусов двух углов:** $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$.

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

Пример 1. Представьте в виде произведения:

а) $\sin 7x + \sin 3x$;
б) $\sin 7x - \sin 3x$;
в) $\cos 7x + \cos 3x$;
г) $\cos 7x - \cos 3x$.

Решение. Применим формулы преобразования суммы и разности в произведение и получим:

а) $\sin 7x + \sin 3x = 2\sin\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} = 2\sin 5x \cos 2x$;

б) $\sin 7x - \sin 3x = 2\sin\frac{7x-3x}{2}\cos\frac{7x+3x}{2} = 2\sin 2x \cos 5x$;

в) $\cos 7x + \cos 3x = 2\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} = 2\cos 5x \cos 2x$;

г) $\cos 7x - \cos 3x = -2\sin\frac{7x-3x}{2}\sin\frac{7x+3x}{2} = -2\sin 2x \sin 5x$.

Правообладатель Народная асвета

Пример 2. Сократите дробь $\dfrac{\sin 6x + \sin 8x}{\sin 6x - \sin 8x}$.

Решение. Применим формулы суммы и разности синусов двух углов:
$$\frac{\sin 6x + \sin 8x}{\sin 6x - \sin 8x} = \frac{2\sin 7x\cos(-x)}{2\sin(-x)\cos 7x} = \frac{\sin 7x\cos x}{-\sin x\cos 7x} = -\operatorname{tg} 7x \operatorname{ctg} x.$$

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите значение выражения $\cos 75° + \cos 15°$.

Решение. Применим формулу суммы косинусов:

$$\cos 75° + \cos 15° = 2\cos\frac{75° + 15°}{2}\cos\frac{75° - 15°}{2} = 2\cos 45°\cos 30° =$$
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2. Докажите тождество $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулами суммы синусов и суммы косинусов двух углов:

$$\frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{2\sin\frac{3\alpha + 5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha - 5\alpha}{2}}{2\cos\frac{3\alpha + 5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha - 5\alpha}{2}} = \frac{2\sin 4\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos 4\alpha\cos(-\alpha)} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha.$$

3. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 32° - \sin 58°}{\sin 13°}$; б) $\dfrac{\cos 74° - \cos 14°}{\sin 74° + \sin 14°}$.

Решение. а) $\dfrac{\sin 32° - \sin 58°}{\sin 13°} = \dfrac{2\sin\frac{32° - 58°}{2}\cos\frac{32° + 58°}{2}}{\sin 13°} = \dfrac{2\sin(-13°)\cos 45°}{\sin 13°} =$

$$= -\frac{2\sin 13°\cos 45°}{\sin 13°} = -2\cos 45° = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2};$$

б) $\dfrac{\cos 74° - \cos 14°}{\sin 74° + \sin 14°} = \dfrac{-2\sin\frac{74° - 14°}{2}\sin\frac{74° + 14°}{2}}{2\sin\frac{74° + 14°}{2}\cos\frac{74° - 14°}{2}} = \dfrac{-2\sin 30°\sin 44°}{2\sin 44°\cos 30°} = -\dfrac{\sin 30°}{\cos 30°} =$

$$= -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Решите уравнение:

а) $\sin 3x + \cos 2x = \sin x$; б) $\sqrt{2}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) Запишем уравнение в виде $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$ и применим формулу разности синусов:

$(\sin 3x - \sin x) + \cos 2x = 0$; $2\sin x \cos 2x + \cos 2x = 0$;

$\cos 2x\,(2\sin x + 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ 2\sin x + 1 = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ \sin x = -\frac{1}{2};\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z},\\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z};\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

б) Воспользуемся формулой разности косинусов и получим:

$\sqrt{2}\sin 2x + (\cos 5x - \cos 9x) = 0$; $\sqrt{2}\sin 2x - 2\sin 7x\sin(-2x) = 0$;

$\sqrt{2}\sin 2x + 2\sin 7x\sin 2x = 0$; $\sin 2x\left(\sqrt{2} + 2\sin 7x\right) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sqrt{2} + 2\sin 7x = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\\ 7x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z},\\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z};\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

? Выберите равенство, верное для любых углов α и β:

а) $\cos\alpha - \cos\beta = \cos(\alpha - \beta)$;
б) $\cos\alpha - \cos\beta = \sin(\alpha - \beta)$;
в) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;
г) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

1.521. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 5\alpha + \cos 3\alpha$;
б) $\sin 4\alpha - \sin 10\alpha$;
в) $\cos\alpha - \cos 4\alpha$;
г) $\sin 0{,}5\alpha + \sin 1{,}5\alpha$.

1.522. Вычислите:

а) $\sin 15° + \sin 105°$;
б) $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12}$.

Правообладатель Народная асвета

1.523. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}$.

1.524. Решите уравнение:

а) $\sin 4x = \sin 10x$; б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 4x$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = 1$.

1.525. Найдите значение выражения:

а) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20°$; б) $\cos\frac{17\pi}{36} + \cos\frac{7\pi}{36} - \cos\frac{5\pi}{36}$;

в) $\frac{\sin 35° + \sin 85°}{\cos 25°}$; г) $\frac{\cos 59° - \cos 1°}{\sin 59° - \sin 1°}$.

1.526. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha - \sin 3\alpha}$; б) $\frac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

1.527. Докажите тождество $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \operatorname{ctg}\alpha$.

1.528. Найдите значение выражения:

а) $\sin 58° + \cos 28° - \sqrt{3}\cos 2°$; б) $\frac{\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{7\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{9}}$;

в) $\frac{\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}}$.

1.529. Решите уравнение:

а) $\cos x - \sin 3x = \cos 5x$; б) $5\sin 2x = \sin 9x - \sin 5x$;

в) $\sin x\cos 2x - \cos x\sin 2x = \sin 3x$; г) $\sin 3x + \sin x = 2\sin^2 2x$.

1.530. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos 6\alpha$; б) $2\cos\alpha\sin\alpha + \sin 4\alpha$.

1.531. Вычислите:

а) $\sin 75° + \cos 75°$; б) $\sin 15° + \cos 15°$; в) $\sin\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$.

1.532. Упростите выражение $\left(\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}\right)\frac{\sin 7\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Правообладатель Народная асвета

1.533. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 8\alpha + \cos 4\alpha$; б) $\sin 2\alpha - \sin 5\alpha$;

в) $\cos\alpha - \cos 3\alpha$; г) $\sin\alpha + \sin 10\alpha$.

1.534. Вычислите:

а) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$; б) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

1.535. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

1.536. Решите уравнение:

а) $\cos 5x = \cos 7x$; б) $\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\cos(40^\circ - x) + \cos(80^\circ + x) = 1$.

1.537. Найдите значение выражения:

а) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ$; б) $\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{5\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{9}$;

в) $\dfrac{\cos 24^\circ - \cos 84^\circ}{\sin 54^\circ}$; г) $\dfrac{\cos 89^\circ + \cos 1^\circ}{\sin 89^\circ + \sin 1^\circ}$.

1.538. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$; б) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha}$; в) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$.

1.539. Найдите значение выражения:

а) $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$; б) $\cos 47^\circ + \sin 77^\circ - \sqrt{3}\cos 17^\circ$;

в) $\dfrac{\cos 29^\circ - \cos 91^\circ}{\sin 31^\circ}$; г) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18} + \sin\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{2\pi}{9}}$;

д) $\dfrac{\cos 25^\circ\cos 15^\circ - \sin 25^\circ\sin 15^\circ}{\cos 100^\circ + \cos 20^\circ}$; е) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}}$.

1.540. Решите уравнение:

а) $\cos x - \cos 7x = \sin 3x$; б) $7\sin 2x = \sin 7x - \sin 3x$;

в) $\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x = \cos 3x$; г) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

1.541. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\dfrac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha}$.

Правообладатель Народная асвета

1.542. Найдите значение выражения:

а) $\cos 70° + \sin 140° - \cos 10°$; б) $\dfrac{\sin^2 49° - \cos^2 49°}{\cos 53° - \cos 37°}$.

1.543. Найдите значение выражения $\sqrt{45} - 11\sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{61\frac{1}{4}}$.

1.544. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{x}{x^2 - 25} + \dfrac{x + 4}{x + 5} = 0$.

1.545. Цена товара сначала увеличилась на 10 %, а затем уменьшилась на 25 % по сравнению с увеличенной ценой. В результате товар подешевел на 7 р. Найдите, сколько стоил товар первоначально.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса угла;
- знать свойства тригонометрических функций;
- знать формулы тригонометрии;
- уметь интерпретировать определение и свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса с помощью тригонометрической окружности;
- уметь применять формулы для решения простейших тригонометрических уравнений;
- уметь применять алгоритмы решения тригонометрических уравнений основных типов;
- уметь выполнять построение графиков тригонометрических функций и выполнять преобразования графиков тригонометрических функций;
- уметь выполнять преобразования тригонометрических выражений с помощью формул приведения, сложения, суммы и разности, двойного аргумента, одного аргумента;
- уметь выполнять задания на применение формул тригонометрии для решения уравнений, вычисления значений выражений;
- уметь применять правила и алгоритмы преобразования тригонометрических выражений для изучения свойств функций.

Я проверяю свои знания

1. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(-\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Выберите верные равенства:

а) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$; б) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; г) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Правообладатель Народная асвета

2. а) Выразите в градусах угол $\frac{7\pi}{18}$ рад;
б) выразите в градусах угол –2,8 рад;
в) выразите в радианах угол –240°.

3. Найдите значение выражения:
а) $8\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}-2\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
в) $\cos180°+\sin270°$.

4. Упростите выражение:
а) $\cos(\pi-\alpha)+\cos(-\alpha)$; б) $\sin(-\alpha)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;
в) $\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)+\sin^2(-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

5. Найдите значение выражения:
а) $\cos(-315°)\cdot\operatorname{ctg}(-240°)$; б) $\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{4}$;
в) $\cos139°\cos19°+\sin139°\sin19°$; г) $\frac{1-\operatorname{tg}12°\operatorname{tg}48°}{\operatorname{tg}12°+\operatorname{tg}48°}$;
д) $2\cos105°\sin105°$; е) $\cos^2112{,}5°-\sin^2112{,}5°$.

6. Известно, что α и β — углы третьей четверти и $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\sin\beta=-\frac{4}{5}$. Найдите $\sin(\alpha-\beta)$.

7. Решите уравнение:
а) $2\cos^2x-5\cos x-3=0$; б) $5\cos^2x+2\sin^2x=0{,}5\sin2x+3$;
в) $\cos10x=\cos x$; г) $\sin9x\cos x-\cos9x\sin x=0{,}5$;
д) $\sqrt{2}\sin x=\sin2x$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)-\sin x=0$;
ж) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Упростите выражение $\frac{\cos\alpha-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha}$ и найдите его значение при $\alpha=\frac{\pi}{18}$.

9. Постройте график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$ и запишите ее свойства.

10. Найдите абсциссы точек пересечения прямой $y=-1$ и графика функции $y=\sin x+\cos x$.

Дополнительные материалы к учебному пособию «Алгебра, 10» можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика. 10 класс».

Правообладатель Народная асвета

Глава 2

КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ ИЗ ЧИСЛА

§ 13. Корень n-й степени из числа a ($n \geqslant 2$, $n \in N$)

2.1. Сколько корней имеет уравнение:
а) $x^2 = 0{,}81$; б) $x^2 = -0{,}01$; в) $x^2 = 0$?

2.2. Найдите значение выражения $0{,}02 \cdot \sqrt{90\,000} - \frac{17}{\sqrt{2{,}89}} - 0{,}5 \cdot \sqrt{144}$.

2.3. Используя свойства степени, вычислите:

а) $3^8 : \left(3^5\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-9} : (0{,}5)^{-7} \cdot 4^{-1}$; в) $1{,}2^{19} \cdot 1{,}2^{-18} : 12^0$.

Рассмотрим несколько задач. *Задача* 1. Кубический экологический резервуар для хранения воды имеет объем $3\frac{3}{8}$ м^3. Найдите длину ребра куба.

Решение. Обозначим длину ребра куба через x м, тогда объем куба равен x^3 м^3. Получим уравнение $x^3 = 3\frac{3}{8}$. Для его решения нужно найти такое число, куб которого равен $3\frac{3}{8}$. Так как $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$, то это уравнение имеет корень $x = \frac{3}{2}$, удовлетворяющий условию задачи.

Ответ: длина ребра куба равна 1,5 м.

Задача 2. Вкладчик положил m рублей на банковский счет, по которому сумма вклада увеличивается ежегодно на p %. Через 4 года сумма на счете оказалась равной k рублей. Определите процент p, под который сделан вклад, если известен первоначальный вклад m и сумма на счете k через 4 года.

Решение. Денежный вклад ежегодно увеличивается на p %, т. е. в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз. Через 4 года он будет равен $m\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$. По условию задачи $m\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = k$, откуда $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = \frac{k}{m}$. Для определения p сначала нужно найти такое число, четвертая степень которого равна $\frac{k}{m}$.

Многие задачи, как и рассмотренные, приводят к необходимости извлечения корня n-й степени из действительного числа.

Определение. Пусть $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, $a \in \boldsymbol{R}$. Корнем n-й степени из числа a называется число, n-я степень которого равна a.

Правообладатель Народная асвета

Например:

- корнем третьей степени из числа 125 является число 5, поскольку $5^3 = 125$;
- корнем пятой степени из числа –32 является число –2, поскольку $(-2)^5 = -32$;
- корнями четвертой степени из числа 81 являются числа 3 и –3, поскольку $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Из определения следует, что для нахождения корня n-й степени из действительного числа a надо решить уравнение $x^n = a$.

Выясним, сколько корней может иметь это уравнение в зависимости от n и от a.

1. Корень четной степени из действительного числа

Рассмотрим уравнение $x^{2k} = a$, где k — натуральное число.

а) Если $a < 0$, то уравнение не имеет корней, так как $x^{2k} = \left(x^k\right)^2 \geqslant 0$.

Следовательно, **не существует корня четной степени из отрицательного числа.**

б) Если $a = 0$, то уравнение $x^{2k} = 0$ имеет единственный корень, равный нулю.

Значит, **существует единственный корень четной степени из числа нуль.**

в) Если $a > 0$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два действительных корня: один положительный, а другой — противоположный ему — отрицательный.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^{2k}$, где $k \in N$.
Мы рассматривали частный случай этой функции — $y = x^2$.
Свойства и график функции $f(x) = x^{2k}$ аналогичны свойствам и графику функции $y = x^2$.

Так как функция $f(x) = x^{2k}$ возрастает на множестве неотрицательных чисел и a — значение, которое принимает эта функция $\left(a \in [0; +\infty)\right)$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет единственный действительный корень при любом $a \in [0; +\infty)$.

Пусть x_1 — положительный корень уравнения $x^{2k} = a$ (рис. 116), значит, числовое равенство $x_1^{2k} = a$ является верным. Так как $x_1^{2k} = (-x_1)^{2k}$, то верным является и числовое равенство $(-x_1)^{2k} = a$, а значит, число $-x_1$ также является корнем уравнения $x^{2k} = a$.

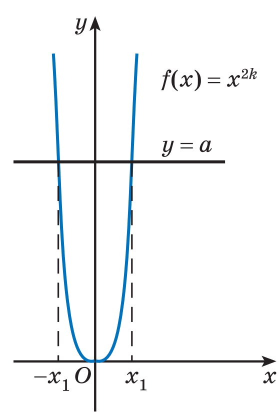


Рис. 116

Правообладатель Народная асвета

Таким образом, существует ровно два корня четной степени из положительного числа. Один из корней является положительным числом, а другой — противоположным ему числом.

Определение. Арифметическим корнем n-й степени из числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

$\sqrt[n]{a} = b$

$b \geqslant 0,\ b^n = a$

Например, 2 — арифметический корень четвертой степени из числа 16, поскольку $2 > 0$ и $2^4 = 16$.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается $\sqrt[n]{a}$ и читается: «арифметический корень n-й степени из числа a». Число n называется показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Можно, используя обозначения, записать $\sqrt[4]{16} = 2$. Читается: «арифметический корень четвертой степени из числа 16 равен 2». Слово «арифметический», как правило, опускается.

Корень второй степени из числа принято называть квадратным корнем (его свойства изучались в 8-м классе). Показатель корня второй степени при записи опускают. Например, корень второй степени из 13 обозначают $\sqrt{13}$ и говорят: «квадратный корень из 13».

Действие нахождения арифметического корня n-й степени из числа a называется **извлечением корня из числа**.

Пример. Выполните извлечение корня:
а) шестой степени из числа 64;
б) восьмой степени из числа 0,00000001.

Решение:

а) $\sqrt[6]{64} = 2$;

б) $\sqrt[8]{0{,}00000001} = 0{,}1$.

$\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[8]{256} = 2$;

$\sqrt[12]{0} = 0$; $\sqrt[10]{1} = 1$;

$\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[4]{0{,}0625} = 0{,}5$

Такие числа, как $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[8]{100}$ и т. п., являются иррациональными. С помощью десятичных приближений можно найти их значения с любой заданной степенью точности.

2. Корень нечетной степени из действительного числа

Рассмотрим уравнение $x^{2k+1} = a$, где k — натуральное число. Это уравнение имеет единственный корень.

Правообладатель Народная асвета

Рассмотрим функцию $f(x) = x^{2k+1}$, где $k \in N$. Эта функция является возрастающей на множестве всех действительных чисел и принимает все значения из промежутка $a \in (-\infty; +\infty)$.

Так как функция $f(x) = x^{2k+1}$ возрастает на R и a — значение, которое принимает эта функция $\left(a \in (-\infty; +\infty)\right)$, то уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственный действительный корень при любом a (рис. 117).

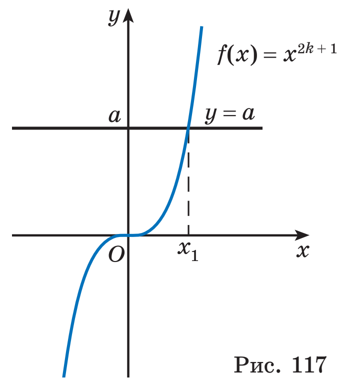


Рис. 117

Существует единственный действительный корень нечетной степени из любого действительного числа.

Этот корень для неотрицательного числа a называется **арифметическим** и обозначается так же, как корень четной степени.

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[5]{243} = 3$.

Такие числа, как $\sqrt[5]{25}$; $\sqrt[7]{19}$ и т. п., являются иррациональными числами.

$\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[5]{32} = 2$;
$\sqrt[7]{0} = 0$; $\sqrt[9]{1} = 1$;
$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$; $\sqrt[7]{0{,}0000001} = 0{,}1$

Корень третьей степени из числа называют кубическим корнем. Например, $\sqrt[3]{15}$ — кубический корень из 15.

Корень нечетной степени из отрицательного числа принято записывать в виде $\sqrt[5]{-243}$, не называя его арифметическим корнем (читается: «корень пятой степени из числа -243»). А выражают его через арифметический корень из противоположного ему положительного числа. Например, $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$; $\sqrt[7]{-128} = -\sqrt[7]{128} = -2$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Определите, сколько существует корней:

а) четвертой степени из числа 25; б) пятой степени из числа 46; в) восьмой степени из числа -256; г) седьмой степени из числа -1.

Решение. а) Так как 25 — положительное число, то существует два корня четвертой (четной) степени из числа 25;

Правообладатель Народная асвета

б) так как существует только один корень нечетной степени из действительного числа, то существует только один корень пятой степени из числа 46;
в) так как число –256 — отрицательное, то не существует корня восьмой степени из числа –256, поскольку не существует корня четной степени из отрицательного числа;
г) так как существует только один корень нечетной степени из действительного числа, то существует только один корень седьмой степени из числа –1.

2. Назовите показатель корня, подкоренное выражение, прочитайте данное выражение:

а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[6]{4x^2 - 1}$; в) $\sqrt[8]{a^4b^3}$.

Решение. а) Показатель корня равен 3, подкоренное выражение 2, данное выражение: «кубический корень из двух»;
б) показатель корня равен 6, подкоренное выражение $4x^2 - 1$, данное выражение: «корень шестой степени из разности $4x^2$ и 1»;
в) показатель корня равен 8, подкоренное выражение a^4b^3, данное выражение: «корень восьмой степени из произведения степеней a^4 и b^3».

3. Какие из следующих равенств:

а) $\sqrt[4]{81} = 3$; б) $\sqrt[3]{125} = 5$; в) $\sqrt[3]{-125} = -5$; г) $\sqrt[6]{729} = -3$

— являются верными?

Решение. а) $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 > 0$ и $3^4 = 81$, то по определению арифметического корня n-й степени из числа равенство верное;
б) $\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5 > 0$ и $5^3 = 125$, то по определению арифметического корня n-й степени из числа равенство верное;
в) $\sqrt[3]{-125} = -5$, так как $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$, то равенство верное;
г) $\sqrt[6]{729} = -3$, так как по определению арифметический корень четной степени из числа равен неотрицательному числу, то равенство неверное.

4. Какие из данных выражений:

а) $\sqrt[10]{10}$; б) $\sqrt[7]{128}$; в) $\sqrt[4]{-81}$; г) $\sqrt[7]{-128}$ — не имеют смысла?

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) Выражение $\sqrt[10]{10}$ есть арифметический корень десятой степени из положительного числа 10, оно имеет смысл;

б) выражение $\sqrt[7]{128}$ есть арифметический корень седьмой степени из положительного числа 128, оно имеет смысл;

в) подкоренное выражение арифметического корня четвертой степени равно отрицательному числу −81, данное выражение не имеет смысла, так как не существует корня четной степени из отрицательного числа;

г) выражение $\sqrt[7]{-128}$ имеет смысл, так как существует корень нечетной степени из отрицательного числа.

5. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^4 = 6$; б) $x^3 = 6$; в) $x^4 = -6$; г) $x^3 = -6$?

Решение. а) Уравнение имеет два корня $x_1 = \sqrt[4]{6}$ и $x_2 = -\sqrt[4]{6}$;

б) уравнение имеет один корень $x = \sqrt[3]{6}$;

в) уравнение не имеет корней;

г) уравнение имеет один корень $x = -\sqrt[3]{6}$.

6. Решите уравнение:

а) $x^4 - 625 = 0$; б) $x^6 - 245 = 0$;
в) $x^3 - 216 = 0$; г) $x^3 + 27 = 0$.

Решение. а) $x^4 - 625 = 0$; $x^4 = 625$; $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt[4]{625}, \\ x = -\sqrt[4]{625}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -5. \end{array}\right.$

Ответ: −5; 5.

б) $x^6 - 245 = 0$; $x^6 = 245$; $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt[6]{245}, \\ x = -\sqrt[6]{245}. \end{array}\right.$

Ответ: $-\sqrt[6]{245}$; $\sqrt[6]{245}$.

в) $x^3 - 216 = 0$; $x^3 = 216$; $x = \sqrt[3]{216}$; $x = 6$.

Ответ: 6.

г) $x^3 + 27 = 0$; $x^3 = -27$; $x = \sqrt[3]{-27}$; $x = -\sqrt[3]{27}$; $x = -3$.

Ответ: −3.

? Определите, четным или нечетным является число n, если известно, что уравнение $x^n = a$ имеет:

а) два различных корня; б) только один корень.

Правообладатель Народная асвета

2.4. Выберите верные утверждения:
а) число –5 является корнем третьей степени из числа –125;
б) число 0 является корнем пятой степени из числа 0;
в) число –2 является корнем четвертой степени из числа –16;
г) число 7 является корнем третьей степени из числа 343.

2.5. Прочитайте выражение:
а) $\sqrt[5]{8}$; б) $\sqrt[3]{12}$; в) $\sqrt[4]{x^9}$; г) $\sqrt[10]{a-b}$.
Назовите показатель корня, подкоренное выражение.

2.6. С помощью определения арифметического корня n-й степени докажите, что:
а) $\sqrt[6]{64}=2$; б) $\sqrt[3]{125}=5$; в) $\sqrt[4]{0,0081}=0,3$; г) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$.

2.7. Верно ли равенство:
а) $\sqrt[4]{-81}=-3$; б) $\sqrt[3]{0,027}=0,3$; в) $\sqrt[8]{1}=1$; г) $\sqrt[7]{-\frac{1}{128}}=-\frac{1}{2}$?
Ответ обоснуйте.

2.8. Имеет ли смысл выражение:
а) $\sqrt[5]{3}$; б) $\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[7]{-3}$; г) $\sqrt[6]{-3}$?

2.9. Выберите уравнения, имеющие два корня:
а) $x^4=81$; б) $x^5=32$; в) $x^6=10$;
г) $x^8=0$; д) $x^{10}=-1$; е) $x^7=-5$.
Найдите корни этих уравнений.

2.10. Решите уравнение:
а) $x^8-12=0$; б) $x^4+16=0$;
в) $x^5-29=0$; г) $x^9+13=0$.
Корни каких из данных уравнений являются рациональными числами?

2.11. Выполните действие извлечения корня:
а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; в) $\sqrt[4]{10\,000}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$;
д) $\sqrt[6]{64}$; е) $\sqrt[10]{1}$; ж) $\sqrt[5]{32}$; з) $\sqrt[3]{0,001}$;
и) $\sqrt[3]{125}$; к) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$; л) $\sqrt[9]{0}$; м) $\sqrt[3]{216}$.

2.12. Найдите значение корня:
а) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$; в) $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}}$; г) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$;

Правообладатель Народная асвета

д) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; ж) $\sqrt[3]{-5\frac{23}{64}}$; з) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$.

2.13. Найдите значения выражений $\sqrt[3]{m}$, $\sqrt[3]{8m}$, $\sqrt[3]{-0,008m}$, если:

а) $m = 1$; б) $m = -1$; в) $m = 125$; г) $m = -1000$.

2.14. Выполните действия:

а) $\sqrt[4]{81} - 6$; б) $19 - \sqrt[3]{8}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - 1\frac{2}{3}$;

г) $\sqrt[3]{0,125} - 3,5$; д) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{125}$; е) $\sqrt[3]{0,008} + \sqrt[5]{32}$;

ж) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; з) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} - \sqrt[9]{1}$; и) $\sqrt[7]{0} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.

2.15. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a}$, если:

а) $a = 1$; б) $a = 0$; в) $a = 64$; г) $a = 0,000001$.

2.16. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{100\,000} - \sqrt[4]{0,0625}$; б) $-\sqrt[3]{0,001} + \sqrt[6]{1}$;

в) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - \sqrt[5]{0,00001}$; г) $-\sqrt[4]{0,0016} \cdot \sqrt[3]{8000}$;

д) $-\sqrt[3]{-343} \cdot \sqrt[5]{-1024}$; е) $6 : \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$;

ж) $\sqrt[6]{0,000064} : \sqrt[3]{-0,064}$; з) $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} : \sqrt[3]{0,216}$.

2.17. Найдите значение выражения $-3\sqrt[6]{m} + 0,5\sqrt[5]{n}$ при:

а) $m = 64$, $n = 243$; б) $m = 0$, $n = -1$; в) $m = 0,000001$, $n = 0,00032$.

2.18. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{6\cos\frac{\pi}{6}}$; б) $\sqrt[5]{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}$.

2.19. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[4]{6}\right)^4$; б) $\left(\sqrt[5]{13}\right)^5$; в) $\left(-\sqrt[8]{6}\right)^8$; г) $\left(\sqrt[7]{-2}\right)^7$;

д) $\left(2\sqrt[4]{11}\right)^4$; е) $\left(-\sqrt[5]{3}\right)^5$; ж) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{5}\right)^6$; з) $\left(3\sqrt[4]{0,2}\right)^4$.

2.20. Вычислите:

а) $2\sqrt[4]{0,0625} - \sqrt[5]{-243}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{1296} - \sqrt[3]{-0,064}$;

в) $10\sqrt[4]{0,0081} - 0,2\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$; г) $\sqrt{\frac{1}{9}} + 3\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} - \frac{1}{8}\sqrt[4]{256}$;

д) $\sqrt{0,64} + 8\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} + \frac{2}{3}\sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + 45\sqrt[3]{-0,001} + 5\sqrt[4]{0,0016}$.

Правообладатель Народная асвета

2.21. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (рис. 118). Выразите из этой формулы R — радиус шара.

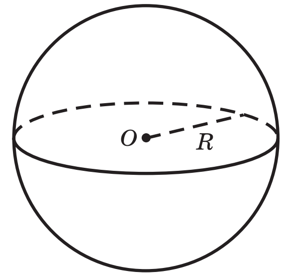


Рис. 118

2.22. Найдите значение выражения:

а) $0{,}6\sqrt[4]{10\,000} - 3\sqrt[7]{-128} + 4 \cdot \left(-\sqrt[8]{6}\right)^8$;

б) $\left(-2\sqrt[3]{-5}\right)^3 - \sqrt[12]{10^{12}} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}\right)^3$.

2.23*. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{10 + 3\sqrt[3]{8}}$; б) $\sqrt[10]{0{,}7 + 3\sqrt[5]{0{,}00001}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{0{,}125} + \sqrt[3]{-\frac{27}{512}}}$.

2.24. С помощью определения арифметического квадратного корня n-й степени выберите все верные равенства:

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{27} = 3$; в) $\sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$;

г) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = -\frac{2}{5}$; д) $\sqrt[4]{1} = 1$; е) $\sqrt[10]{0} = 0$.

2.25. Выберите выражения, имеющие смысл:

а) $\sqrt[6]{12}$; б) $\sqrt[8]{-1}$; в) $\sqrt[5]{6}$; г) $\sqrt[7]{-11}$; д) $\sqrt[4]{0}$.

2.26. Решите уравнение:

а) $x^4 = 7$; б) $x^6 = 0$; в) $x^7 - 4 = 0$; г) $x^{10} + 1 = 0$.

2.27. Найдите значение корня:

а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$; г) $\sqrt[5]{32}$;

д) $\sqrt[3]{64}$; е) $\sqrt[3]{-27}$; ж) $\sqrt[5]{-1}$; з) $\sqrt[3]{0{,}008}$;

и) $\sqrt[3]{-0{,}125}$; к) $\sqrt[7]{0}$; л) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; м) $\sqrt[3]{-27\,000}$;

н) $\sqrt[8]{256}$; о) $\sqrt[3]{-0{,}216}$.

2.28. Найдите значение выражения $x + \sqrt[3]{x}$, если:

а) $x = 0$; б) $x = -1$; в) $x = 8$;

г) $x = -27$; д) $x = 0{,}001$; е) $x = \frac{64}{125}$.

Правообладатель Народная асвета

2.29. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$; б) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; в) $\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$.

2.30. Найдите значения выражений $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{1000a}$, $\sqrt[3]{-0{,}001a}$, если:
а) $a = 8$; б) $a = -0{,}125$.

2.31. Выполните действия:

а) $\sqrt[3]{27} - 2$; б) $10 + \sqrt[4]{16}$; в) $0{,}5 + \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;

г) $\sqrt[3]{-125} + 15$; д) $\sqrt[4]{1} - \sqrt[3]{216}$; е) $\sqrt[3]{0{,}064} - \sqrt[5]{243}$;

ж) $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; з) $\sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}} - \sqrt[7]{0}$; и) $\sqrt[4]{10\,000} : \sqrt[3]{0{,}125}$;

к) $-\sqrt[5]{0{,}00001} : \sqrt[3]{-8}$; л) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} \cdot \sqrt[5]{0{,}00032}$; м) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt[3]{27\,000}$.

2.32. Найдите значение выражения $2\sqrt[4]{x} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$ при:

а) $x = 16$, $y = 343$; б) $x = 0$, $y = -1$; в) $x = 0{,}0081$, $y = -0{,}125$.

2.33. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{32\sin\frac{\pi}{6}}$; б) $\sqrt[3]{8\cos\pi}$.

2.34. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6$; б) $\left(\sqrt[3]{10}\right)^3$; в) $\left(-\sqrt[4]{5}\right)^4$;

г) $\left(\sqrt[3]{-7}\right)^3$; д) $\left(2\sqrt[6]{3}\right)^6$; е) $\left(-\frac{1}{3}\sqrt[4]{6}\right)^4$.

2.35. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-0{,}125} - \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt[5]{32} + 0{,}25\sqrt[3]{-0{,}216}$;

в) $-3\sqrt[4]{\frac{1}{81}} + \sqrt[4]{0{,}0625}$; г) $\sqrt[5]{-100\,000} - 4\sqrt[4]{0{,}0256}$.

2.36. Объем куба вычисляется по формуле $V = a^3$. Выразите из этой формулы a — длину ребра куба.

2.37. Найдите значение выражения:

а) $400\sqrt[3]{-0{,}001} - 0{,}5\sqrt[5]{-0{,}00032} - 3 \cdot \left(-2\sqrt[4]{5}\right)^4$;

б) $4 \cdot \sqrt[4]{7\frac{58}{81}} - \left(2\sqrt[5]{-0{,}1}\right)^5 + \left(-\sqrt[7]{-10^7}\right)$.

Правообладатель Народная асвета

2.38. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(5\sqrt{2}\right)^2$; б) $\sqrt{16{,}9}\cdot\sqrt{10}$;

в) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}}$; г) $\sqrt{24}:\sqrt{6}+\sqrt{\frac{7}{9}}\cdot\sqrt{7}$.

2.39. Найдите значение выражения $\sin\frac{3\pi}{2}-4\cos(-5\pi)+\sin(-8\pi)$.

2.40. Решите неравенство $4-x>\frac{1}{x-1}$.

§ 14. Свойства корней *n*-й степени ($n>1$, $n\in N$)

2.41. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$; б) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$.

2.42. Вычислите:

а) $\sqrt{(-4)^2}$; б) $\sqrt{173^2-52^2}$.

2.43. При каких значениях t верно равенство:

а) $\sqrt{t^2}=t$; б) $\sqrt{(t-1)^2}=1-t$?

Рассмотрим два свойства корней n-й степени, аналогичные свойствам квадратных корней.

Свойство 1. Корень n-й степени **из произведения** неотрицательных множителей **равен произведению корней** n-й степени из этих множителей:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},\text{ где } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ n\in N,\ n>1.$$

Свойство 2. Корень n-й степени **из частного равен частному корней** n-й степени делимого и делителя, если делимое — неотрицательное число, а делитель — положительное число:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\text{ где } a\geqslant 0,\ b>0,\ n\in N,\ n>1.$$

Докажем свойство 1 для корней n-й степени из произведения двух множителей: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $n\in N$, $n>1$.

Доказательство. При доказательстве используем определение арифметического корня n-й степени из числа и свойства степени с целым показателем.

Обозначим $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=t$ и покажем, что $t\geqslant 0$ и $t^n=ab$.

Правообладатель Народная асвета

1) По определению арифметического корня n-й степени из числа имеем: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, а так как произведение двух неотрицательных множителей есть число неотрицательное, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$, значит, $t \geqslant 0$.

2) По свойству степени с целым показателем получим: $t^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$, а по определению корня n-й степени из числа $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$, т. е. $t^n = ab$. Таким образом, свойство доказано.

Свойство 2 докажите самостоятельно.

Пример 1. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32}$; б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{9}}$; в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48}$.

Решение. а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32} = \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{32} = 3 \cdot 2 = 6$;

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{9}} = \sqrt[4]{36 \cdot \frac{4}{9}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{36 \cdot 48} = \sqrt[3]{216 \cdot 8} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{8} = 6 \cdot 2 = 12$.

Пример 2. Вычислите:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

а) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Свойство 3. Значение корня из степени не изменится, если и показатель корня, и показатель подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число или разделить на их общий делитель:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}; \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : r]{a^{m : r}},$$

где $a \geqslant 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{N}$, r — общий натуральный делитель чисел m и n, $n > 1$, $k > 1$ и $r > 1$.

Докажем, что $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ или $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. Доказательство проведем на основании определения корня степени nk из числа a^{mk}.

Обозначим $\sqrt[n]{a^m} = t$, покажем, что $t \geqslant 0$ и $t^{nk} = a^{mk}$.

Очевидно, что $t \geqslant 0$ по определению арифметического корня.

Покажем, что $t^{nk} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = a^{mk}$. По свойству степени с целым показателем и определению корня справедливы равенства: $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$.

Правообладатель Народная асвета

Пример 3. Упростите выражение

$\sqrt[21]{128}$.

Решение:

$\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3\cdot 7]{2^7} = \sqrt[3]{2}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$$

Свойство 4. Чтобы извлечь корень k-й степени из корня n-й степени из неотрицательного числа, достаточно извлечь корень степени nk из этого числа:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$, $a \geqslant 0$.

Для доказательства достаточно показать, что $\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = a$.

По свойству степени с натуральным показателем имеем: $\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{k}\right)^{n}$.

По определению корня получим: $\left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{k}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$. Свойство доказано.

Пример 4. Упростите выражение

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$.

Решение:

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}} = \sqrt[3\cdot 4]{15} = \sqrt[12]{15}$.

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

Свойство 5. Для любого действительного a и натурального $n > 1$ справедливо равенство $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ если } n \text{ — четное число,} \\ a, \text{ если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$

Действительно, если n — четное, то $|a|^n = a^n$. Если n — нечетное, то $a^n = a^n$. Таким образом, на основании определения корня n-й степени свойство доказано.

Пример 5. Вычислите:

а) $\sqrt[8]{(-3)^8}$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5}$.

Решение.

а) $\sqrt[8]{(-3)^8} = |-3| = 3$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ если } n \text{ — четное} \\ a, \text{ если } n \text{ — нечетное} \end{cases}$$

Правообладатель Народная асвета

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{0,00032 \cdot 3125}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$;

б) $\sqrt[5]{0,00032 \cdot 3125} = \sqrt[5]{0,00032} \cdot \sqrt[5]{3125} = 0,2 \cdot 5 = 1$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[6]{0,000243} \cdot \sqrt[6]{19,2}$; б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{0,000243} \cdot \sqrt[6]{19,2} = \sqrt[6]{0,000243 \cdot 19,2} =$

$= \sqrt[6]{0,000243 \cdot 0,3 \cdot 64} = \sqrt[6]{0,3^5 \cdot 0,3 \cdot 64} = 0,3 \cdot 2 = 0,6$;

б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{12^2 \cdot 12} = \sqrt[3]{12^3} = 12$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{0,0625}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0,001}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{\dfrac{0,0625}{810\,000}} = \dfrac{\sqrt[4]{0,0625}}{\sqrt[4]{810\,000}} = \dfrac{0,5}{30} = \dfrac{1}{60}$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0,001}} = \dfrac{\sqrt[3]{216\,000}}{\sqrt[3]{0,001}} = \dfrac{60}{0,1} = 600$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{0,000064}}{\sqrt[5]{0,2}}$.

Решение. а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\dfrac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

б) $\dfrac{\sqrt[5]{0,000064}}{\sqrt[5]{0,2}} = \sqrt[5]{\dfrac{0,000064}{0,2}} = \sqrt[5]{0,00032} = 0,2$.

5. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{16}$; б) $\sqrt[4]{25^2}$; в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[4]{25^2} = \sqrt{25} = 5$;

в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$;

Правообладатель Народная асвета

г) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[12]{6^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^3 \cdot 3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{27}{2}} = \sqrt[12]{13{,}5}.$

6. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}}$; в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[2 \cdot 8]{a} = \sqrt[16]{a}$;

в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[18]{a^3} = \sqrt[6]{a}$.

7. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[6]{(-5)^6}$; б) $\sqrt[13]{(-7)^{13}}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$; б) $\sqrt[13]{(-7)^{13}} = -7$.

8. Замените выражение на тождественно равное ему:

а) $\sqrt[12]{k^{12}}$, если $k \geqslant 0$; б) $\sqrt[14]{p^{14}}$, если $p \leqslant 0$.

Решение. а) $\sqrt[12]{k^{12}} = |k| = k$, так как $k \geqslant 0$;

б) $\sqrt[14]{p^{14}} = |p| = -p$, так как $p \leqslant 0$.

?

1. При каких значениях a и b верно равенство $\sqrt[6]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{b}}$?

2. При каких значениях m верно равенство $\sqrt[8]{m^8} = -m$?

2.44. Вычислите с помощью свойства корня n-й степени из произведения:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; б) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$; в) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 81}$;

г) $\sqrt[5]{32 \cdot 0{,}00243}$; д) $\sqrt[3]{0{,}027 \cdot 15^3}$; е) $\sqrt[4]{625 \cdot 3^8}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 64 \cdot 343}$; з) $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 625 \cdot 7^4}$.

2.45. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; в) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$;

г) $\sqrt[3]{2{,}7} \cdot \sqrt[3]{10}$; д) $\sqrt[5]{0{,}32} \cdot \sqrt[5]{100}$; е) $\sqrt[4]{0{,}8} \cdot \sqrt[4]{20}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}1} \cdot \sqrt[3]{0{,}08}$; з) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-2}$.

Правообладатель Народная асвета

2.46. Найдите значение выражения с помощью свойства корня n-й степени из частного:

а) $\sqrt[4]{\frac{81}{0{,}0625}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{0{,}064}{1000}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{3\,200\,000}{0{,}00243}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{0{,}343}{125}}$.

2.47. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{400}}{\sqrt[3]{50}}$;

г) $\frac{\sqrt[4]{4{,}8}}{\sqrt[4]{0{,}3}}$; д) $\sqrt[3]{\frac{5}{36}} : \sqrt[3]{\frac{6}{25}}$; е) $\sqrt[3]{7\frac{1}{5}} : \sqrt[3]{-\frac{1}{30}}$.

2.48. Сравните значения выражений $\sqrt[4]{ab}$ и $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, если:

а) $a = 16$, $b = 625$; б) $a = -256$, $b = -0{,}0081$; в) $a = 7^4$, $b = 3^8$.

Можно ли найти значения данных выражений, если числа a и b разных знаков?

2.49. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125} - \sqrt[4]{16 \cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{8}{343}} + \sqrt[4]{\frac{0{,}0625}{256}}$.

2.50. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\frac{0{,}0016 \cdot 256}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{0{,}008}{27 \cdot 0{,}125}}$.

2.51. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$; б) $\sqrt[4]{72} \cdot \sqrt[4]{18}$; в) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$;

г) $\sqrt[5]{160} \cdot \sqrt[5]{625}$; д) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-6} \cdot \sqrt[3]{9}$; е) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{12}$.

2.52. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{96}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{3125}}{\sqrt[3]{5400}}$; г) $\frac{\sqrt[5]{6{,}4}}{\sqrt[5]{48{,}6}}$.

2.53. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$, используя свойства корня.

2.54. Найдите, во сколько раз число:

а) $\sqrt[6]{128}$ больше числа $\sqrt[6]{2}$; б) число $\sqrt[3]{4}$ меньше числа $\sqrt[3]{108}$.

2.55. Вычислите значение выражения:

а) $5\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $-6\sqrt[5]{4} \cdot 3\sqrt[5]{8}$;

в) $3\sqrt[3]{7} \cdot \left(\sqrt[3]{-49}\right)$; г) $5\sqrt[4]{10} \cdot 0{,}3\sqrt[4]{1000}$.

Правообладатель Народная асвета

2.56. Определите, являются ли взаимно обратными числа:

а) $\sqrt[3]{5}$ и $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; б) $2\sqrt[4]{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[4]{32}}$; в) $\sqrt[5]{64}$ и $-\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$.

2.57. Найдите значение выражения на основании свойств корня n-й степени:

а) $\sqrt[4]{1780^2 - 780^2}$; б) $\sqrt[3]{0{,}69^2 - 0{,}51^2}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{34} + 3\sqrt{2}}$; г) $\sqrt[3]{5\sqrt{3} + \sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3} - \sqrt{11}}$.

2.58. Представьте выражение $\sqrt[3]{2}$ в виде корня:

а) шестой степени; б) девятой степени;
в) двенадцатой степени; г) восемнадцатой степени.

2.59. Представьте выражение $\sqrt{a}$ в виде корня:

а) четвертой степени; б) шестой степени;
в) десятой степени; г) шестнадцатой степени.

2.60. Представьте в виде корней одной и той же степени числа:

а) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{3}$ и $\sqrt[12]{7}$.

2.61. Представьте выражение в виде корня с меньшим показателем:

а) $\sqrt[6]{2^4}$; б) $\sqrt[15]{7^9}$; в) $\sqrt[8]{3^4}$; г) $\sqrt[24]{12^8}$;
д) $\sqrt[4]{25}$; е) $\sqrt[6]{81}$; ж) $\sqrt[6]{125}$; з) $\sqrt[12]{27}$.

2.62. Вычислите:

а) $\sqrt[6]{49^3}$; б) $\sqrt[6]{125^2}$; в) $\sqrt[100]{9^{50}}$; г) $\sqrt[24]{7^{48}}$.

2.63. Представьте в виде корня:

а) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{0{,}5}$; б) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{50}}{\sqrt{5}}$;

г) $\frac{\sqrt[10]{80}}{\sqrt[5]{4}}$; д) $\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[12]{3}$; е) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[4]{2}$.

2.64. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4}$; б) $\sqrt[7]{-5} \cdot \sqrt[14]{25}$; в) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8}$;

г) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3}$; д) $\frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; е) $\frac{\sqrt[8]{8^3} \cdot \sqrt[40]{8}}{\sqrt[5]{8^4}}$.

2.65. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}$;

г) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^{10}}}$; д) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{a}}$; е) $\sqrt[4]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.66 Вычислите:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{\sqrt[15]{2}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}}$.

2.67. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{(-17)^4}$; б) $\sqrt[5]{(-10)^5}$; в) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; г) $\sqrt[7]{(-13)^7}$.

2.68. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{a^4}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{b^6}$, если $b < 0$;

в) $\sqrt[4]{81m^4}$, если $m \geqslant 0$; г) $\sqrt[8]{\dfrac{c^8}{256}}$, если $c < 0$;

д) $-3\sqrt[4]{16b^4}$, если $b < 0$; е) $-2a\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{625}}$, если $a \geqslant 0$.

2.69. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt[7]{a^7}$; б) $-4\sqrt[3]{8a^3}$; в) $12a\sqrt[9]{-a^9}$; г) $5a^2\sqrt[5]{-32a^5}$.

2.70. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{x^4}-x$, если $x \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{x^6}-\sqrt[3]{x^3}$, если $x \leqslant 0$.

2.71. Упростите выражение $\sqrt[3]{343x^3}+\sqrt[4]{81x^4}-\sqrt{64x^2}$ и найдите его значение при $x = -0{,}5$.

2.72. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{a^{12}}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{8b^9}$; в) $\sqrt[4]{16m^8}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{c^{16}}{81}}$;

д) $-6\sqrt[4]{625b^{20}}$, если $b < 0$; е) $-8a\sqrt[6]{\dfrac{a^{18}}{64}}$, если $a \geqslant 0$.

2.73. Упростите выражение $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}a^4b^{12}}$, если a и b:

а) числа одного знака; б) числа разных знаков.

2.74. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-7)^4}$ при $a \geqslant 7$; б) $\sqrt[6]{(a+8)^6}$ при $a < -8$;

в) $\sqrt[8]{(y-3)^8}+\sqrt[4]{(y-5)^4}$ при $3 \leqslant y \leqslant 5$.

2.75*. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{120}-11\right)^4}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{120}+11\right)^4}$;

б) $\sqrt[6]{\left(4\sqrt{6}+10\right)^6}-\sqrt[6]{\left(4\sqrt{6}-10\right)^6}-20$.

Правообладатель Народная асвета

2.76. Вычислите с помощью свойства корня n-й степени из произведения:

а) $\sqrt[3]{27\cdot125}$; б) $\sqrt[4]{81\cdot256}$; в) $\sqrt[5]{243\cdot0{,}00001}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot343}$; д) $\sqrt[5]{32\cdot6^5}$; е) $\sqrt[3]{0{,}008\cdot27\cdot9^6}$.

2.77. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{3{,}2}\cdot\sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{6{,}25}\cdot\sqrt[4]{100}$;

г) $\sqrt[5]{24{,}3}\cdot\sqrt[5]{10}$; д) $\sqrt[4]{0{,}5}\cdot\sqrt[4]{0{,}125}$; е) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{-9}$.

2.78. Найдите значение выражения с помощью свойства корня n-й степени из частного:

а) $\sqrt[4]{\frac{16}{0{,}0081}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{27\,000}{0{,}008}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{0{,}00001}{32}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{625}{0{,}0016}}$.

2.79. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt[7]{256}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{1250}}{\sqrt[4]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{2000}}$.

2.80. Найдите значения выражений $\sqrt[3]{mn}$ и $\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$, если:

а) $m=125$, $n=0{,}027$; б) $m=10^6$, $n=2^3$.

2.81. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\frac{125\cdot343}{0{,}027}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{160\,000}{81\cdot625}}$.

2.82. Найдите значение выражения, используя свойства корня n-й степени:

а) $\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{27}$; в) $\sqrt[3]{-15}\cdot\sqrt[3]{225}$;

г) $\sqrt[5]{48}\cdot\sqrt[5]{162}$; д) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{40}}$; е) $\frac{\sqrt[4]{648}}{\sqrt[4]{128}}$.

2.83. Вычислите:

а) $7\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; б) $-2\sqrt[5]{9}\cdot5\sqrt[5]{27}$;

в) $8\sqrt[3]{10}\cdot\left(\sqrt[3]{-100}\right)$; г) $0{,}4\sqrt[4]{5}\cdot7\sqrt[4]{125}$.

2.84. Найдите значение выражения на основании свойств корня n-й степени:

а) $\sqrt[4]{175^2-168^2}$; б) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.85. Представьте выражение $\sqrt[4]{3}$ в виде корня:

а) восьмой степени;

б) двенадцатой степени;

в) шестнадцатой степени.

2.86. Представьте в виде корней одной и той же степени числа:

а) $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[10]{3}$; б) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[8]{7}$.

2.87. Представьте выражение в виде корня с меньшим показателем:

а) $\sqrt[12]{3^3}$; б) $\sqrt[8]{5^6}$; в) $\sqrt[4]{7^2}$; г) $\sqrt[12]{3^6}$; д) $\sqrt[6]{27}$; е) $\sqrt[15]{32}$.

2.88. Вычислите:

а) $\sqrt[8]{25^4}$; б) $\sqrt[12]{27^4}$; в) $\sqrt[30]{81^{15}}$; г) $\sqrt[16]{10^{32}}$.

2.89. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[6]{36}$; б) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[10]{4}$; в) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[12]{5}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$.

2.90. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{b}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{b}}$; в) $\sqrt{\sqrt[7]{b^2}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^6}}$.

2.91. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}\cdot\sqrt[9]{2^5}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}\cdot\sqrt[6]{3^5}$; в) $\dfrac{\sqrt[21]{5}}{\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}}}+\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{9}}$.

2.92. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[8]{(-19)^8}$; б) $\sqrt[3]{(-5)^3}$; в) $\sqrt[4]{(-2)^4}$; г) $\sqrt[5]{(-11)^5}$.

2.93. Упростите выражение:

а) $\sqrt[8]{m^8}$, если $m \geqslant 0$; б) $\sqrt[4]{c^4}$, если $c < 0$;

в) $\sqrt[6]{64x^6}$, если $x \geqslant 0$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{81}}$, если $a < 0$;

д) $-2\sqrt[4]{625y^4}$, если $y < 0$; е) $-3b\sqrt[8]{\dfrac{b^8}{256}}$, если $b \geqslant 0$.

2.94. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt[3]{x^3}$; б) $-2\sqrt[5]{32b^5}$; в) $10c\sqrt[11]{-c^{11}}$; г) $3y^5\sqrt[7]{-128y^7}$.

2.95. Упростите выражение $\sqrt[4]{625c^4}-\sqrt[5]{32c^5}+\sqrt{36c^2}$ и найдите его значение при $c=-\dfrac{1}{13}$.

Правообладатель Народная асвета

2.96. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{a^{18}}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{27m^6}$; в) $\sqrt[6]{64a^{12}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{a^{48}}{16}}$;

д) $-2\sqrt[4]{81b^{12}}$, если $b < 0$; е) $-8n\sqrt[8]{\dfrac{n^{24}}{256}}$, если $n \geqslant 0$.

2.97. Упростите выражение $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}m^8n^{20}}$, если:

а) $n \geqslant 0$; б) $n < 0$.

Объясните, почему знак значения данного выражения не зависит от знака переменной m.

2.98*. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-4)^4}$ при $a > 4$; б) $\sqrt[6]{(b+2)^6}$ при $b < -2$;

в) $\sqrt[8]{(3b+10,2)^8} - 10,2$ при $-3 \leqslant b \leqslant 3$.

2.99. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{3}{x+5} + 1 = \dfrac{4}{x^2 + 10x + 25}$.

2.100. Сравните значения выражений $\dfrac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}$.

2.101. Зная, что $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt{7b^2}$; в) $\sqrt{50a^6b^4}$; г) $\sqrt{\dfrac{49}{64}a^5b^2}$.

2.102. В выражении $a\sqrt{5}$ внесите множитель под знак корня, если:

а) $a \geqslant 0$; б) $a < 0$.

2.103. Сократите дробь $\dfrac{5a + 2 + 5ab + 2b}{2b - 2 + 5ab - 5a}$.

2.104. На рисунке 119 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-6; 6]$. Постройте график функции:

а) $y = f(x - 2)$; б) $y = f(x + 1)$;

в) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x) + 4$.

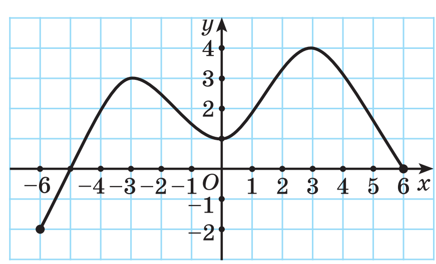


Рис. 119

2.105. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

Правообладатель Народная асвета

§ 15. Применение свойств корней n-й степени для преобразования выражений

2.106. Не извлекая корней, определите, какое из чисел больше: $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$?

2.107. Упростите выражение $\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + \sqrt{18} + 3\sqrt{2}$.

2.108. Докажите, что значение выражения $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ является рациональным числом.

Вынесение множителя за знак корня

При выполнении преобразований иррациональных выражений, содержащих корни n-й степени, подкоренные выражения раскладываются на множители, некоторые из которых представляют собой степень с показателем, равным показателю корня. Тогда можно выполнить действие, которое называется **вынесением множителя за знак корня.**

Вынесем множитель за знак корня в выражении $\sqrt[3]{54}$. Для этого число 54 представим в виде произведения двух множителей, один из которых является кубом некоторого выражения. Тогда $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$. В этом случае говорят, что множитель 3 вынесли за знак корня.

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3};$$

$$\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 3\sqrt[4]{2};$$

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$$

Чтобы вынести множитель за знак корня, нужно:

① Представить подкоренное выражение в виде произведения, содержащего степени выражений с показателем, равным показателю корня.	Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt[5]{160}$. ① $\sqrt[5]{160} = \sqrt[5]{32 \cdot 5} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 5}$.
② Применить свойство корня из произведения.	② $\sqrt[5]{2^5 \cdot 5} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{5}$.
③ Найти корень n-й степени из выражения в степени n.	③ $\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{5} = 2 \cdot \sqrt[5]{5}$.
④ Записать произведение полученного множителя и корня.	④ $\sqrt[5]{160} = 2\sqrt[5]{5}$.

Правообладатель Народная асвета

Внесение множителя под знак корня

При выполнении вычислений и преобразований, сравнении значений выражений иногда нужно выполнить действие, обратное действию вынесения множителя за знак корня. Оно называется **внесением множителя под знак корня.**

Внесем множитель 2 под знак корня в выражении $2\sqrt[3]{7}$.

$2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$.

В выражении $a\sqrt[4]{b}$, где $b > 0$, $a \neq 0$, внесем множитель a под знак корня:

Если $a > 0$, то

$$a\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4 \cdot b}.$$

Если $a < 0$, то

$$a\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{(-a)^4} \cdot \sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4 \cdot b}.$$

$$4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \sqrt[3]{192};$$

$$3\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = \sqrt[4]{405}$$

Чтобы внести множитель под знак корня, нужно:

① Представить неотрицательный множитель в виде корня n-й степени из n-й степени этого множителя. ② Произведение корней заменить корнем из произведения. ③ Записать корень из произведения.	Внесите множитель под знак корня в выражении $5\sqrt[4]{2}$. ① $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2}$; ② $\sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{625 \cdot 2}$; ③ $\sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{1250}$. $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1250}$.

Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени

Пример 1. Найдите сумму $\sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{686} - \sqrt[3]{128}$.

Решение. $\sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{686} - \sqrt[3]{128} =$

$= \sqrt[6]{2^2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 343} - \sqrt[3]{2 \cdot 64} = \sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} - 14\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = -12\sqrt[3]{2}$.

Пример 2. Упростите выражение $\left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$.

Решение. $\left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{2}\right)^2\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) =$

$= \left(\sqrt[4]{3^2} - \sqrt[4]{2^2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 = 1.$

Правообладатель Народная асвета

Пример 3. Разложите на множители $2\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{500}$.

Решение. $2\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{500} = 2\sqrt[3]{8\cdot 2}+\sqrt[6]{125\cdot 4} = 2\cdot 2\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{5^3\cdot 2^2} = 4\sqrt[3]{2}+$ $+\sqrt{5}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}\left(4+\sqrt{5}\right)$.

Пример 4.* Сократите дробь $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}}$.

Решение. $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}} = \dfrac{b\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{b\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{a\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} = \dfrac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a}}$.

Избавление от иррациональности в знаменателе дроби

Если в знаменателе дроби содержатся выражения с корнями, выполняют преобразования, которые приводят к дробям без выражений с корнями в знаменателе. Традиция такого преобразования корней, с одной стороны, связана с приближенными вычислениями, а с другой — с более удобным (рациональным) упрощением выражений.

Пример 5. Избавиться от корня в знаменателе дроби $\dfrac{3}{\sqrt[4]{8}}$.

Решение. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}} = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{2}$.

Пример 6.* Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{2}{\left(\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}$.

Решение. $\dfrac{2}{\left(\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{5}\right)}{\left(\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{5}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)} =$ $= 2\left(\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{5}\right)$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[5]{a^5b^2}$; б) $\sqrt[4]{a^4b^3}$ при $a<0$.

Решение. а) $\sqrt[5]{a^5b^2} = \sqrt[5]{a^5}\cdot\sqrt[5]{b^2} = a\sqrt[5]{b^2}$;

б) $\sqrt[4]{a^4b^3} = \sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b^3} = |a|\sqrt[4]{b^3} = -a\sqrt[4]{b^3}$, так как $a<0$.

Правообладатель Народная асвета

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $-2\sqrt[3]{2}$; б) $2a\sqrt[4]{-a}$.

Решение. а) $-2\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = -\sqrt[3]{2^4}$;

б) $2a\sqrt[4]{-a} = -(-2a)\sqrt[4]{-a} = -\sqrt[4]{(-2a)^4(-a)} = -\sqrt[4]{16(-a)^5} = -\sqrt[4]{-16a^5}$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$; б) $\left(2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{27}\right) \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} =$

$= 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$;

б) $\left(2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{27}\right) \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15} = 2\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15} =$

$= 2\sqrt[4]{15} - \sqrt[4]{81} - 2\sqrt[4]{15} = -\sqrt[4]{81} = -3$.

4. Выполните действия: $\left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}\right)\left(a + \sqrt{b}\right)$.

Решение. $\left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}\right)\left(a + \sqrt{b}\right) = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{b}\right)^2\right)\left(a + \sqrt{b}\right) =$

$= \left(a - \sqrt{b}\right)\left(a + \sqrt{b}\right) = a^2 - b$.

5. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt[6]{32} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt[6]{32} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{8 \cdot 4} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{2}{\sqrt[4]{125}}$.

Решение. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{125}} = \dfrac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}} = \dfrac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{625}} = \dfrac{2\sqrt[4]{5}}{5}$.

7. Упростите выражение $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}}$.

Решение. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}} = \dfrac{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}\right)} = \dfrac{2\sqrt[4]{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{2\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{2\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{7 - 3} = \dfrac{\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{2}$.

Правообладатель Народная асвета

Верно ли, что:

а) $b\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{b^2}$; б) $b\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{b^6}$; в) $b\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{b^{12}}$; г) $b\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{b^7}$?

2.109. Пользуясь алгоритмом, вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[3]{16}$; б) $\sqrt[3]{500}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[4]{810}$;

д) $\sqrt[4]{162}$; е) $\sqrt[5]{486}$; ж) $\sqrt[5]{700\,000}$; з) $\sqrt[7]{256}$.

2.110. Упростите выражение:

а) $16\sqrt[3]{24}$; б) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{54}$; в) $-0{,}5\sqrt[4]{48}$;

г) $\frac{\sqrt[5]{200\,000}}{5}$; д) $-\frac{5\sqrt[5]{96}}{6}$; е) $-\frac{\sqrt[7]{640}}{8}$.

2.111. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{7a^4}$; б) $\sqrt[6]{13b^{12}}$; в) $\sqrt[4]{32m^4n^{12}}$; г) $\sqrt[3]{27ck^6d^9}$.

2.112. Укажите несколько значений переменной, для которых верно равенство:

а) $\sqrt[4]{7k^4}=k\sqrt[4]{7}$; б) $\sqrt[6]{3p^6}=-p\sqrt[6]{3}$;

в) $\sqrt[8]{2m^{16}}=m^2\sqrt[8]{2}$; г) $\sqrt[5]{7a^{15}}=a^3\sqrt[5]{7}$.

2.113. Зная, что $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt[4]{2a^4}$; б) $\sqrt[6]{7b^6}$; в) $\sqrt[4]{32a^{12}b^8}$;

г) $\sqrt[8]{256a^{17}b^{16}}$; д) $\sqrt[10]{5a^{20}b^{40}}$; е) $\sqrt[8]{2a^{24}b^{40}}$.

2.114. Вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt[3]{5a^3}$; б) $\sqrt[3]{b^4}$; в) $\sqrt[5]{m^7}$;

г) $\sqrt[5]{x^5y^{16}}$; д) $\sqrt[5]{a^{11}b^6}$; е) $\sqrt[3]{-54m^5n^9}$.

2.115. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{625m^4n}$, если $m<0$;

б) $\sqrt[4]{162x^{12}y^5}$, если $x\leqslant 0$;

в) $\sqrt[6]{128a^{12}b^6}$, если $a>0$, $b<0$;

г) $\sqrt[6]{1\,000\,000c^7d^{13}}$, если $c<0$, $d<0$.

Правообладатель Народная асвета

2.116. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{a^5}$; б) $\sqrt[6]{-b^7}$; в) $\sqrt[4]{x^{13}y^{17}}$; г) $\sqrt[8]{-2m^{25}}$.

2.117. Пользуясь алгоритмом, внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $2\sqrt[4]{7}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$;

д) $0{,}25\sqrt[4]{320}$; е) $10\sqrt[5]{0{,}456}$; ж) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$; з) $2\sqrt[6]{0{,}25}$.

2.118. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{a}$; б) $2\sqrt[4]{5b}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27x}$;

г) $-3\sqrt[4]{m}$; д) $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{160n^5}$; е) $-0{,}2\sqrt[5]{100c}$.

2.119. В выражении $m\sqrt[4]{2}$ внесите множитель под знак корня, если:
а) $m \geqslant 0$; б) $m < 0$.

2.120. Внесите множитель под знак корня:

а) $(a+1)\sqrt[4]{3}$, если $a > -1$; б) $(b-3)\sqrt[6]{5}$, если $b \leqslant 3$;

в) $a\sqrt[7]{6}$; г) $b\sqrt[5]{b}$;

д) $m\sqrt[8]{m}$; е) $n\sqrt[4]{-n}$;

ж) $(x-1)\sqrt[8]{x-1}$; з) $(y-2)\sqrt[10]{2-y}$.

2.121. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}$.

2.122. Упростите выражение:

а) $2\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{3}$; б) $4\sqrt[5]{2} - 9\sqrt[5]{2}$; в) $6\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3}$;

г) $3\sqrt[6]{7} - \sqrt[6]{7}$; д) $7\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{6}$; е) $5\sqrt[8]{10} + 3\sqrt[8]{10} - 8\sqrt[8]{10}$.

2.123. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $7\sqrt[3]{2}$ и $3\sqrt[3]{2}$; б) $-5\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[4]{3}$; в) $-\sqrt[5]{7}$ и $\sqrt[5]{7}$.

2.124. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3}$; б) $5\sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{384}$;

в) $3\sqrt[5]{64} - 4\sqrt[5]{486}$; г) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}$;

д) $\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40}$; е) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + 0{,}1\sqrt[3]{2000}$.

2.125. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{32}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27}\right)^2$;

Правообладатель Народная асвета

в) $\left(\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{6}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{45}\right)^2$.

Верно ли, что значение выражения является рациональным числом?

2.126. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt[3]{4}$; б) $3\sqrt[5]{3}\cdot\left(4\sqrt[5]{729}+\sqrt[5]{3}\right)$;

в) $\left(7\sqrt[7]{2}-4\sqrt[7]{256}\right):\sqrt[7]{2}$; г) $\left(\sqrt[3]{135}+2\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{40}\right):\left(2\sqrt[3]{5}\right)$.

2.127. Выполните действия:

а) $\sqrt[3]{24}+\sqrt{50}-\sqrt[3]{3}-\sqrt{72}+\sqrt{8}$; б) $6\sqrt[4]{5}+\sqrt{20}-\sqrt{180}-\sqrt[8]{25}+3\sqrt{500}$.

2.128. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{24}+5\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}}$.

2.129. Периметр прямоугольника равен $12\sqrt[4]{2}$ см, а одна из его сторон равна $3\sqrt[4]{2}$ см. Найдите площадь прямоугольника.

2.130. Площадь полной поверхности куба равна $\sqrt[3]{432}$ см^2. Найдите объем куба.

2.131. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}+\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[3]{25}}}{\sqrt[6]{25\cdot\sqrt{5}}}$.

2.132. Примените формулу разности квадратов и вычислите:

а) $\left(1+\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt[4]{7}\right)\left(1-\sqrt[4]{7}\right)$; б) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{17}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{17}\right)$;

в) $\left(25+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt[4]{3}\right)\left(5-\sqrt[4]{3}\right)$; г) $\left(\sqrt[4]{36}+1\right)\left(\sqrt[8]{36}+1\right)\left(\sqrt[8]{36}-1\right)$.

2.133. Найдите значение выражения $\left(1+\sqrt[6]{a}\right)\left(\sqrt[6]{a}-1\right)$ при $a=27$.

2.134. Выполните действия:

а) $\left(x^2+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt[4]{y}\right)\left(x+\sqrt[4]{y}\right)$; б) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$.

2.135. При $a=\sqrt[4]{5}-1$ найдите значение выражения:

а) $(a+1)^2$; б) a^2+2a.

2.136. Найдите значение выражения $m^2-10m+9$ при $m=\sqrt[4]{49}+5$.

2.137. Разложите на множители выражение:

а) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[3]{3}-3$; в) $\sqrt[4]{5}-15$; г) $\sqrt[4]{45}+\sqrt{3}$.

Правообладатель Народная асвета

2.138. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\sqrt[4]{2x} - \sqrt[4]{3y} + \sqrt[4]{2y} - \sqrt[4]{3x}$;

б) $\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}$.

2.139. Разложите на множители сумму:

а) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{a} - 6$; б) $\sqrt[5]{x} + 8\sqrt[10]{x} + 12$;

в) $\sqrt{n} - 4\sqrt[4]{n} + 3$; г) $2\sqrt[3]{m} - 5\sqrt[6]{m} + 2$.

2.140. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{11} - 11}{\sqrt[3]{11}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{3 + \sqrt[4]{3}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{5} + 1}{\sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{3}}$; г) $\dfrac{2 - \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162} - 6}$.

2.141. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{10a} - \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{4a} - \sqrt[3]{6}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{14} - \sqrt[4]{21b}}{\sqrt[4]{7b} - \sqrt[4]{14}}$; в) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{ab}}{\sqrt[5]{b^2} - \sqrt[5]{ab}}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x^2y}}$.

2.142. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4-3\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)^2}$; б) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24} + \sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}$.

2.143. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt[4]{a} + 1}$; б) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt[12]{x} + 3}{\sqrt[6]{x} - 9}$; г) $\dfrac{m - \sqrt[4]{m^7}}{\sqrt{m} - \sqrt[4]{m}}$.

2.144. Примените формулы сокращенного умножения и сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n}}{4\sqrt[3]{n^2} + 4\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{m^2}}$.

2.145. Верно ли, что значение выражения является иррациональным числом:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3}\right)^2}$; б) $\dfrac{\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45}\right)^2}{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}$?

2.146. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\dfrac{30}{\sqrt[3]{15}}$.

2.147. Упростите выражение:

а) $\dfrac{20}{\sqrt[3]{25}} + \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[5]{2} - \dfrac{24}{\sqrt[5]{16}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.148. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$; б)* $\dfrac{7}{\sqrt[4]{5}-\sqrt{3}}$.

2.149. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$; б)* $\dfrac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{101}+10\right)^2}}{\sqrt[3]{10-\sqrt{101}}}+10$.

2.150. Пользуясь алгоритмом, вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[3]{432}$; в) $\sqrt[4]{48}$; г) $\sqrt[4]{160}$;

д) $\sqrt[4]{324}$; е) $\sqrt[5]{160}$; ж) $\sqrt[5]{500\,000}$; з) $\sqrt[7]{384}$.

2.151. Упростите выражение:

а) $7\sqrt[3]{16}$; б) $0{,}3\sqrt[3]{500}$; в) $-5\sqrt[4]{80}$;

г) $\dfrac{\sqrt[5]{900\,000}}{2}$; д) $-\dfrac{7\sqrt[5]{486}}{3}$; е) $-\dfrac{\sqrt[7]{256}}{4}$.

2.152. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{3b^4}$; б) $\sqrt[6]{17a^{12}}$; в) $\sqrt[4]{162k^8p^4}$; г) $\sqrt[3]{8xy^9z^6}$.

2.153. Зная, что $m \leqslant 0$, $n \geqslant 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt[4]{5n^4}$; б) $\sqrt[6]{7m^6}$; в) $\sqrt[4]{48m^8n^{12}}$;

г) $\sqrt[6]{3m^6n^{13}}$; д) $\sqrt[8]{2m^{16}n^{32}}$; е) $\sqrt[10]{5m^{30}n^{50}}$.

2.154. Вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt[3]{7b^3}$; б) $\sqrt[3]{a^5}$; в) $\sqrt[5]{n^6}$;

г) $\sqrt[5]{a^5b^{18}}$; д) $\sqrt[5]{m^{12}n^7}$; е) $\sqrt[3]{-108x^7y^{10}}$.

2.155. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{16a^4b}$, если $a > 0$; б) $\sqrt[4]{32m^{12}n^{13}}$, если $m \leqslant 0$;

в) $\sqrt[6]{729x^{13}y^{19}}$, если $x < 0$, $y < 0$.

2.156. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt[4]{3x^9}$; б) $\sqrt[6]{-y^{13}}$; в) $\sqrt[8]{a^{25}b^{16}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.157. Пользуясь алгоритмом, внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt[3]{2}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $3\sqrt[4]{5}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}$;

д) $0{,}3\sqrt[4]{100}$; е) $10\sqrt[5]{0{,}0251}$; ж) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{486}$; з) $0{,}1\sqrt[6]{7000000}$.

2.158. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt[4]{x}$; б) $\frac{1}{5}\sqrt[4]{1250y}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54b}$; г) $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{128b^5}$.

2.159. В выражении $k\sqrt[6]{3}$ внесите множитель под знак корня, если:
а) $k > 0$; б) $k \leqslant 0$.

2.160. Внесите множитель под знак корня:

а) $n\sqrt[4]{2}$, если $n \geqslant 0$; б) $m\sqrt[8]{7}$, если $m < 0$; в) $c\sqrt[3]{2}$;

г) $k\sqrt[5]{k}$; д) $x\sqrt[6]{x}$; е) $(a-b)\sqrt[4]{b-a}$.

2.161. Упростите выражение:

а) $\sqrt{b\sqrt[5]{b}}$; б) $\sqrt[5]{b\sqrt[4]{b}}$.

2.162. Упростите выражение:

а) $5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}$; б) $6\sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{3}$;

в) $8\sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{6}$; г) $9\sqrt[6]{5} + 4\sqrt[6]{5} - 14\sqrt[6]{5}$.

2.163. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $6\sqrt[3]{3}$ и $4\sqrt[3]{3}$; б) $-3\sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[4]{2}$; в) $-2\sqrt[5]{6}$ и $2\sqrt[5]{6}$.

2.164. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}$; б) $4\sqrt[5]{729} - \sqrt[5]{3}$; в) $5\sqrt[7]{2} - 2\sqrt[7]{256}$;

г) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375}$; д) $\sqrt[3]{135} + 2\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{625}$; е) $\sqrt[3]{128} + 5\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54}$.

2.165. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{3}\right)^2$.

2.166. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3}\right) \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $4\sqrt[4]{2} \cdot \left(\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}\right)$;

в) $\left(2\sqrt[7]{3} - 3\sqrt[7]{384}\right) : \sqrt[7]{3}$; г) $\left(2\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128}\right) : \left(5\sqrt[3]{2}\right)$.

2.167. Выполните действия:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}}$; б) $\dfrac{2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.168. Периметр прямоугольника равен $16\sqrt[6]{3}$ см, а одна из его сторон равна $2\sqrt[6]{3}$ см. Найдите площадь прямоугольника.

2.169. Объем куба равен $5\sqrt{5}$ см^3. Найдите площадь полной поверхности куба.

2.170. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{-3\sqrt{3}} + \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[10]{3}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{49}}}{\sqrt[6]{49 \cdot \sqrt{7}}}$.

2.171. Примените формулу разности квадратов и вычислите:

а) $\left(4 + \sqrt{5}\right)\left(2 + \sqrt[4]{5}\right)\left(2 - \sqrt[4]{5}\right)$; б) $\left(\sqrt{10} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{10} + \sqrt[4]{3}\right)$.

2.172. Выполните действия:

а) $\left(1 + \sqrt{a}\right)\left(1 - \sqrt[4]{a}\right)\left(1 + \sqrt[4]{a}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt{m} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}\right)$.

2.173. Разложите на множители:

а) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{54}$; б) $\sqrt[3]{2} + 2$; в) $\sqrt[4]{6} - 12$; г) $\sqrt[4]{50} + \sqrt{5}$.

2.174. Представьте в виде произведения:

а) $\sqrt[5]{7a} - \sqrt[5]{2b} + \sqrt[5]{7b} - \sqrt[5]{2a}$; б) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 4$.

2.175. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{6} - 6}{\sqrt[3]{6}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{2} + 1}{\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt[5]{64} - 2}{\sqrt[5]{4}}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{3} - 3}{6 - \sqrt[4]{48}}$.

2.176. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{12x} - \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{18x} - \sqrt[3]{6}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{m^3} - \sqrt[4]{m^2n}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{m}}$.

2.177. Примените формулу разности квадратов и сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{m} - 1}{\sqrt{m} - 1}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{x^6} - 4}{\sqrt[5]{x^3} - 2}$; в) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}}$; г) $\dfrac{\sqrt{m} - n}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{m}}$.

2.178. Примените формулы сокращенного умножения и сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ab^2} + b}{\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{b} - 2a\sqrt[4]{a^2b} + a^3}{a\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}}$.

2.179. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$; в) $\dfrac{16}{\sqrt[4]{2}}$; г) $\dfrac{21}{\sqrt[3]{7}}$.

2.180. Упростите выражение:

а) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{4}} + 2\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[5]{3} - \dfrac{15}{\sqrt[5]{81}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.181. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{14}{\left(\sqrt[4]{10}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)}$; б)* $\dfrac{12}{\sqrt[4]{5}-1}$.

2.182. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{2}}$; б)* $\dfrac{\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{35}-6}}+\sqrt{35}$.

2.183. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $g(x) = 1 - x^2$ равно:

а) 0; б) 0,19; в) 1.

2.184. Для функции $h(x)=\sqrt{9-2x}$ найдите, если это возможно:

а) $h(0)$; б) $h(2{,}5)$; в) $h(-20)$; г) $h(5)$.

2.185. Найдите, во сколько раз и на сколько порядков число $1{,}2 \cdot 10^{10}$ больше числа $3 \cdot 10^7$.

2.186. Решите уравнение $1-\dfrac{2x^2-x-45}{5-x}=0$.

2.187. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2.188. Используйте метод интервалов и решите неравенство:

а) $(x+2)(x+5)^2(2x-7) \leqslant 0$; б) $(x^2-6x+5)(x^2-1) \geqslant 0$.

§ 16. Свойства и график функции $y=\sqrt[n]{x}$ $(n > 1,\ n \in N)$

2.189. Выберите точку, принадлежащую графику функции $y=\sqrt{x}$:

а) (3; 9); б) (16; 4); в) (9; –3); г) (16; –4).

2.190. Найдите область определения функции $y=\sqrt{(x-5)(-x-3)}$.

2.191. Множеством значений функции $y=2\sqrt{x}+5$ является промежуток:

а) $(0;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $[5;\ +\infty)$; г) $(0;\ 5)$; д) $(5;\ +\infty)$.

Выберите правильный ответ.

Правообладатель Народная асвета

Зависимость, при которой каждому неотрицательному числу ставится в соответствие значение корня заданной четной степени, задает функцию $y = \sqrt[n]{x}$, где n — четное число.

Действительно, по свойствам арифметического корня существует единственный арифметический корень четной степени из неотрицательного числа, значит, каждому неотрицательному x соответствует единственное значение $y = \sqrt[n]{x}$.

При $n = 2$ функция принимает вид $y = \sqrt{x}$, свойства которой рассматривались в 8-м классе.

Для любого действительного числа существует единственный корень нечетной степени (по свойствам корня нечетной степени).

Рассмотрим свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ для четных и нечетных показателей корня.

Функция $y = \sqrt[2k]{x}$, где $k \in N$

1. Область определения функции. По свойству арифметического корня $D = [0; +\infty)$.

2. Множество значений функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. По определению арифметического корня из числа: $y \geqslant 0$ и $y^{2k} = x$. По свойству степени с натуральным показателем для любого $y \in [0; +\infty)$ существует значение $y^{2k} = x$, $x \geqslant 0$, т. е. множеством значений функции $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in N$, является множество неотрицательных чисел: $E(y) = [0; +\infty)$.

При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение $y = 0$. Наибольшего значения у функции не существует.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $\sqrt[2k]{x} = 0$, при $x = 0$, то значение $x = 0$ является единственным нулем функции.

4. Промежутки знакопостоянства функции. $y > 0$ при всех $x \in (0; +\infty)$.

5. Промежутки монотонности функции. Функция возрастает на всей области определения.

Действительно, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $\sqrt[2k]{x_1} < \sqrt[2k]{x_2}$. В противном случае $\sqrt[2k]{x_1} \geqslant \sqrt[2k]{x_2}$ или $\left(\sqrt[2k]{x_1}\right)^{2k} \geqslant \left(\sqrt[2k]{x_2}\right)^{2k}$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$. Противоречие доказывает утверждение.

6. Четность (нечетность) функции. Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то функция не является четной и не является нечетной.

Правообладатель Народная асвета

7. График функции. Графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ при $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ изображены на рисунке 120.

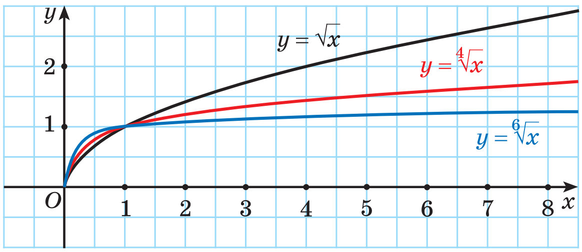


Рис. 120

Функция $y = \sqrt[2k+1]{x}$, где $k \in N$

1. Область определения функции. По свойству корня нечетной степени $D = (-\infty; +\infty)$.

2. Множество значений функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. По определению корня $y^{2k+1} = x$. По свойству степени с натуральным показателем для любого $y \in (-\infty; +\infty)$ существует x. Таким образом, множеством значений функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$, где $k \in N$, является множество всех действительных чисел: $E = (-\infty; +\infty)$.

Наибольшего и наименьшего значений у функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$ не существует.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $\sqrt[2k+1]{x} = 0$, при $x = 0$, то значение $x = 0$ является единственным нулем функции.

4. Промежутки знакопостоянства функции. $y > 0$, если $x \in (0; +\infty)$; $y < 0$, если $x \in (-\infty; 0)$.

5. Промежутки монотонности функции. Функция возрастает на всей области определения.

Если $x_1 < x_2$, то $\sqrt[2k+1]{x_1} < \sqrt[2k+1]{x_2}$. В противном случае $\sqrt[2k+1]{x_1} \geqslant \sqrt[2k+1]{x_2}$ или $\left(\sqrt[2k+1]{x_1}\right)^{2k+1} \geqslant \left(\sqrt[2k+1]{x_2}\right)^{2k+1}$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$. Противоречие доказывает утверждение.

6. Четность (нечетность) функции. Так как область определения функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$ симметрична относительно начала координат и $y(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -y(x)$, то функция является нечетной. Ее график симметричен относительно начала координат.

Правообладатель Народная асвета

7. График функции. Графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ при $n = 3$, $n = 5$ изображены на рисунке 121.

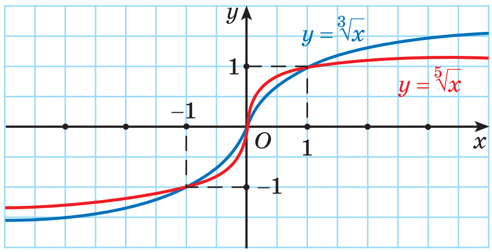


Рис. 121

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[6]{2x^2 - 3x + 1}$; б) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1}$.

Решение. а) Так как область определения корня четной степени есть множество неотрицательных чисел, то подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Решим неравенство $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$, получим $x \in (-\infty; 0{,}5] \cup [1; +\infty)$. $D = (-\infty; 0{,}5] \cup [1; +\infty)$.

б) Так как область определения корня нечетной степени есть множество всех действительных чисел, то подкоренное выражение может принимать любые значения при $x \in (-\infty; +\infty)$. $D = (-\infty; +\infty)$.

2. Найдите множество значений функции:

а) $h(x) = 2\sqrt[8]{x} + 3$; б) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 7$.

Решение. а) Множеством значений функции $y = \sqrt[8]{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, т. е. $\sqrt[8]{x} \geqslant 0$. По свойству неравенств: $2\sqrt[8]{x} \geqslant 0$, $2\sqrt[8]{x} + 3 \geqslant 3$, значит, $E(h) = [3; +\infty)$.

б) Множеством значений функции $y = \sqrt[5]{x}$ является множество всех действительных чисел $(-\infty; +\infty)$. Значит, и множеством значений функции $f(x) = \sqrt[5]{x} - 7$ является множество всех действительных чисел, т. е. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

3. Определите наименьшее значение функции $f(x) = 3\sqrt[6]{x} + 7$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. Так как функция $y=\sqrt[n]{x}$ для четных n имеет наименьшее значение, равное нулю, при $x=0$, то $3\sqrt[6]{x}\geqslant 0$, а $3\sqrt[6]{x}+7\geqslant 7$. Следовательно, наименьшее значение данной функции равно 7 и достигается при $x=0$.

4. Найдите нули функции:

а) $y=\sqrt[6]{2x^2-3x+1}$; б) $y=\sqrt[7]{2-x^2}$.

Решение. а) Так как значение корня n-й степени равно нулю, если его подкоренное выражение равно нулю, то решим уравнение $2x^2-3x+1=0$. Его корни $x=1$ и $x=0{,}5$ являются нулями функции $y=\sqrt[6]{2x^2-3x+1}$.

б) Так как значение корня n-й степени равно нулю, если его подкоренное выражение равно нулю, то решим уравнение $2-x^2=0$. Его корни $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$ являются нулями функции $y=\sqrt[7]{2-x^2}$.

5. Какие значения принимает функция на указанных промежутках:

а) $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $x\in[1;\,32]$; б) $g(x)=\sqrt[12]{x}$, $x\in[-2;\,2]$;

в) $h(x)=\sqrt[12]{|x|}$, $x\in[-2;\,2]$; г) $p(x)=\sqrt[3]{|x|}$, $x\in(-\infty;\,+\infty)$?

Решение. а) Так как $\sqrt[5]{x}\geqslant 0$ для $[0;\,+\infty)$, то $f(x)$ принимает положительные значения для $x\in[1;\,32]$.

б) Так как $D(\sqrt[12]{x})=[0;\,+\infty)$, то функция $g(x)$ не определена для отрицательных значений x из промежутка $[-2;\,2]$.

в) Так как $|x|\geqslant 0$, то функция $h(x)=\sqrt[12]{|x|}$ принимает неотрицательные значения для $x\in[-2;\,2]$.

г) Так как $|x|\geqslant 0$, то функция $p(x)=\sqrt[3]{|x|}$ принимает неотрицательные значения для $x\in(-\infty;\,+\infty)$.

6. Расположите числа $\sqrt{6}$; $2\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{15}$ в порядке возрастания.

Решение. Запишем числа $\sqrt{6}$; $2\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{15}$ в виде корней с одинаковыми показателями:

$$\sqrt{6}=\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{216};\quad 2\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{2^6\cdot 3}=\sqrt[6]{192};\quad \sqrt[3]{15}=\sqrt[6]{15^2}=\sqrt[6]{225}.$$

Правообладатель Народная асвета

Поскольку функция $f(x) = \sqrt[6]{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, то $\sqrt[6]{192} < \sqrt[6]{216} < \sqrt[6]{225}$, значит, $2\sqrt[6]{3} < \sqrt{6} < \sqrt[3]{15}$.

7. Какой (четной или нечетной) является функция:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; б) $g(x) = \sqrt[12]{x}$;

в) $h(x) = \sqrt[12]{|x|}$; г) $p(x) = \sqrt[3]{|x|}$?

Решение. а) Функция $f(x) = \sqrt[5]{x}$ является нечетной, так как $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном n есть нечетная функция.

б) Функция $g(x) = \sqrt[12]{x}$ ни четная, ни нечетная, так как $y = \sqrt[n]{x}$ при четном n не является четной и не является нечетной функцией.

в) Так как область определения функции $h(x) = \sqrt[12]{|x|}$ есть множество всех действительных чисел и $h(-x) = h(x)$, то функция четная.

г) Так как область определения функции $p(x) = \sqrt[3]{|x|}$ есть множество всех действительных чисел и $p(-x) = p(x)$, то функция четная.

8. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sqrt[4]{x} + 2$; б) $f(x) = \sqrt[4]{x+2}$.

Решение. а) График функции $f(x) = \sqrt[4]{x} + 2$ получается из графика функции $y = \sqrt[4]{x}$ сдвигом на 2 единицы вверх вдоль оси ординат (рис. 122).

б) График функции $f(x) = \sqrt[4]{x+2}$ получается из графика функции $y = \sqrt[4]{x}$ сдвигом на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс (см. рис. 122).

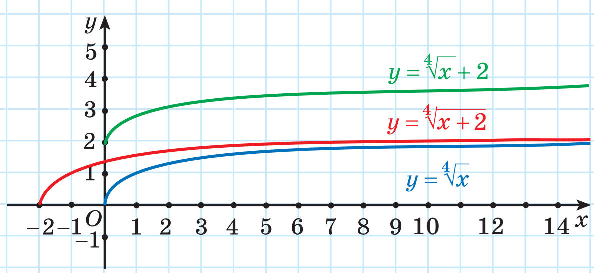


Рис. 122

9. Постройте график функции:

а) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$; б) $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) График функции $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ получается из графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ сдвигом на 2 единицы вниз вдоль оси ординат (рис. 123).

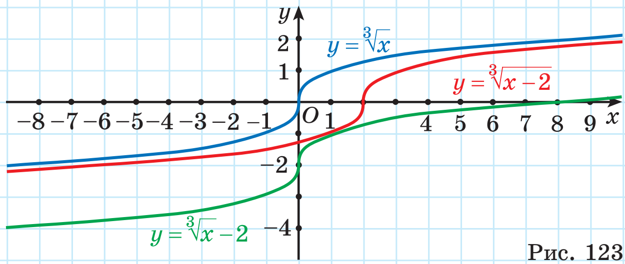


Рис. 123

б) График функции $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ получается из графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ сдвигом на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс (см. рис. 123).

Выберите значения переменной, входящие в область определения функции $y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$:

а) 7,2; б) –14; в) $1 - \sqrt{2}$; г) $\sqrt{5} - 2$.

2.192. Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ найдите: $f(0)$; $f(1)$; $f(-8)$; $f\left(\frac{1}{216}\right)$; $f\left(-3\sqrt{3}\right)$.

2.193. Найдите значение функции $g(x) = \sqrt[4]{x-1}$ при значении аргумента, равном: 1; 2; $1\frac{1}{16}$; 82; 1,0625; 10.

2.194. Из чисел 3; -2; $\sqrt{3} - 2$; $5\sqrt[5]{5}$; $1 - \sqrt{7}$; 0 выберите числа, не принадлежащие области определения функции $y = \sqrt[10]{x}$.

2.195. Для функции $f(x) = \sqrt[6]{x}$ найдите значение аргумента, при котором значение функции равно: 0; 1; $\frac{1}{2}$; $\sqrt[6]{7}$; $\sqrt[3]{2}$.

2.196. Может ли функция $y = f(x)$ принимать значение, равное –15, если:

а) $f(x) = \sqrt[8]{x}$; б) $f(x) = \sqrt[5]{x}$?

2.197. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = \sqrt[4]{x}$:

а) $A(16;\ 2)$; б) $B\left(\frac{1}{81};\ \frac{1}{3}\right)$; в) $C(-1;\ 1)$;

Правообладатель Народная асвета

г) $D(0{,}0001;\ 0{,}1)$; д) $E(625;\ -5)$; е) $F\left(3;\ \sqrt[4]{3}\right)$.

Укажите еще какие-либо две точки, принадлежащие графику функции $y = \sqrt[4]{x}$.

2.198. Дана функция $y = \sqrt[n]{x}$. Найдите n, если известно, что график данной функции проходит через точку:

а) $A\left(-\frac{1}{32};\ -\frac{1}{2}\right)$; б) $B(0{,}0081;\ 0{,}3)$; в) $C\left(7\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right)$.

2.199. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt[4]{2 - 7x}$; б) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[5]{5 - 6x}}$;

в) $f(x) = \frac{8}{\sqrt[6]{2x^2 - 5x + 2}}$; г) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x - 1}{x - 5}}$.

2.200. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x - 1}}{\sqrt[4]{x - 5}}$; б) $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt[7]{10 - x}} + \sqrt[6]{x + 4}$;

в) $f(x) = \sqrt[6]{x^2 - 3x + 2} + \sqrt[10]{4 - x^2}$; г) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x - 4}}{\sqrt[4]{x^2 - 49}}$;

д) $f(x) = \sqrt[6]{x^2(x - 1)(x + 2)}$; е) $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 25x^2} - \sqrt{5x - x^2}$.

Укажите наименьшее целое значение аргумента из области определения этой функции, если оно существует.

2.201. Найдите множество значений функции:

а) $y = \sqrt[4]{x} + 5$; б) $y = -\sqrt[8]{x} - 4$; в) $y = \sqrt[5]{x} - 6$; г) $y = -4\sqrt[6]{x} + 5$.

2.202. Найдите наименьшее значение функции:

а) $f(x) = \sqrt[6]{x} - 4$; б) $f(x) = \sqrt[4]{x - 7} + 12$;

в) $f(x) = \sqrt[10]{2x - 7} - 3$; г) $f(x) = 3\sqrt[8]{x} + 5$.

2.203. Найдите нули функции:

а) $f(x) = \sqrt[4]{3x - 4}$; б) $f(x) = \sqrt[7]{8 - 5x}$;

в) $f(x) = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}$; г) $f(x) = \sqrt[5]{36 - x^2}$.

2.204. Верно ли, что:

а) функция $f(x) = \sqrt[6]{x}$ на промежутке $[7;\ +\infty)$ принимает положительные значения;

Правообладатель Народная асвета

б) функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на промежутке [–11; –1] принимает отрицательные значения;

в) функция $f(x)=\sqrt[10]{x}$ на промежутке [0; 7] принимает только положительные значения;

г) функция $f(x)=\sqrt[7]{x}$ принимает отрицательные значения при любых $x<0$?

2.205. Дана функция $f(x)=\sqrt[n]{x}$. Сравните:

а) $f(6)$ и $f(11)$; б) $f(29{,}18)$ и $f(31{,}9)$.

2.206. Используйте свойство монотонности функции $f(x)=\sqrt[n]{x}$ и сравните числа:

а) $\sqrt[3]{2{,}3}$ и $\sqrt[3]{2{,}9}$; б) $\sqrt[7]{-17}$ и $\sqrt[7]{-13}$; в) 3 и $\sqrt[4]{79}$;

г) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[6]{28}$; д) $\sqrt[15]{65}$ и $\sqrt[5]{4}$; е) $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$.

2.207. Найдите два последовательных целых числа, между которыми на координатной прямой находится число:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{7}$; в) $\sqrt[4]{19}$;

г) $\sqrt[3]{29}$; д) $-\sqrt[4]{83}$; е) $-\sqrt[3]{123}$.

2.208. Найдите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

а) 2 и $\sqrt[3]{129}$; б) $\sqrt[5]{-37}$ и $\sqrt[6]{71}$.

2.209. Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[9]{11}$ и $\sqrt[6]{5}$; в) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$; г) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{26}}$.

2.210. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[12]{3}$ и $\sqrt[4]{8}$;

в) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[5]{\sqrt[3]{30}}$; г) $\sqrt[15]{125}$, $\sqrt[5]{6}$ и $\sqrt[6]{4\sqrt[5]{4}}$.

2.211. Определите, какие из данных функций являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x)=\sqrt[4]{x}$; б) $f(x)=\sqrt[15]{x}$; в) $f(x)=\sqrt[8]{|x|-1}$; г) $f(x)=\sqrt[9]{|x|+2}$.

Каким свойством обладает график нечетной функции?

Правообладатель Народная асвета

2.212. Постройте график функции:

а) $g(x)=\sqrt[4]{x}$; б) $g(x)=-\sqrt[4]{x}$; в) $g(x)=\sqrt[4]{x+2}$;

г) $g(x)=\sqrt[4]{x}+2$; д) $g(x)=\sqrt[4]{x-1}-3$; е)* $g(x)=\sqrt[4]{|x|}$.

2.213. Постройте график функции:

а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; б) $f(x)=-\sqrt[3]{x}$; в) $f(x)=\sqrt[3]{x-3}$;

г) $f(x)=\sqrt[3]{x}-3$; д) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}+1$; е)* $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$.

2.214. Выберите прямые, которые пересекает график функции $h(x)=\sqrt[6]{x}$:

а) $y=3x$; б) $y=-x+2$; в) $y=2x+5$; г) $y=-4x-3$.

2.215. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y=\sqrt[4]{x}$ и $y=\frac{32}{x}$; б) $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=\frac{x}{4}$.

2.216*. Даны функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ и $g(x)=\sqrt{x}$. Найдите значение выражения:

а) $f(g(64))$; б) $g(f(0{,}000001))$.

2.217. Найдите значение функции $h(x)=\sqrt[6]{x}$ при значении аргумента, равном: 0; 1; 27; $\frac{1}{64}$; 0,000001.

2.218. Для функции $g(x)=\sqrt[5]{x}+2$ найдите: $g(1)$; $g(-1)$; $g(0{,}00243)$; $g\left(\frac{1}{32}\right)$; $g\left(-25\sqrt{5}\right)$.

2.219. Для функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ найдите значение аргумента, при котором: $f(x)=1$; $f(x)=-2$; $f(x)=\frac{1}{3}$; $f(x)=-\sqrt[3]{11}$.

2.220. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y=\sqrt[4]{x}$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(16;\ -2)$; в) $C(-10\ 000;\ 10)$; г) $D(0{,}0625;\ 0{,}5)$.

2.221. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt[6]{8-3x}$; б) $f(x)=\frac{2}{\sqrt[7]{2x+3}}$;

в) $f(x)=\frac{10}{\sqrt[4]{3x^2+10x+3}}$; г) $f(x)=\sqrt[8]{\frac{x+3}{x-6}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.222. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x+8}}{\sqrt[6]{3-x}}$; б) $f(x) = \dfrac{x+5}{\sqrt[3]{3-x}} + \sqrt[4]{x+7}$;

в) $f(x) = \sqrt[8]{x^2 - 4x + 3} + \sqrt[4]{9 - x^2}$.

2.223. Найдите множество значений функции:

а) $y = \sqrt[6]{x} + 7$; б) $y = -\sqrt[4]{x} + 3$;

в) $y = \sqrt[3]{x} + 2$; г) $y = 3\sqrt[8]{x} - 6$.

Существует ли наименьшее значение этой функции?

2.224. Найдите наименьшее значение функции:

а) $f(x) = \sqrt[8]{x} + 2$; б) $f(x) = \sqrt[6]{x+7} - 10$;

в) $f(x) = \sqrt[8]{x-1} - 63$; г) $f(x) = 4\sqrt[10]{x} - 7$.

2.225. Найдите нули функции:

а) $f(x) = \sqrt[6]{2 - 7x}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{7x + 1}$;

в) $f(x) = \sqrt[4]{2x^2 - 5x + 2}$; г) $f(x) = \sqrt[7]{3x^2 + x}$.

2.226. Верно ли, что: а) функция $f(x) = \sqrt[8]{x}$ на промежутке $[-3; 0]$ принимает положительные значения; б) функция $f(x) = \sqrt[5]{x}$ принимает положительные значения при любых $x > 0$?

2.227. Пользуясь свойством монотонности функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, сравните числа:

а) $\sqrt[5]{1{,}8}$ и $\sqrt[5]{1{,}6}$; б) $\sqrt[3]{-19}$ и $\sqrt[3]{-23}$; в) 2 и $\sqrt[3]{7}$;

г) $\sqrt[4]{15}$ и 2; д) $\sqrt[3]{28}$ и 3; е) $\sqrt[15]{31}$ и $\sqrt[3]{2}$.

2.228. Найдите два последовательных целых числа, между которыми на координатной прямой находится число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{23}$; в) $\sqrt[4]{629}$; г) $-\sqrt[5]{41}$.

2.229. Найдите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

а) -3 и $\sqrt[4]{89}$; б) $\sqrt[7]{-131}$ и $\sqrt[4]{79}$.

2.230. Сравните числа:

а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[12]{12}$ и $\sqrt[8]{5}$;

в) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[5]{\sqrt{247}}$; г) $\sqrt[10]{7}$ и $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.231. Расположите в порядке убывания числа:

а) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{10}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{30}}$.

2.232. Определите, какие из данных функций являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x) = \sqrt[8]{x}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

в) $f(x) = \sqrt[4]{|x| - 9}$; г) $f(x) = \sqrt[7]{|x| + 13}$.

Каким свойством обладает график четной функции?

2.233. Постройте график функции:

а) $g(x) = \sqrt[4]{x - 3}$; б) $g(x) = \sqrt[4]{x} - 1$; в) $g(x) = \sqrt[4]{x + 2} + 4$.

2.234. Постройте график функции:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$; в) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - 3$.

2.235. Определите, пересекаются ли график функции $y = \sqrt[8]{x}$ и прямая:

а) $y = 1$; б) $y = \frac{1}{2}$; в) $y = -7$; г) $y = \sqrt[8]{13}$.

Если да, то найдите координаты точки пересечения.

2.236. В одной системе координат постройте графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x$, найдите координаты их общих точек.

2.237. Найдите значение выражения $6^{-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} - 5^{-1} \cdot 25$.

2.238. Из данных уравнений выберите все уравнения, равносильные уравнению $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = 0$:

а) $5x - 10 = 0$; б) $x^2 - x + 7 = 0$;

в) $3(x - 1) + 6 = 7x - 4(x + 2)$; г) $\frac{x}{x + 1} = 0$;

д) $x^2 + 9 = 0$.

2.239. При $a = -3$ не имеет смысла выражение:

а) $\sqrt{a + 3}$; б) $\sqrt{3 - a}$; в) $\sqrt{a - 3}$; г) $\sqrt{-a - 3}$.

Выберите правильный ответ.

2.240. Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -1$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$.

Правообладатель Народная асвета

§ 17. Иррациональные уравнения

2.241. Решите неравенство:
а) $-x \leqslant -1$; б) $x^2 \leqslant 1$.

2.242. Выберите пару равносильных уравнений:
а) $x^2 = x$ и $x - 1 = 0$; б) $x + 1 = 1$ и $(x + 1)^2 = 1$;
в) $x^2 + 1 = 0$ и $2x - 3 = 2x + 5$.

Уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называются **иррациональными.**

При решении иррациональных уравнений не всегда удается от данного уравнения перейти к равносильному ему уравнению.

Например, решим уравнение $\sqrt{x+2} = -x$ $(A = B)$.

Первый способ. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $2 + x = x^2$ $\left(A^2 = B^2\right)$. Оно имеет корни -1 и 2. Очевидно, что число 2 не является корнем данного уравнения, так как $\sqrt{2+2} \neq -2$, а число -1 — корень данного уравнения, так как равенство $\sqrt{-1+2} = -(-1)$ является верным.

Посторонний корень уравнения (число 2) появился оттого, что уравнение $A^2 = B^2$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B, \end{array}\right.$ которая может иметь больше решений, чем данное уравнение $A = B$. Поэтому после возведения обеих частей уравнения в четную степень без дополнительных условий следует выполнять проверку полученных корней.

Второй способ. Уравнение $\sqrt{x+2} = -x$ равносильно системе $\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x + 2 = x^2. \end{cases}$ Действительно, обе части уравнения неотрицательны, поэтому при возведении в квадрат получим:

$$\sqrt{x+2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Третий способ. Запишем уравнение $\sqrt{x+2} = -x$ в виде $\sqrt{x+2} + x = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+2} + x$. Эта функция возрастает на области определения, значит, данное уравнение не может иметь больше одного корня. Анализируя условие, заметим, что корень должен быть от-

Правообладатель Народная асвета

рицательным и не превосходить по модулю число 2. Корнем данного уравнения является число –1.

Рассмотрим некоторые виды иррациональных уравнений и методы их решения.

1. Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = a,\ n \in N$

Если $a \geqslant 0$, то $f(x) = a^{2n}$, если $a < 0$, то корней нет.

$\sqrt[2n]{f(x)} = a,\ n \in N$ Если $a \geqslant 0$, то $f(x) = a^{2n}$, если $a < 0$, то корней нет

Пример 1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{x} = 3$;

б) $\sqrt[16]{x^7 - 11} = -3$;

в) $\sqrt{x^2 - 12} = 2$.

Решение. а) $\sqrt[4]{x} = 3;\ x = 3^4;\ x = 81$.

б) $\sqrt[16]{x^7 - 11} = -3$, так как $-3 < 0$, то уравнение не имеет корней.

в) $\sqrt{x^2 - 12} = 2;\ x^2 - 12 = 4;\ x^2 = 16;\ x = -4,\ x = 4$.

Ответ: а) 81; б) нет корней; в) –4; 4.

2. Уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a,\ n \in N$

Уравнение $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a,\ n \in N$ равносильно уравнению $f(x) = a^{2n+1}$.

$\sqrt[2n+1]{f(x)} = a,\ n \in N$ $f(x) = a^{2n+1}$

Пример 2. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} = 5$;

б) $\sqrt[3]{x - 7} + 2 = 0$.

Решение. а) $\sqrt[3]{x} = 5;\ x = 5^3;\ x = 125$.

б) $\sqrt[3]{x - 7} + 2 = 0;\ \sqrt[3]{x - 7} = -2;\ x - 7 = -8;\ x = -1$.

Ответ: а) 125; б) –1.

3. Уравнение вида $\sqrt[m]{f(x)} = g(x),\ m \in N, m > 1$

Пусть m — четное число.

Рассмотрим способы решения уравнения вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x),\ n \in N$.

П е р в ы й с п о с о б. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Правообладатель Народная асвета

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{2-x}=x$.

Решение. $\sqrt{2-x}=x$; $\begin{cases}2-x=x^2,\\x\geqslant 0;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+x-2=0,\\x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=1,\end{array}\right.\\x\geqslant 0;\end{cases}$ $x=1$. *Ответ*: 1.

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x),\ n\in N$$
$$\begin{cases}f(x)=\left(g(x)\right)^{2n},\\g(x)\geqslant 0\end{cases}$$

Второй способ. Уравнение данного вида можно решить, возведя обе части уравнения в степень $2n$ с последующей проверкой корней.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{x}=x-2$.

Решение. $\sqrt{x}=x-2$; $x=(x-2)^2$; $x=x^2-4x+4$; $x^2-5x+4=0$; $\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=4.\end{array}\right.$

Проверка: при $x=1$ равенство $\sqrt{1}=1-2$ неверное; при $x=4$ равенство $\sqrt{4}=4-2$ верное. *Ответ*: 4.

Если m — нечетное число, то уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$, $x\in N$, равносильно уравнению $f(x)=\left(g(x)\right)^{2n+1}$.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt[7]{2x^7-1}=x$.
Решение.

$\sqrt[7]{2x^7-1}=x$; $2x^7-1=x^7$; $x^7=1$; $x=1$.

Ответ: 1.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x),\ n\in N$$
$$f(x)=\left(g(x)\right)^{2n+1}$$

4. Уравнение вида $\sqrt[m]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$, $m\in N$, $m>1$

Пусть m — четное число.

Рассмотрим способы решения уравнения вида $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$, $n\in N$.
Первый способ. Данное уравнение равносильно одной из систем

$\begin{cases}f(x)=g(x),\\f(x)\geqslant 0\end{cases}$ или $\begin{cases}f(x)=g(x),\\g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

Пример 6. Решите уравнение
$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}$.
Решение.

$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{x}\iff\begin{cases}x^2+x-1=x,\\x\geqslant 0;\end{cases}$

$$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)},\ n\in N$$
$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\f(x)\geqslant 0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}f(x)=g(x),\\g(x)\geqslant 0\end{cases}$$

Правообладатель Народная асвета

$\begin{cases} x^2 = 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $x = 1.$

Ответ: 1.

Второй способ. Уравнение этого вида можно решить, возведя обе части уравнения в степень $2n$ с последующей проверкой корней.

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$.

Решение. $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$; $2x - 3 = x - 2$; $x = 1$.

Проверка: при $x = 1$ выражения в левой и правой частях равенства $\sqrt{2 \cdot 1 - 3} = \sqrt{1-2}$ не имеют смысла, т. е. исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Если m — нечетное число, то уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $n \in N$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt[9]{2x^2 - 5} = \sqrt[9]{x^2 - 4}$.

Решение.

$$\sqrt[9]{2x^2-5} = \sqrt[9]{x^2-4} \Leftrightarrow 2x^2 - 5 = x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)}, \ n \in N$$

$$f(x) = g(x)$$

Ответ: -1; 1.

5. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$

Первый способ. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$ можно решить, возведя обе части уравнения в квадрат дважды с последующей проверкой найденных корней.

Пример 9. Решите уравнение $2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} = 15$.

Решение. Перенесем одно из слагаемых в правую часть, для того чтобы сократить преобразования.

$2\sqrt{x+18} = 15 - \sqrt{4x-3}$;

$4(x+18) = 225 - 30\sqrt{4x-3} + 4x - 3$;

$-150 = -30\sqrt{4x-3}$; $5 = \sqrt{4x-3}$;

$25 = 4x - 3$; $x = 7$.

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$$

$$\left(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}\right)^2 = a^2$$

Проверка

Правообладатель Народная асвета

Проверка: $2\sqrt{7+18}+\sqrt{4\cdot 7-3}=15;\ 2\cdot 5+5=15;\ 15=15$. Значит, значение $x = 7$ является корнем уравнения.

Ответ: 7.

Второй способ. Некоторые уравнения этого вида можно решить, используя свойства функций.

Пример 10. Решите уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}=4$.

Решение. Функция $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}$ возрастает на всей области определения, поэтому, если данное уравнение имеет корень, то только один.

При $x = 4$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство: $\sqrt{4-3}+\sqrt{4+5}=4$. Значит, число 4 является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: 4.

Метод замены переменной

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt[4]{x+1}+20=\sqrt{x+1}$.

Решение. Пусть $t=\sqrt[4]{x+1}$, тогда $t^2=\sqrt{x+1}$ и уравнение принимает вид

$$t+20=t^2;\ t^2-t-20=0;\ \left[\begin{array}{l} t=5, \\ t=-4; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x+1}=5, \\ \sqrt[4]{x+1}=-4. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней.

Тогда $\sqrt[4]{x+1}=5;\ x+1=625;\ x=624$.

Ответ: 624.

*Пример 12**. Решите уравнение $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

Решение. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6;$

$$x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$$

Пусть $\sqrt{x^2+5x+2}=t$, тогда $t^2=x^2+5x+2$ и уравнение принимает вид $t^2+2-3t=6;\ t^2-3t-4=0;\ \left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=-1. \end{array}\right.$ Так как $t \geqslant 0$, то $t = 4$, т. е. $\sqrt{x^2+5x+2}=4;\ x^2+5x+2=16;\ x^2+5x-14=0;\ \left[\begin{array}{l} x=-7, \\ x=2. \end{array}\right.$

Ответ: -7; 2.

Правообладатель Народная асвета

Примеры основных заданий и их решения

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt[6]{x-1}=2$; б) $\sqrt[8]{2x+4}+1=0$; в) $\sqrt[8]{3x-5}=0$.

Решение. а) $\sqrt[6]{x-1}=2$; $x-1=2^6$; $x-1=64$; $x=65$.

Ответ: 65.

б) $\sqrt[8]{2x+4}+1=0$; $\sqrt[8]{2x+4}=-1$, так как $-1<0$, то уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

в) $\sqrt[8]{3x-5}=0$; $3x-5=0$; $x=1\frac{2}{3}$.

Ответ: $x=1\frac{2}{3}$.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^2+2}=3$; б) $\sqrt[5]{7x-3}+1=0$; в) $\sqrt[7]{x^2-4}=0$.

Решение. а) $\sqrt[3]{x^2+2}=3$; $x^2+2=3^3$; $x^2+2=27$; $x^2-25=0$; $\left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-5. \end{array}\right.$

Ответ: -5; 5.

б) $\sqrt[5]{7x-3}+1=0$; $\sqrt[5]{7x-3}=-1$; $7x-3=(-1)^5$; $7x-3=-1$; $x=\frac{2}{7}$.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

в) $\sqrt[7]{x^2-4}=0$; $x^2-4=0$; $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$

Ответ: -2; 2.

3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; б) $\sqrt{5-x^2}=1-x$;

в) $\sqrt[5]{x^5-2x+1}-x=0$.

Решение. а) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+1=(2x-1)^2, \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0, \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3; \end{array}\right. \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

Правообладатель Народная асвета

б) Возведем обе части уравнения в квадрат и получим:
$5 - x^2 = (1 - x)^2$; $5 - x^2 = 1 - 2x + x^2$; $2x^2 - 2x - 4 = 0$;
$x^2 - x - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Проверка: при $x = -1$ получим: $\sqrt{5-(-1)^2} = 1-(-1)$; $\sqrt{4} = 2$ — верное равенство, значит, $x = -1$ — корень данного уравнения.

При $x = 2$ имеем: $\sqrt{5-2^2} = 1-2$; $\sqrt{1} = -1$ — неверное равенство, значит, $x = 2$ не является корнем данного уравнения.

Ответ: -1.

в) $\sqrt[5]{x^5-2x+1} - x = 0$; $\sqrt[5]{x^5-2x+1} = x$; $x^5-2x+1 = x^5$;
$-2x + 1 = 0$; $x = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2+x-3} = \sqrt{1-2x}$; б) $\sqrt{x^2+2x-2} = \sqrt{x}$;

в) $\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{-x-2}$.

Решение. а) $\sqrt{x^2+x-3} = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3 = 1-2x, \\ 1-2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 = 0, \\ x \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

Ответ: -4.

б) Возведем обе части уравнения в квадрат и получим:
$x^2+2x-2 = x$; $x^2+x-2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Проверка: при $x = 1$ получим: $\sqrt{1^2+2\cdot1-2} = \sqrt{1}$, $1 = 1$ — верно, значит, $x = 1$ — корень данного уравнения. При $x = -2$ выражение $\sqrt{-2}$ не имеет смысла, т. е. $x = -2$ не является корнем данного уравнения.

Ответ: 1.

в) $\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{-x-2}$; $2x+1 = -x-2$; $x = -1$.

Ответ: -1.

5. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} = 1$; б) $\sqrt{5x+21} + \sqrt{3x+28} = 5$.

Правообладатель Народная асвета

Решение. а) Запишем уравнение в виде $\sqrt{x} = \sqrt{x-5}+1$ и возведем обе части полученного уравнения в квадрат: $x = x-5+1+2\sqrt{x-5}$; $2\sqrt{x-5} = 4$; $\sqrt{x-5} = 2$; $x - 5 = 4$; $x = 9$. С помощью проверки убедимся, что $x = 9$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 9.

б) Функция $y = \sqrt{5x+21}+\sqrt{3x+28}$ возрастает на всей области определения, поэтому если данное уравнение имеет корень, то только один.

При $x = -4$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство: $\sqrt{-20+21}+\sqrt{-12+28} = 5$. Значит, число -4 является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: -4.

6. Решите уравнение $\sqrt[3]{3-2x} = 10 - 3\sqrt[6]{3-2x}$.

Решение. Пусть $t = \sqrt[6]{3-2x}$, тогда $t^2 = \sqrt[3]{3-2x}$ и исходное уравнение принимает вид $t^2 = 10 - 3t$; $t^2 + 3t - 10 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt[6]{3-2x} = 2, \\ \sqrt[6]{3-2x} = -5. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней. Тогда $\sqrt[6]{3-2x} = 2$; $3-2x = 64$; $x = -30{,}5$.

Ответ: $-30{,}5$.

?

1. Какие из уравнений не имеют корней:

а) $\sqrt{2-x} = -3$; б) $\sqrt[3]{2-x} = -3$; в) $\sqrt[6]{2-x} = -\sqrt{x}$; г) $\sqrt[7]{2+x} = -\sqrt[7]{x}$?

2. Выберите систему, равносильную уравнению вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$:

а) $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^{2n}, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

2.243. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{x} = 2$; б) $\sqrt[5]{x} = -1$; в) $\sqrt[6]{x-4} = 1$;

г) $\sqrt[7]{x+5} = 2$; д) $\sqrt[8]{2x-1} = -3$; е) $\sqrt[3]{4x-1} = 0$.

Правообладатель Народная асвета

2.244. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt{4x-1}=5$; б) $\sqrt[3]{8x-31}=-3$; в) $\sqrt{8x-1}-3=0$;

г) $1+\sqrt[3]{7-x}=0$; д) $2\sqrt[4]{-3x-2}=1$; е) $5\sqrt[5]{9-2x}=10$.

2.245. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^2-31}=-3$; б) $\sqrt[4]{x^2-6x+16}=2$;

в) $\sqrt{3x^2-x-15}=3$; г) $\sqrt{16x^2+16x+29}=5$;

д) $\sqrt{23+3x-5x^2}=3$; е) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$.

2.246. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt[4]{2x+7}$ и $y=4$; б) $y=\sqrt[3]{x^2-15x+6}$ и $y=-2$.

2.247. Решите уравнение:

а) $0{,}5\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=2$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2-x}+9}}{3}=1$;

в) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$; г) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}-3=0$.

2.248. Решите уравнение двумя способами:

а) $\sqrt{x+2}=x-4$; б) $\sqrt{3-2x}=-x$; в) $\sqrt{x+2}-3x=4$.

2.249. Найдите значения переменной, при которых равны значения выражений:

а) $\sqrt{x-2}$ и $x-2$; б) $\sqrt{20-x}$ и $-10-x$; в) $x+2$ и $2\sqrt{x+5}$.

2.250. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt{2x^2-3x-10}$ и $y=x$; б) $y=\sqrt{2x^2+5x+4}$ и $y=2x+2$;

в) $y=\sqrt{8-3x-x^2}$ и $y=-x-2$.

2.251. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^3-x^2+4}=x$; б) $\sqrt[5]{2-7x-x^5}=-x$;

в) $\sqrt[3]{x^3+x^2-5x+4}=x$.

2.252. Найдите нули функции:

а) $y=\sqrt{12-x}-x$; б) $y=\sqrt{1+4x-x^2}-x+1$;

в) $y=\sqrt{3x^2-3x+21}-x+5$.

2.253. Верно ли, что равносильны уравнения:

а) $\sqrt{5x+4}=\sqrt{2x-5}$ и $5x+4=2x-5$;

Правообладатель Народная асвета

б) $\sqrt[3]{x^2-5x+1}=\sqrt[3]{x-4}$ и $x^2-5x+1=x-4$;

в) $\sqrt[4]{x^2+x-3}=\sqrt[4]{1-2x}$ и $x^2+x-3=1-2x$?

2.254. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x+5}=\sqrt{4x+1}$; б) $\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{8-x}$;

в) $\sqrt[4]{2x-3}=2\sqrt[4]{x+3}$; г) $\sqrt{x^2-36}-\sqrt{2x-1}=0$;

д) $\sqrt{x^2+4x-16}=\sqrt{2x-1}$; е) $\sqrt[8]{x^2-4x+5}=\sqrt[8]{x-1}$.

2.255. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt{6x^2-3x-1}$ и $y=\sqrt{2x-1}$;

б) $y=\sqrt{6x^2+2x-10}$ и $y=\sqrt{x^2-x-2}$.

2.256. Решите двумя способами уравнение $\sqrt[10]{-x^2-13x-9}=\sqrt[10]{-7x-9}$.

2.257. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$; б) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$;

в) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1$; г) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x+5}=5$;

д) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2}$; е) $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}=\sqrt{3}$.

Для решения каких уравнений рационально применять функциональный подход?

2.258. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$; б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

в) $2\sqrt{x-1}=8-\sqrt{x-6}$; г) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{1-x}=3$.

2.259. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}$ и прямой $y=3$;

б) $y=3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}$ и прямой $y=7$.

2.260. Решите уравнение с помощью метода замены переменной:

а) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-6=0$; б) $\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}=6$;

в) $\sqrt{x+3}-3\sqrt[4]{x+3}+2=0$; г) $\sqrt[3]{x+15}-\sqrt[6]{x+15}=2$;

д) $x^2+7+\sqrt{x^2+7}=20$; е) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}=12$.

2.261. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x-2}}=4{,}25$; б) $\sqrt{x^2+x+3}+1=\dfrac{12}{\sqrt{x^2+x+3}}$.

Правообладатель Народная асвета

2.262. Верно ли, что равносильны уравнения $\sqrt{3-x}\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$ и $\sqrt{(3-x)(2-x)}=\sqrt{2}$?

2.263. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-5}=2$; б) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$; г) $\frac{2}{\sqrt{2-x}}=\frac{\sqrt{x+6}}{x+4}$.

2.264*. Решите уравнение $(x-3)(x-2)-4\sqrt{x^2-5x+1}=10$.

2.265. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x+4}=7$; б) $2\sqrt[3]{x+8}-1=0$;

в) $\sqrt[5]{4-x^2}=-2$; г) $\sqrt[4]{x^2-3x+81}=3$;

д) $\sqrt{2x^2-5x+11}=3$; е) $\sqrt[4]{4x^2+6x-2}=2$;

ж) $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$; з) $\sqrt{9x^2-12x+85}=9$.

2.266. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt[6]{5-3x}$ и $y=2$; б) $y=\sqrt[5]{4x-x^2}$ и $y=-2$.

2.267. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-2}=8-x$; б) $\sqrt{x-3}=x-3$; в) $\sqrt{x-2}+4=x$;

г) $\sqrt{5-4x}+5=4x$; д) $x-1=\sqrt{x+5}$; е) $\sqrt{8-x}=-12-x$.

2.268. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt{3x^2-11x-20}$ и $y=x-5$; б) $y=\sqrt{2x^2-x+1}$ и $y=x+3$.

2.269. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{8x^3+x^2-9}=2x$; б) $\sqrt[7]{9-4x-x^7}=-x$.

2.270. Найдите нули функции:

а) $y=\sqrt{x+3}-x+3$; б) $y=\sqrt{2x^2-7x+5}+x-1$.

2.271. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$; б) $\sqrt[5]{7-2x}=\sqrt[5]{x+3}$;

в) $\sqrt[4]{2x+7}=3\sqrt[4]{x+1}$; г) $\sqrt{x^2-16}-\sqrt{14+x}=0$;

д) $\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}$; е) $\sqrt[6]{x^2+x-3}=\sqrt[6]{1-2x}$.

Правообладатель Народная асвета

2.272. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y = \sqrt{7x^2 + x - 2}$ и $y = \sqrt{7x - 2}$;

б) $y = \sqrt{3x^2 + 4x - 14}$ и $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

2.273. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$; б) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$;

в) $2\sqrt{3x+2} - \sqrt{6x} = 2$; г) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 1$.

2.274. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x+5} = 5$; б) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$;

в) $\sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{x-2}$; г) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

2.275. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y = \sqrt{5x+1} + \sqrt{7-x}$ и прямой $y = 6$.

2.276. Решите уравнение с помощью метода замены переменной:

а) $\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 12 = 0$; б) $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} = 3$;

в) $\sqrt{x-7} - 5\sqrt[4]{x-7} + 4 = 0$; г) $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3} = 2$;

д) $x^2 - 12 - 2\sqrt{x^2 - 12} = 8$; е) $x^2 + 5x = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} - 4$.

2.277. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{\dfrac{3x}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{3x}} = \dfrac{5}{2}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-7}} + \sqrt[3]{\dfrac{x-7}{x}} = \dfrac{10}{3}$.

2.278. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{x+1} = 6$; б) $\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{x-2} = x - 1$;

в) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{2x+6}$.

2.279. Функция $f(x)$ задана формулой $f(x) = x^2 - 4x$. Найдите: $f(2)$; $f(-2)$; $f(0)$; $f(0{,}5)$.

2.280. Решите неравенство $\dfrac{8x+3}{16} - \dfrac{2x-5}{3} \geqslant \dfrac{11-7x}{12}$.

2.281. Вычислите:

а) $\cos\dfrac{7\pi}{4}$; б) $\sin\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{9\pi}{4}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{23\pi}{3}\right)$.

2.282. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 4, \\ x + y = 6. \end{cases}$

Правообладатель Народная асвета

2.283. Сократите дробь $\dfrac{x^2 - 2x - 35}{25 - x^2}$.

2.284. Приведите к стандартному виду $\left(2\frac{1}{2}a^4b^8\right)^2 \cdot \left(-1\frac{2}{7}a^5b^{12}\right)$.

2.285. Используйте метод замены переменной и решите уравнение $4(x-7)^4 + 3(x-7)^2 - 1 = 0$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать и уметь применять определение корня n-й степени из числа;
- знать и уметь применять определение арифметического корня n-й степени из числа;
- знать и уметь применять свойства корней n-й степени из числа;
- уметь строить графики функций $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n > 1$ и выполнять их преобразования;
- уметь решать иррациональные уравнения;
- владеть различными способами анализа и моделирования учебных и практических ситуаций.

Я проверяю свои знания

1. Среди данных выражений выберите выражения, имеющие смысл:

а) $\sqrt[8]{2}$; б) $\sqrt[6]{-11}$; в) $\sqrt[5]{7}$; г) $\sqrt[3]{-5}$; д) $\sqrt[10]{0}$; е) $\sqrt[9]{-1}$.

2. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке 124:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = 3x$; г) $y = \dfrac{3}{x}$.

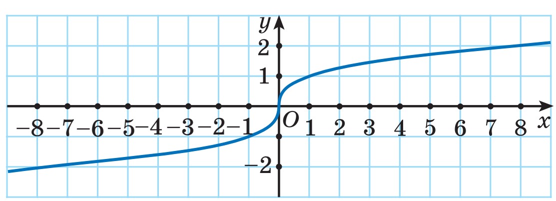


Рис. 124

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{32}} + \sqrt[4]{1}$;

Правообладатель Народная асвета

в) $\sqrt[7]{128} : \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt[3]{0{,}008} - \left(\sqrt[4]{3}\right)^4$.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{2x+1} = 3$; б) $\sqrt[5]{-2x-5} = -1$;

в) $\sqrt[6]{x^2 - 2x + 61} = 2$; г) $\sqrt[3]{x^2 - x - 131} = -5$.

5. Сравните числа:

а) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[10]{29}$ и $\sqrt[5]{3\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ и $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$; б) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x-1}$;

в) $\sqrt{2x+4} - \sqrt{7-x} = 3$; г) $2\sqrt{x-2} - \sqrt[4]{x-2} = 15$.

7. Упростите выражение:

а) $\left(0{,}8\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{y}\right)^2 - \left(0{,}8\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{y}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y}\right) + 4\sqrt[8]{y^7} : \sqrt[8]{y^3}$.

8. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt[8]{x^2 - 9x + 8}$; б) $f(x) = \sqrt[4]{3 - 8x} + \frac{7}{\sqrt[5]{x+1}}$;

в) $f(x) = \sqrt[8]{x+5} - \frac{9}{\sqrt[4]{9-7x}}$; г) $f(x) = \sqrt[10]{25 - x^2} + \sqrt[6]{x^2 - 6x + 5}$.

9. Внесите множитель под знак корня:

а) $2a\sqrt[6]{-a}$; б) $-m\sqrt[5]{m^3}$;

в) $-y\sqrt[6]{-y^7}$; г) $(y-2)\sqrt[4]{4-2y}$.

10. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 4 - 3x - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.

Дополнительные материалы к учебному пособию «Алгебра, 10» можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика. 10 класс».

Правообладатель Народная асвета

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 18. Определение производной функции

3.1. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Двигаясь без остановок с постоянной скоростью, они встретились через 30 ч после выхода. Сколько времени затратил на прохождение пути AB каждый поезд, если известно, что первый прибыл в город B на 25 ч позже, чем второй прибыл в город A?

3.2. Две бригады, работая вместе, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3 : 2?

3.3. Уборку урожая с участка начал один комбайн. Через 2 ч к нему присоединился другой комбайн, и через 8 ч совместной работы они убрали 80 % урожая. За сколько часов мог бы убрать урожай с участка каждый комбайн в отдельности, если известно, что одному на это необходимо на 5 ч больше, чем другому?

В задачах на процессы (движения, работы, планирования и т. д.), как правило, скорость рассматриваемого процесса предполагается постоянной на всем указанном в условии задачи промежутке времени.

Формула, выражающая связь между s (пройденным путем) и t (временем движения) при постоянной скорости движения (v) имеет вид $s = vt$.

Эта зависимость s от t линейная, ее график удобно изображать в системе координат (рис. 125): горизонтальная ось — ось времени (t), вертикальная ось — ось пройденного пути (s).

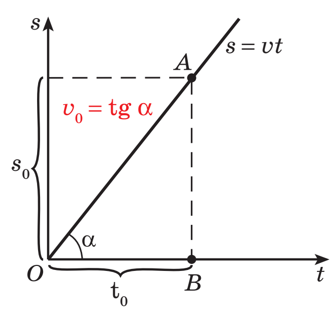


Рис. 125

Графиком линейной зависимости $s = vt$ является прямая.

Заметим, что пройденный путь (s_0) численно равен длине отрезка AB, время t_0 численно равно длине отрезка OB. Из прямоугольного треугольника OAB отношение катета, противолежащего острому углу α, к прилежащему катету равно тангенсу угла α, то есть

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{s_0}{t_0} = v_0.$$

Таким образом, делением пройденного пути на затраченное на этот путь время находится v_0 — средняя скорость.

Правообладатель Народная асвета

Тангенс угла α равен численному значению скорости протекания процесса, а угол наклона прямой OA к оси абсцисс характеризует скорость процесса движения.

В реальных процессах скорость движения (других процессов) не является постоянной даже на небольшом промежутке времени. В физике рассматривается как понятие **средней скорости**, модуль которой равен отношению модуля перемещения ко всему времени перемещения, так и **мгновенной скорости**.

Рассмотрим алгоритм вычисления этих величин.

Пусть функция $s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени — задана графически (рис. 126).

① Выберем t_0 — начальный момент времени.

② Найдем $s(t_0)$ — расстояние (пройденный путь) в момент t_0 от начала отсчета.

③ Выберем Δt — некоторый промежуток времени.

④ Получим $t_0 + \Delta t$ — новый момент времени.

⑤ Отметим $s(t_0 + \Delta t)$ — расстояние в момент времени $t_0 + \Delta t$ от начала отсчета.

⑥ Найдем Δs — расстояние, пройденное за промежуток времени Δt:

$$\Delta s = s\left(t_0 + \Delta t\right) - s\left(t_0\right).$$

⑦ Найдем **среднюю скорость** движения на промежутке Δt:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

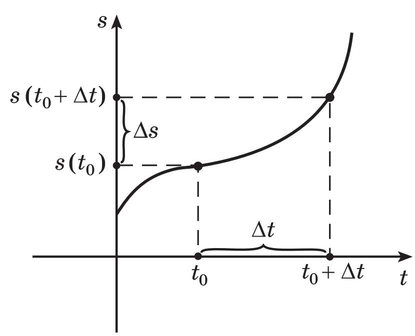


Рис. 126

⑧ Если промежуток Δt бесконечно уменьшается, говорят «стремится к нулю» ($\Delta t \to 0$), то средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ стремится к **мгновенной скорости** ($v_{\text{ср}} \to v_{\text{мгн}}$).

Мгновенная скорость фиксируется при движении автомобиля на трассе с помощью приборов фиксации скорости, например радара.

По аналогии со средней и мгновенной скоростями процесса движения в математике рассматриваются средняя и мгновенная скорости изменения различных функций.

Для вычисления значений этих величин рассмотрим, как изменяется значение функции при переходе от одного значения аргумента к другому, иначе говоря, найдем **приращение функции**.

Правообладатель Народная асвета

Для того чтобы вычислить приращение функции $y = f(x)$, нужно:

① Выбрать некоторое значение аргумента x_0 — первоначальное значение аргумента.

② Найти $f(x_0)$ — первоначальное значение функции.

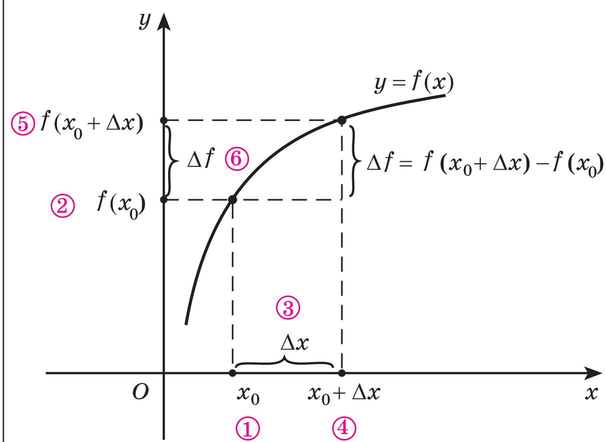
③ Изменить значение аргумента, для этого выбрать Δx — приращение аргумента.

④ Получить $x_0 + \Delta x$ — наращенное значение аргумента.

⑤ Найти наращенное значение функции $f(x_0 + \Delta x)$.

⑥ Найти приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Проиллюстрируем этапы нахождения приращения функции на графике.



Например, используя алгоритм, найдем приращение функции $f(x) = x^2$ при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$.

① Выберем некоторое значение аргумента x_0 — первоначальное значение аргумента.

② Найдем $f(x_0)$ — первоначальное значение функции: $f(x_0) = x_0^2$.

③ Изменим значение аргумента. Выберем Δx — приращение аргумента.

④ Получим $x_0 + \Delta x$ — наращенное значение аргумента.

⑤ Найдем наращенное значение функции:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

⑥ Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Пример 1. Найдите значение приращения функции $f(x) = x^2$, если:

а) $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,5$; б) $x_0 = 2$; $\Delta x = 0,5$;
в) $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,1$; г) $x_0 = -1$; $\Delta x = 0,1$.

Решение. Подставим данные значения x_0 и Δx в найденное выражение $\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$ для $f(x) = x^2$.

Правообладатель Народная асвета

а) При $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}5$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 = 1{,}25;$$

б) при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}5$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 2 + 0{,}25 = 2{,}25;$$

в) при $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}21;$$

г) при $x_0 = -1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получим

$$\Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = -0{,}2 + 0{,}01 = -0{,}19.$$

Заметим, что приращение функции зависит от первоначального значения аргумента и от приращения аргумента.

Для функции $f(x) = x^2$ найдем отношение приращения функции к приращению аргумента при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Пусть Δx бесконечно уменьшается, т. е. Δx стремится к нулю, тогда отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ стремится к $2x_0$ $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x_0 \text{ при } \Delta x \to 0\right)$, которое уже не зависит от приращения Δx.

При $x_0 = 2$ это число равно 4, при $x_0 = 1$ это число равно 2 и т. д.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке называется число, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$ при приращении аргумента (Δx), стремящемся к нулю.

Производная функции обозначается $f'(x)$ и читается «эф штрих от x».

Поскольку для функции $f(x) = x^2$ отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$ стремится к $2x_0$ при Δx, стремящемся к нулю, то производная этой функции в точке x_0 равна $2x_0$.

Можно записать $(x^2)' = 2x$ (так как x_0 — произвольная точка, то индекс в обозначении $2x_0$ можно опустить). Производная при данном значении x есть число. Если производная данной функции существует для каждого x из некоторого промежутка, то она является функцией от x.

Правообладатель Народная асвета

Для того чтобы найти производную функции $y = f(x)$, нужно:

① Найти приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$. ② Найти $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — отношение приращения функции к приращению аргумента. ③ Найти производную функции $f'(x_0)$ — число, к которому стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что Δx стремится к нулю.	Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$. ① $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$; $f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$, тогда $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$; $\Delta f = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$. ② $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} : \Delta x = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \Delta x}$. ③ При $\Delta x \to 0$ получим, что $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -\frac{1}{x_0^2}$. Таким образом, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Пример 2. Найдите производную функции $f(x) = 5x - 9$.

Решение. ① $f(x_0) = 5x_0 - 9$; $f(x_0 + \Delta x) = 5(x_0 + \Delta x) - 9$, тогда

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \big(5(x_0 + \Delta x) - 9\big) - (5x_0 - 9)$;

$\Delta f = 5(x_0 + \Delta x) - 9 - 5x_0 + 9$;

$\Delta f = 5(x_0 + \Delta x) - 5x_0$;

$\Delta f = 5x_0 + 5\Delta x - 5x_0$;

$\Delta f = 5\Delta x$.

② $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$.

③ Отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не зависит от Δx, оно постоянно и равно 5, т. е. при $\Delta x \to 0$ получим, что $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 5$.

Таким образом, $(5x - 9)' = 5$.

Пример 3. Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 2$.

Решение. Так как $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, то подставим в выражение $-\frac{1}{x^2}$ значение $x = 2$.

Принятое обозначение: $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

Правообладатель Народная асвета

Вернемся к мгновенной скорости движения. При Δt, стремящемся к нулю, средняя скорость стремится к мгновенной ($v_{\text{ср}} \to v_{\text{мгн}}$ при $\Delta t \to 0$), следовательно, мгновенная скорость является производной функции $s(t)$.

Пример 4. Закон движения задан функцией $s(t) = t^2 - t$. Найдите скорость движения в момент времени $t = 3$.

Решение. Так как мгновенная скорость $\left(v_{\text{мгн}}\right)$ движения, заданного функцией $s(t)$, равна производной этой функции в точке, то найдем производную функции $s(t) = t^2 - t$, т. е. $s'(t)$.

① Найдем приращение функции при переходе от t_0 к $t_0 + \Delta t$.

$s(t_0) = t_0^2 - t_0$; $s(t_0 + \Delta t) = (t_0 + \Delta t)^2 - (t_0 + \Delta t)$, тогда

$\Delta s = s(x_0 + \Delta x) - s(x_0) = \left((t_0 + \Delta t)^2 - (t_0 + \Delta t)\right) - \left(t_0^2 - t_0\right)$;

$\Delta s = (t_0 + \Delta t)^2 - (t_0 + \Delta t) - t_0^2 + t_0$;

$\Delta s = t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - t_0 - \Delta t - t_0^2 + t_0$;

$\Delta s = 2t_0\Delta t + \Delta t^2 - \Delta t$.

② $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{2t_0\Delta t + \Delta t^2 - \Delta t}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t - 1$.

③ При $\Delta t \to 0$ получим, что $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \to 2t_0 - 1$.

Таким образом, $s'(t) = \left(t^2 - t\right)' = 2t - 1$, т. е. $v_{\text{мгн}} = s'(t) = 2t - 1$.

Скорость движения в момент времени $t = 3$ равна $s'(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Вообще говоря, если изменение какой-то величины задается функцией $y = f(t)$, то мгновенная скорость изменения этой величины при $t = t_0$ равна $f'(t_0)$, или коротко: производная есть скорость изменения функции.

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$, если:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = 2x + 3$.

Решение. а) ① Выберем некоторое значение аргумента x_0 — первоначальное значение аргумента.

② Найдем $f(x_0)$ — первоначальное значение функции: $f(x_0) = x_0^2 - 5$.

Правообладатель Народная асвета

③ Изменим значение аргумента. Выберем Δx — приращение аргумента.

④ Получим $x_0 + \Delta x$ — наращенное значение аргумента.

⑤ Найдем наращенное значение функции:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 - 5 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 5.$$

⑥ Найдем приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

$$\Delta f = \left(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 5\right) - \left(x_0^2 - 5\right);$$

$$\Delta f = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 5 - x_0^2 + 5; \quad \Delta f = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

б) $f(x_0) = 2x_0 + 3;$ $f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x) + 3,$ тогда

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left(2(x_0 + \Delta x) + 3\right) - (2x_0 + 3);$$

$$\Delta f = 2(x_0 + \Delta x) + 3 - 2x_0 - 3; \quad \Delta f = 2(x_0 + \Delta x) - 2x_0;$$

$$\Delta f = 2x_0 + 2\Delta x - 2x_0; \quad \Delta f = 2\Delta x.$$

2. Найдите отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, если:

а) $f(x) = x^2 - 5;$ б) $f(x) = 2x + 3.$

Решение. Воспользуемся результатами предыдущего задания и получим:

а) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$ б) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$

3. Определите, к чему стремится отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ для функции:

а) $f(x) = x^2 - 5;$ б) $f(x) = 2x + 3,$ — если Δx стремится к нулю ($\Delta x \to 0$).

Решение. Используем результаты предыдущего задания и получим:

а) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x,$ так как второе слагаемое в сумме стремится к нулю, то сумма стремится к $2x_0$, т. е. при $\Delta x \to 0$ получим, что $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x_0.$

б) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2,$ так как отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ не зависит от Δx, то оно постоянно и равно 2. Таким образом, при $\Delta x \to 0$ получим, что $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 2.$

Правообладатель Народная асвета

4. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = 2x + 3$.

Решение. Так как производная функции равна числу, к которому стремится $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то, используя результаты предыдущего задания, получим:

а) $f'(x) = \left(x^2 - 5\right)' = 2x$; б) $f'(x) = (2x + 3)' = 2$.

5. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = 2x + 3$ — в точке $x = 4; -2; 0; 0{,}5$.

Решение. Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем задании.

а) Так как $f'(x) = 2x$, то подставим значения переменной x в выражение $2x$ и получим:

$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$;

$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$;

б) $f'(x) = (2x + 3)' = 2$, так как производная функции $f(x) = 2x + 3$ равна 2 и не зависит от x, то при любом значении переменной ее значение равно 2, т. е. $f'(4) = f'(-2) = f'(0) = f'(0{,}5) = 2$.

6. Закон движения задан функцией:

а) $s(t) = t^2 - 5$; б) $s(t) = 2t + 3$.

Найдите скорость движения в момент времени $t = 5$.

Решение. а) Так как мгновенная скорость движения, заданного функцией $s(t)$, равна производной этой функции, то

$v_{\text{мгн}} = s'(t) = \left(t^2 - 5\right)' = 2t$. В момент $t = 5$ найдем ее значение:

$v_{\text{мгн}} = s'(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

б) Так как $v_{\text{мгн}} = s'(t) = (2t + 3)' = 2$ не зависит от t, то в любой момент времени она равна 2.

7. Найдите производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

Решение. ① $f(x_0) = kx_0 + b$; $f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$, тогда

Правообладатель Народная асвета

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \big(k(x_0 + \Delta x) + b\big) - (kx_0 + b);$$

$$\Delta f = k(x_0 + \Delta x) + b - kx_0 - b; \quad \Delta f = k(x_0 + \Delta x) - kx_0;$$

$$\Delta f = kx_0 + k\Delta x - kx_0; \quad \Delta f = k\Delta x.$$

② $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$

③ Так как отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ не зависит от Δx, то оно постоянно и равно k, значит, $f'(x) = (kx + b)' = k.$

8. Используйте результат предыдущего задания и найдите производную функции:

а) $f(x) = 3x + 5;$ б) $f(x) = x.$

Решение. а) $f(x) = 3x + 5$, так как $k = 3$, то $(3x + 5)' = 3;$

б) $f(x) = x$, так как $k = 1$, то $(x)' = 1.$

9. Найдите производную постоянной функции $y = C$.

Решение. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$, поэтому $C' = 0.$

Верно ли, что:

а) $(3x + 4)' = 3;$ б) $(-3 + 5x)' = 5;$ в) $(-7x)' = -7;$ г) $6' = 0$?

3.4. По графику функции $y = x^2$ (рис. 127) определите приращение функции при переходе от значения аргумента:

а) 1 к значению 2;
б) 1 к значению 1,5;
в) –2 к значению –0,5.

3.5. Найдите с помощью алгоритма приращение функции $y = x^2$ при переходе от значения аргумента:

а) 1 к значению 2;
б) 1 к значению 1,5;
в) –2 к значению –0,5.

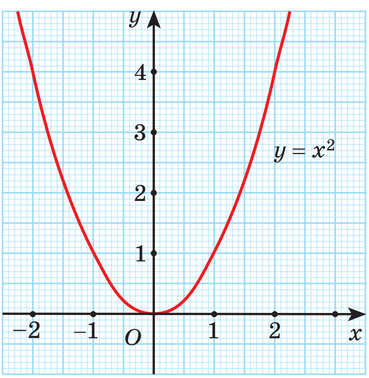


Рис. 127

Правообладатель Народная асвета

3.6. Найдите с помощью алгоритма приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$, если:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = \frac{8}{x}$.

3.7. Найдите отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = \frac{8}{x}$.

3.8. Определите, к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функции:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$;

г) $f(x) = \frac{8}{x}$, — если Δx стремится к нулю $(\Delta x \to 0)$.

3.9. Найдите производную функции, используя алгоритм:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = \frac{8}{x}$.

3.10. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = -3x + 2$; в) $f(x) = 3x^2$;

г) $f(x) = \frac{8}{x}$ — в точках $x = -2;\ -1;\ 0{,}5;\ 8$.

3.11. Закон движения задан функцией:

а) $s(t) = 3t + 5$; б) $s(t) = t^2 + 7$.

Найдите скорость движения в момент времени $t = 4$.

3.12. Воспользуйтесь тем, что $f'(x) = (kx + b)' = k$, и найдите производную функции:

а) $f(x) = 8x - 2$; б) $f(x) = -x + 2$;

в) $f(x) = \frac{x}{6} - 3$; г) $f(x) = 5 - \frac{x}{4}$.

3.13. Для функции $f(x) = 3x^2 - 6x$ найдите:

а) приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$; б) приращение функции, если $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; в) отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$; г) к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю; д) производную функции; е) производную функции в точке $x = 5$.

3.14. Найдите с помощью алгоритма приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$, если:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

Правообладатель Народная асвета

3.15. Найдите отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

3.16. Определите, к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функции:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$, — если Δx стремится к нулю.

3.17. Найдите производную функции, используя алгоритм:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

3.18. Вычислите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 8$; б) $f(x) = -2x + 7$ — в точках $x = -3$; 0; $1{,}5$; 9.

3.19. Закон движения задан функцией $s(t) = t^2 + 1$. Найдите скорость движения в момент времени $t = 10$.

3.20. Воспользуйтесь тем, что $f'(x) = (kx + b)' = k$, и найдите производную функции:

а) $f(x) = 5x - 8$; б) $f(x) = -6x + 1$;

в) $f(x) = \frac{2x}{7} - 5$; г) $f(x) = 7 - \frac{x}{9}$.

3.21. Для функции $f(x) = x^2 + 5x$ найдите:

а) приращение функции при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$;
б) приращение функции, если $x_0 = 2$; $\Delta x = 0{,}1$;
в) отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
г) к чему стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю;
д) производную функции;
е) производную функции в точке $x = -3$.

3.22. Среди чисел -3; $\frac{2}{7}$; $\sqrt[5]{3}$; 0; 9; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $5,(23)$; -7; π; $7{,}8$; 15 выберите натуральные, целые, рациональные, иррациональные. Какому числовому множеству принадлежат все данные числа?

3.23. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(2;\ 0)$ и $B(-2;\ 10)$. Запишите уравнение этой прямой.

3.24. Решите уравнение $\frac{1 - 9x}{x^2 + 2x - 3} + \frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{2x}{x + 3}$.

3.25. Найдите нули функции $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

Правообладатель Народная асвета

§ 19. Правила вычисления производных

3.26. Решите уравнение $(x^2 - 4)(x^2 - 5x - 6) = 0$.

3.27. Решите неравенство $(x^2 - 4)(x^2 - 5x - 6) < 0$.

3.28. Решите неравенство $\frac{x-1}{(x+2)^3} < 0$.

Для вычисления производных будем использовать выведенные в предыдущем параграфе формулы:

$\left(x^2\right)' = 2x$; $(kx+b)' = k$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $C' = 0$. Внесем их в таблицу.

$f(x)$	x^2	$kx + b$	$\frac{1}{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	0

Рассмотрим несколько правил вычисления производных.

1. Производная суммы: если функции U и V имеют производные, то производная суммы равна сумме производных, т. е. $(U+V)' = U' + V'$.

Доказательство. Пусть $U + V = W$. Рассмотрим сумму приращений функций U и V:

$\Delta U + \Delta V = U(x+\Delta x) - U(x) + V(x+\Delta x) - V(x) = U(x+\Delta x) + V(x+\Delta x) - (V(x) + U(x)) =$

$= W(x+\Delta x) - W(x) = \Delta W$. Тогда: $\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\Delta V + \Delta U}{\Delta x} = \frac{\Delta V}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}$.

Если Δx стремится к нулю, то $W' = (U+V)' = U' + V'$.

Пример 1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + 5x$; б) $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

$(U+V)' = U' + V'$

Решение. а) $f'(x) = \left(x^2 + 5x\right)' = \left(x^2\right)' + (5x)' = 2x + 5$;

б) $h'(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \frac{1}{x^2}$.

2. Производная произведения: если функции U и V имеют производные, то $(UV)' = U'V + V'U$.

Правообладатель Народная асвета

Пример 2. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = x^2 \cdot (3x - 1)$.

$$(UV)' = U'V + V'U$$

Решение. а) $f'(x) = \left(x^3\right)' = \left(x^2 \cdot x\right)' =$

$= \left(x^2\right)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$;

б) $f'(x) = \left(x^2 \cdot (3x - 1)\right)' = \left(x^2\right)' \cdot (3x - 1) + (3x - 1)' \cdot x^2 =$

$= 2x \cdot (3x - 1) + 3 \cdot x^2 = 6x^2 - 2x + 3x^2 = 9x^2 - 2x$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $\left(Cf(x)\right)' = C\left(f(x)\right)'$.

Пример 3. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 5x^2$; б) $f(x) = \frac{7}{x}$.

Решение. а) $f'(x) = \left(5 \cdot x^2\right)' = 5\left(x^2\right)' = 5 \cdot 2x = 10x$;

б) $f'(x) = \left(\frac{7}{x}\right)' = \left(7 \cdot \frac{1}{x}\right)' = 7 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 7 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{7}{x^2}$.

3. Производная частного: если функции U и V имеют производные, то $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$.

Пример 4. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \frac{4x - 1}{5x + 6}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$.

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

Решение. а) $f'(x) = \left(\frac{4x - 1}{5x + 6}\right)' =$

$= \frac{(4x - 1)' \cdot (5x + 6) - (5x + 6)'(4x - 1)}{(5x + 6)^2} = \frac{4 \cdot (5x + 6) - 5(4x - 1)}{(5x + 6)^2} = \frac{29}{(5x + 6)^2}$;

б) $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x - 1}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'(x - 1) - (x - 1)' \cdot x^2}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - 1 \cdot x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

Правообладатель Народная асвета

4. Производная степени: производная степени равна произведению показателя степени на степень с тем же основанием и показателем на единицу меньше, т. е. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^8$; б) $f(x) = x^{15}$.

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$$

Решение. а) $f'(x) = \left(x^8\right)' = 8x^{8-1} = 8x^7$;

б) $f'(x) = \left(x^{15}\right)' = 15x^{15-1} = 15x^{14}$.

Нахождение производной функции называется **дифференцированием** функции.

Правила 1—4 называются правилами дифференцирования. Их применяют для вычисления производных различных функций.

Пример 6. Найдите $f'(x)$, если:

а) $f(x) = 6x^2 - 9x + 2$; б) $f(x) = (3x^2 - 7)(4x^2 + 9)$;

в) $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{4x^2+5}$; г) $f(x) = 4x^{10}$.

Решение. а) Найдем производную функции $f(x) = 6x^2 - 9x + 2$ по правилам нахождения производной суммы, вынесения постоянного множителя за знак производной и формул производных:

$$\left(6x^2 - 9x + 2\right)' = \left(6x^2\right)' - \left(9x\right)' + \left(2\right)' = 6\left(x^2\right)' - 9\left(x\right)' + 0 = 6 \cdot 2x - 9 \cdot 1 = 12x - 9.$$

б) Найдем производную функции $f(x) = (3x^2 - 7)(4x^2 + 9)$ по правилу нахождения производной произведения:

$$\left(\left(3x^2 - 7\right)\left(4x^2 + 9\right)\right)' = \left(3x^2 - 7\right)'\left(4x^2 + 9\right) + \left(4x^2 + 9\right)'\left(3x^2 - 7\right) =$$

$$= 6x\left(4x^2 + 9\right) + 8x\left(3x^2 - 7\right) = 48x^3 - 2x.$$

в) Найдем производную функции $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{4x^2+5}$ по правилу нахождения производной частного:

$$\left(\frac{1-2x^2}{4x^2+5}\right)' = \frac{\left(1-2x^2\right)'\left(4x^2+5\right) - \left(4x^2+5\right)'\left(1-2x^2\right)}{\left(4x^2+5\right)^2} = \frac{-4x\left(4x^2+5\right) - 8x\left(1-2x^2\right)}{\left(4x^2+5\right)^2} =$$

$$= \frac{-16x^3 - 20x - 8x + 16x^3}{\left(4x^2+5\right)^2} = -\frac{28x}{\left(4x^2+5\right)^2}.$$

Правообладатель Народная асвета

г) Используем правило вынесения постоянного множителя за знак производной и правило нахождения производной степени:

$$\left(4x^{10}\right)' = 4\left(x^{10}\right)' = 4 \cdot 10x^{10-1} = 40x^9.$$

Пример 7. Вычислите: а) $f'(1)$; б) $f'(4)$; в) $f'(-2)$; г) $f'(0)$, — если $f(x) = 3x^4 - 0{,}5x^2$.

Решение. Найдем производную функции $f(x) = 3x^4 - 0{,}5x^2$, используя правила нахождения производной суммы, степени и вынесения постоянного множителя: $f'(x) = \left(3x^4 - 0{,}5x^2\right)' = \left(3x^4\right)' - \left(0{,}5x^2\right)' = 12x^3 - x$.

Подставляя в выражение $12x^3 - x$ указанные значения переменной, находим:

а) $f'(1) = 12 - 1 = 11$; б) $f'(4) = 768 - 4 = 764$;
в) $f'(-2) = -96 + 2 = -94$; г) $f'(0) = 0$.

Пример 8. Решите уравнение $f'(x) = 3f(x)$, если $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Решение. Найдем производную функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, используя правила нахождения производной суммы, степени и вынесения постоянного множителя: $f'(x) = \left(2x^3 - 3x^2\right)' = 6x^2 - 6x$.

Тогда уравнение $f'(x) = 3f(x)$ примет вид: $6x^2 - 6x = 3 \cdot (2x^3 - 3x^2)$. Решим его:

$$6x^2 - 6x = 6x^3 - 9x^2 \Leftrightarrow 6x^3 - 15x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2, \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 0,5; 2.

Пример 9. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s(t) = 2t^2 - 8t - 10$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость движения в момент времени, равный 8 с.

Решение. Так как мгновенная скорость движения, заданного функцией $s(t) = 2t^2 - 8t - 10$, равна производной этой функции, то $v_{\text{мгн}} = s'(t) = (2t^2 - 8t - 10)' = 4t - 8$ в момент времени, равный 8 с.

Найдем ее значение: $v_{\text{мгн}} = s'(8) = 4 \cdot 8 - 8 = 24\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Ответ: $24\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Правообладатель Народная асвета

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите производную функции, используя правила дифференцирования:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 2;$ б) $g(x) = 2x^{19} - 0{,}3x^{33};$

в) $h(x) = 3x^{15} - \frac{1}{x};$ г) $p(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3x}{7} + 8.$

Решение. а) $f'(x) = \left(x^2 - 5x + 2\right)' = \left(x^2\right)' - (5x)' + (2)' = 2x - 5;$

б) $g'(x) = \left(2x^{19} - 0{,}3x^{33}\right)' = \left(2x^{19}\right)' - \left(0{,}3x^{33}\right)' = 2\left(x^{19}\right)' - 0{,}3\left(x^{33}\right)' =$

$= 2 \cdot 19x^{18} - 0{,}3 \cdot 33x^{32} = 38x^{18} - 9{,}9x^{32};$

в) $h'(x) = \left(3x^{15} - \frac{1}{x}\right)' = \left(3x^{15}\right)' + \left(-\frac{1}{x}\right)' =$

$= 3\left(x^{15}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 3 \cdot 15x^{14} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 45x^{14} + \frac{1}{x^2};$

г) $p'(x) = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{3x}{7} + 8\right)' = \left(\frac{x^3}{8}\right)' - \left(\frac{3x}{7}\right)' + 8' =$

$= \frac{1}{8}\left(x^3\right)' - \frac{3}{7}x' + 0 = \frac{1}{8} \cdot 3x^2 - \frac{3}{7} \cdot 1 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{7}.$

2. Вычислите $f'(8);$ $f'(5);$ $f'(-2);$ $f'(0),$ если $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}.$

Решение. Найдем производную функции $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}.$

По правилу нахождения производной частного получим:

$$f(x)' = \left(\frac{3 - x}{x + 5}\right)' = \frac{(3 - x)'(x + 5) - (x + 5)'(3 - x)}{(x + 5)^2} = \frac{-(x + 5) - (3 - x)}{(x + 5)^2} =$$

$$= \frac{-8}{(x + 5)^2} = -\frac{8}{(x + 5)^2}.$$

Тогда $f'(8) = -\frac{8}{169};$ $f'(5) = -\frac{8}{100};$ $f'(-2) = -\frac{8}{9};$ $f'(0) = -\frac{8}{25}.$

3. Решите уравнение $f'(x) = 0,$ если $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x.$

Решение. $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (3x)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' - 3x' = x^2 - 3.$

Правообладатель Народная асвета

Решим уравнение $x^2 - 3 = 0$:

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

4. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 4x$.

Решение. $f'(x) = \left(x^3 - 0{,}5x^2 - 4x\right)' = 3x^2 - x - 4$.

Решим неравенство $3x^2 - x - 4 > 0$.

Найдем нули функции $y = 3x^2 - x - 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Положительные значения функция принимает левее меньшего корня или правее большего: $x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup \left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

5. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$.

Решение. $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} + x^2\right)' = \frac{1' \cdot x^2 - \left(x^2\right)' \cdot 1}{x^4} + \left(x^2\right)' = \frac{-2x}{x^4} + 2x =$

$= \frac{-2}{x^3} + 2x = \frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3}$.

Решим неравенство $\frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3} > 0$ методом интервалов:

$$\frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty).$$

Ответ: $(-1;\ 0) \cup (1;+\infty)$.

6. Закон прямолинейного движения задан функцией $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 3t$. Найдите, при каких значениях времени мгновенная скорость движения больше 1.

Решение. Так как мгновенная скорость движения, заданного функцией $s(t)$, равна производной этой функции, то $v_{\text{мгн}} = s'(t) =$

$= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 3t\right)' = t^2 - 3t - 3$.

Правообладатель Народная асвета

В соответствии с условием решим неравенство:

$t^2 - 3t - 3 > 1$, $t^2 - 3t - 4 > 0$; $t \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Так как $t > 0$, то $t \in (4; +\infty)$.

Ответ: $t \in (4; +\infty)$.

1. Производная функции $f(x) = x^5$ равна:

а) x^4; б) $4x^4$; в) $5x^6$; г) $5x^4$.

Выберите правильный ответ.

2. Производная функции $f(x) = 7 - 5x$ равна:

а) $7 + x$; б) $-5x$; в) -5; г) 7.

Выберите правильный ответ.

3.29. Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^2 + x$; б) $f(x) = x - x^2$; в) $f(x) = 7x^2$;

г) $f(x) = -5x^2$; д) $f(x) = 6x^2 + 3x$; е) $f(x) = 9x^2 - 7x$;

ж) $f(x) = \frac{x^2}{4} - x$; з) $f(x) = \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{7}$.

3.30. Найдите $f'(0)$ для функции:

а) $f(x) = 8x^2 - x + 2$; б) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 9$;

в) $f(x) = x^7 + 2x^5 - 4$; г) $f(x) = -12x^4 + 7x^2 + x$;

д) $f(x) = \frac{x^4}{3} - 3x^2$; е) $f(x) = 0{,}1x^6 - x^3 + \frac{x}{2}$.

3.31. Решите уравнение $f'(x) = f(1)$, если $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

3.32. Сравните $f'(-1)$ и $f'(1)$ для функции:

а) $f(x) = x^4 - \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{8}{x}$.

3.33. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной произведения:

а) $f(x) = (x^2 - 2x)(x^2 + 3)$; б) $f(x) = (x^3 + x^2)(x^2 - 8x)$;

в) $f(x) = x^4(5x^2 - x)$; г) $f(x) = 3x^7(1 - x^9)$.

Правообладатель Народная асвета

3.34. Верно ли, что $f'(2) < g'(2)$, если $f(x) = \left(\frac{x^2}{5} - x\right)\left(5x^3 - 1\right)$, а $g(x) = \left(x^2 - x + 2\right)\left(\frac{x^3}{6} - x\right)$?

3.35. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной частного:

а) $f(x) = \frac{5x-2}{5x+2}$; б) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$;

в) $f(x) = \frac{2x-9}{x+3}$; г) $f(x) = \frac{4x^2}{1-x}$.

3.36. Найдите производную функции $f(x) = \frac{\left(2x - \sqrt{5}\right)\left(2x + \sqrt{5}\right)}{x-4}$.

3.37. Найдите значение выражения $f'(-3) + f'(-2)$ для функции $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x}$.

3.38. Найдите производную функции $y = f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 3$, $x_0 = -2$; б) $f(x) = 3x - 1 + \frac{6}{x}$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \left(x^3 - 4\right)\left(x^5 - 1\right)$, $x_0 = \sqrt{2}$; г) $f(x) = \frac{5-x}{x^2}$, $x_0 = -5$.

3.39. Производная функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ в некоторой точке x_0 равна 0,25. Найдите $f(x_0)$.

3.40. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = x - 2x^2$; б) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$;

в) $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 + 2x$; г) $f(x) = \frac{5}{x} + 20x$.

3.41. Найдите, при каких значениях переменной равна нулю производная функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 20x$.

3.42. Решите уравнение $f'(x) = -1$, если:

а) $f(x) = \frac{6x-1}{6x+1}$; б) $f(x) = \frac{2x^2}{x-4}$.

3.43. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = x^3 - x^2 - x$; б) $f(x) = 27x - x^3$; в) $f(x) = \frac{-2x^3}{3} + x^2 + 24$;

г) $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$; д) $f(x) = x + \frac{4}{x}$; е) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

Правообладатель Народная асвета

3.44. Найдите, при каких значениях переменной производная функции принимает положительные значения:

а) $f(x) = x^3 - 48x$; б) $f(x) = (x-2)(1-x^2)$; в) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x}$.

3.45. Решите неравенство $f'(x) \geqslant 0$, если $f(x) = \dfrac{x^2+3}{3(x-1)}$.

3.46. Примените формулу квадрата разности или квадрата суммы для нахождения производной функции и решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = (2x-1)^2$; б) $f(x) = \dfrac{(3x+5)^2}{x+1}$.

3.47. Дана функция $f(x) = (4x+13)^2$. Сравните $f'(-3)$ и $f'(-\sqrt{5})$.

3.48. Решите неравенство $f'(x) \leqslant 0$, если $f(x) = (x-2)(x+3)^2$.

3.49. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t) = -t^2 + 10t - 7$, в момент времени $t = 3$ с, если путь измеряется в метрах.

3.50. Движение точки происходит по закону $s(t) = t^2 + 4t + 2$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите, в какой момент времени скорость движения точки равна $8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3.51. Две точки движутся по законам $s_1(t) = 4t^2 + 2$ и $s_2(t) = 3t^2 + 4t - 1$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорости движения точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны.

3.52. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 9x^2 + x$; б) $f(x) = 8x - x^2$;

в) $f(x) = -x^2 + 2x$; г) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 9x$.

3.53. Найдите $f'(1)$ для функции:

а) $f(x) = 5x^2 + x - 3$; б) $f(x) = x^8 - x^5 - x + 2$;

в) $f(x) = -10x^5 - 3x^2 - x$; г) $f(x) = \dfrac{x^6}{9} + 4x^2$.

3.54. Сравните $f'(2)$ и $f'(3)$ для функции $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$.

3.55. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной произведения:

а) $f(x) = (2x^2 - x)(x^2 + 7)$; б) $f(x) = (x^2 - 6x)x^3$.

Правообладатель Народная асвета

3.56. Найдите $f'(0)$ для функции $f(x)=\left(\frac{x^4}{8}+2x\right)\left(x^2-x\right)$.

3.57. Найдите производную функции, используя правило нахождения производной частного:

а) $f(x)=\frac{7x+3}{7x-3}$; б) $f(x)=\frac{5x^2-x}{x+2}$.

3.58. Сравните $f'(-1)$ и $f'(-2)$ для функции $f(x)=\frac{x^4-5x+3}{x}$.

3.59. Производная функции $f(x)=-\frac{1}{12}x^3$ в некоторой точке x_0 равна $-0{,}25$. Найдите $f(x_0)$.

3.60. Решите уравнение $f'(x)=0$, если:

а) $f(x)=8x^2-x$; б) $f(x)=x^5-2x^3+x$.

3.61. Решите уравнение $f'(x)=1$, если:

а) $f(x)=\frac{x-5}{x+5}$; б) $f(x)=\frac{3x}{x-1}$.

3.62. Решите неравенство $f'(x)<0$, если:

а) $f(x)=3x^2+2x$; б) $f(x)=-x^3+2x^2-x$;

в) $f(x)=\frac{9}{x}+x$; г) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

3.63. Найдите, при каких значениях переменной производная функции $f(x)=x^4-\frac{x^2}{2}$ принимает положительные значения.

3.64. Решите неравенство $f'(x)\leqslant 0$, если $f(x)=\frac{2x^2+6}{3(x+1)}$.

3.65. Примените формулу квадрата разности для нахождения производной функции $f(x)=(5x-9)^2$ и сравните $f'(1)$ и $f'\left(\sqrt{5}\right)$.

3.66. Решите неравенство $f'(x)\leqslant 0$, если:

а) $f(x)=(x+7)^2$; б) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$.

3.67. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)=-t^2+9t+8$, в момент времени $t=4$ с, если путь измеряется в метрах.

3.68. Движение точки происходит по закону $s(t)=t^2-9t+4$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите, в какой момент времени скорость движения точки равна 11 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Правообладатель Народная асвета

3.69. Чему равен угловой коэффициент прямой:

а) $y = -x + 3$; б) $y = x + 3$; в) $y = \frac{x}{5} + 3$; г) $y = -8$?

3.70. Найдите значение выражения $\dfrac{5^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot (0{,}4)^{-2}}{6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

3.71. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 15} = \sqrt{4x - 3}$; б) $\sqrt[4]{x - 3} + 12 = \sqrt{x - 3}$.

3.72. Примените формулы двойного угла и найдите значение выражения:

а) $3 - 6\sin^2 \frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8}$; в) $\dfrac{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{11\pi}{12}}$.

3.73. Решите неравенство $(x^2 - 9)(x + 3) \geqslant 0$, используя метод интервалов.

3.74. Выясните, четной или нечетной является функция $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{x^2 + 2}$.

§ 20. Геометрический смысл производной. Связь между знаком производной функции и ее возрастанием или убыванием

3.75. Для функции $y = (x - 1)^2 - 5$ найдите:

а) наименьшее значение; б) промежуток возрастания.

3.76. Сравните $f\left(-2\sqrt[4]{3}\right)$ и $f\left(-3\sqrt[4]{3}\right)$, если $f(x) = \frac{9}{x}$.

3.77. Найдите угловой коэффициент прямой и определите, какой угол (острый или тупой) составляет данная прямая с осью абсцисс:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x + 5$; в) $y = 8 + 5x$.

Рассмотрим свойства производной функции, которые используют для изучения свойств функции $y = f(x)$ (рис. 128 на с. 240).

Прямую M_0M, проходящую через две точки графика функции $y = f(x)$, называют секущей. Тангенс угла β наклона секущей к оси абсцисс можно определить из прямоугольного треугольника M_0MH: $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Если Δx стремится к нулю, то точка M, двигаясь по кривой, приближается к точке M_0.

Правообладатель Народная асвета

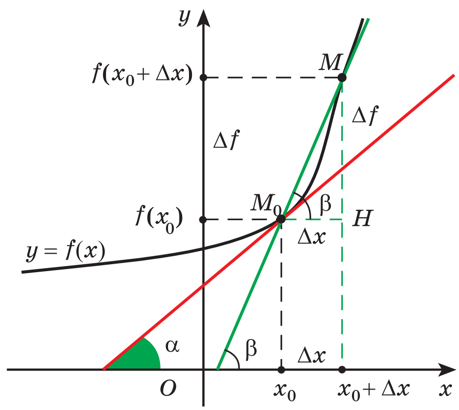


Рис. 128

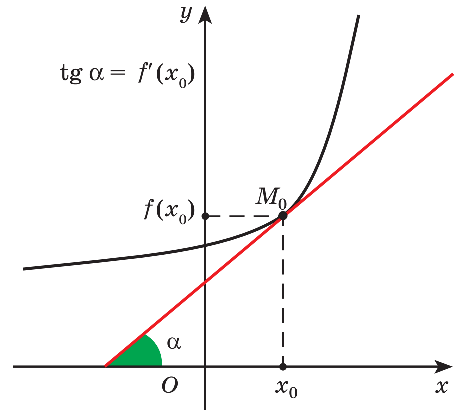


Рис. 129

В предельном положении, когда точка M совпадет с точкой M_0, прямая M_0M займет положение **касательной** к графику функции в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$.

Тангенс угла α наклона касательной к оси абсцисс равен числу, к которому стремится $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что Δx стремится к нулю, т. е. производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл производной: если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то **тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной,** проведенной к графику функции в точке $(x_0;\ f(x_0))$, **равен производной функции** в этой точке, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ (рис. 129).

Для того чтобы найти угол наклона касательной к оси абсцисс, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, нужно:

① Найти производную функции $f'(x)$. ② Найти значение производной в точке x_0, т. е. $f'(x_0)$. Полученное значение равно тангенсу угла наклона α касательной к оси абсцисс, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. ③ Сравнить значение $f'(x)$ с нулем. Если $f'(x_0) > 0$, то угол α острый и $\alpha = \operatorname{arctg} f'(x_0)$; если $f'(x_0) < 0$, то угол α тупой и $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(-f'(x_0))$; если $f'(x_0) = 0$, то $\alpha = 0$.	Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0{,}5$. ① $f'(x) = (x^2)' = 2x$. ② $f'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$. $\operatorname{tg}\alpha = f'(0{,}5)$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = 1$. ③ Так как $f'(x_0) > 0$, то угол α острый и $\alpha = \operatorname{arctg} 1$, значит, $\alpha = 45°$.

Правообладатель Народная асвета

Пример 1. Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 5x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение. ① Найдем производную функции:

$$f'(x) = \left(5x^2\right)' = 5 \cdot 2x = 10x.$$

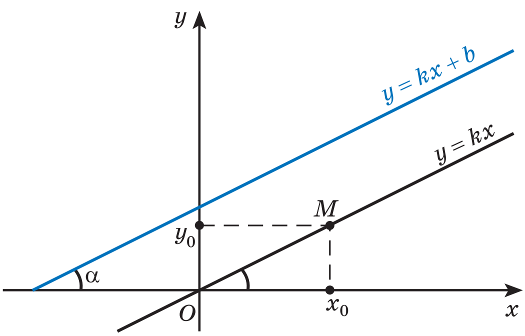
② Найдем значение производной в точке $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = 10 \cdot (-1) = -10.$$

Получим тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(-1) = -10.$$

③ Так как $f'(x_0) < 0$, то угол α тупой, значит, $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}10$.



$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_0}{x_0} = k$, так как $y_0 = kx_0$

Рис. 130

Заметим, что в уравнении прямой $y = kx + b$ коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона этой прямой к оси абсцисс (рис. 130).

Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 1$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Запишем уравнение прямой $y = kx + b$. Если $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, то $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Найдем значение производной функции $f'(x) = x^3 + 1$ в точке $x_0 = 1$: $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$, значит, $k = 3$. Тогда $y = 3x + b$.

Найдем значение функции в точке $x_0 = 1$: $f(1) = 1^3 + 1 = 2$, т. е. прямая $y = 3x + b$ проходит через точку с координатами (1; 2).

Подставим найденные значения в уравнение прямой $y = 3x + b$ и получим: $2 = 3 \cdot 1 + b$; $b = -1$.

Таким образом, $y = 3x - 1$ — это уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^3 + 1$ в точке $x_0 = 1$.

Заметим, что не в любой точке графика функции можно провести касательную. Например, в точке (0; 0) касательной к графику функции

Правообладатель Народная асвета

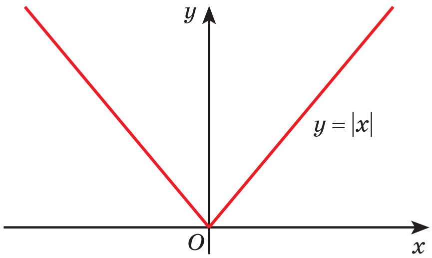


Рис. 131

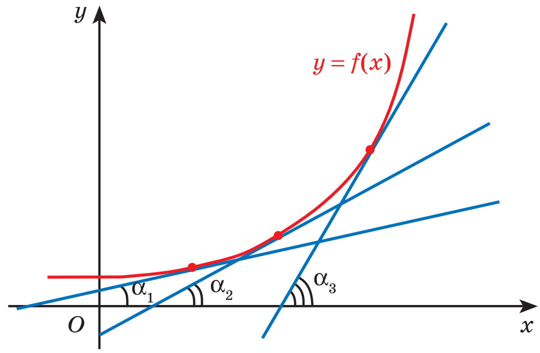


Рис. 132

$y = |x|$ не существует (рис. 131), значит, не существует производной в точке $x_0 = 0$ функции $y = |x|$.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, возрастающей на некотором промежутке. Проведем касательные в точках графика этой функции (рис. 132) и заметим, что углы, которые образуют эти касательные с осью абсцисс, — острые. Следовательно, производная этой функции в каждой точке этого промежутка положительна. Справедлива теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 1 (признак возрастания функции)

Если функция имеет *положительную производную* в каждой точке некоторого промежутка, то она *возрастает* на этом промежутке.

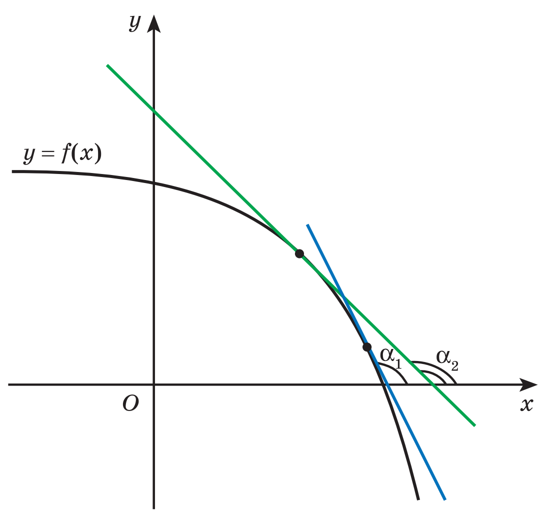


Рис. 133

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, убывающей на некотором промежутке. Углы, которые образуют касательные к графику этой функции с осью абсцисс, — тупые (рис. 133). Значит, производная этой функции в каждой точке этого промежутка отрицательна.

Правообладатель Народная асвета

Теорема 2 (признак убывания функции)

Если функция имеет *отрицательную производную* в каждой точке некоторого промежутка, то она *убывает* на этом промежутке.

Признаки возрастания и убывания функции сформулированы для непрерывных функций.
Представление о непрерывной функции дает ее график: его можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. Так, на рисунке 134 изображен график непрерывной функции, а на рисунке 135 — график функции, которая не является непрерывной.

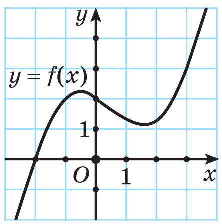


Рис. 134

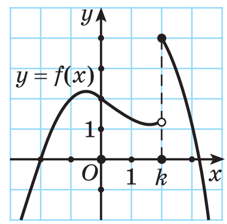
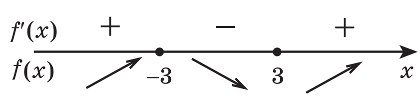


Рис. 135

Для того чтобы найти промежутки монотонности функции $y = f(x)$, нужно:

① Найти область определения функции $D(f)$.	Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 27x$.
	① $D(f) = \boldsymbol{R}$.
② Найти производную функции $f'(x)$.	② $f'(x) = \left(x^3 - 27x\right)' = 3x^2 - 27$.
③ Решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$. Знаки производной и соответствующие промежутки монотонности функции отметить на схеме.	③ $f'(x) > 0$; $3x^2 - 27 > 0$; $x^2 - 9 > 0$; $(x-3)(x+3) > 0$; $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-3; 3)$. 
④ Записать ответ: решения неравенства $f'(x) > 0$ — это промежутки возрастания данной функции; решения неравенства $f'(x) < 0$ — это промежутки убывания данной функции. Для непрерывных функций концы промежутков монотонности можно включить в ответ.	④ *Ответ*: функция возрастает на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$; функция убывает на промежутке $[-3; 3]$.

Пример 3. Найдите промежутки монотонности функции
$f(x) = 1 + 3x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

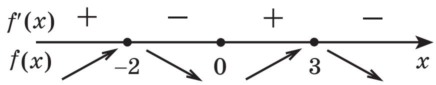
Правообладатель Народная асвета

Решение. ① $D(f) = \mathbf{R}$.

② $f'(x) = 6x + x^2 - x^3 = -x(x^2 - x - 6) = -x(x-3)(x+2)$.

③ $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 3)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-2; 0) \cup (3; +\infty)$.

Отметим на схеме знаки производной и соответствующие промежутки монотонности функции.



④ *Ответ*: функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 3]$ и убывает на промежутках $[-2; 0]$ и $[3; +\infty)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную графически. Выясним, какой особенностью обладают точки A, B, C, D, M, K, отмеченные на рисунке 136.

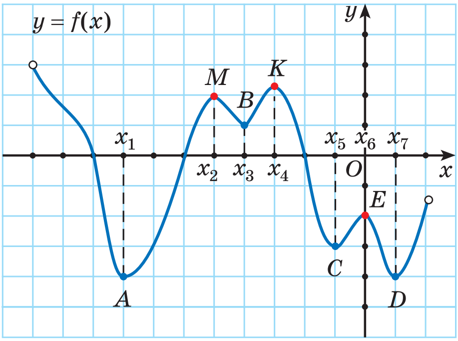


Рис. 136

Вблизи абсциссы x_1 точки A во всех точках значения функции (ординаты точек) больше, чем в точке A. Таким же свойством обладают точки B, C и D.

Точки x_1, x_3, x_5, x_7 — **точки минимума** данной функции (обозначается $x_{\min}$).

Вблизи абсциссы x_2 точки M во всех точках значения функции (ординаты точек) меньше, чем в точке M. Таким же свойством обладают точки K и E. Точки x_2, x_4, x_6 — **точки максимума** данной функции (обозначается $x_{\max}$).

Точки минимума и точки максимума называют **точками экстремума** функции. Так, точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 — точки экстремума данной функции.

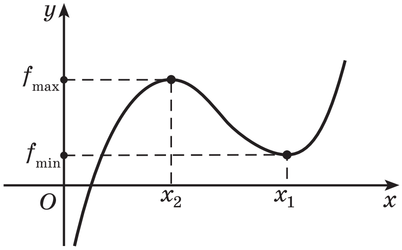


Рис. 137

На рисунке 137 точка x_1 — точка минимума функции $y = f(x)$. Значение функции в точке минимума $f(x_1)$ **называют минимумом функции** (обозначают $f_{\min}$).

Точка x_2 — точка максимума функции $y = f(x)$. Значение функции в точке максимума $f(x_2)$ **называют максимумом функции** (обозначают $f_{\max}$).

Минимумы и максимумы называют **экстремумами** функции.

Правообладатель Народная асвета

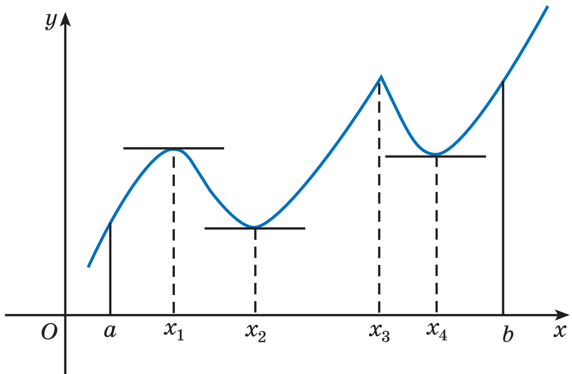


Рис. 138

В точках экстремума касательная к графику функции либо **параллельна оси абсцисс** (точки x_1, x_2, x_4 на рисунке 138), тогда производная в этой точке равна нулю, либо **не существует** (точка x_3), это означает, что производная в этой точке **не существует.**

Заметим, что слева от точки максимума функции $y = f(x)$ значения производной положительны (функция возрастает), а справа — отрицательны (функция убывает).

Говорят: ***«при переходе через точку максимума производная меняет знак с «плюса» на «минус»*** (рис. 139).

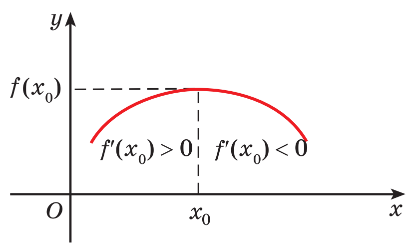


Рис. 139

Если x_0 — точка минимума функции $y = f(x)$, то значения производной слева от этой точки отрицательны (функция убывает), а справа — положительны (функция возрастает).

Говорят: ***«при переходе через точку минимума производная меняет знак с «минуса» на «плюс»*** (рис. 140).

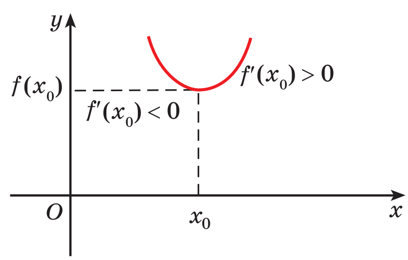


Рис. 140

Теорема 3 (признак точки максимума функции)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а производная меняет знак с «плюса» на «минус» при переходе через эту точку, то эта точка — точка максимума функции.

Правообладатель Народная асвета

Теорема 4 (признак точки минимума функции)

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а производная меняет знак с «минуса» на «плюс» при переходе через эту точку, то эта точка — точка минимума функции.

Для того чтобы найти точки экстремума функции $y = f(x)$, нужно:

① Найти область определения функции $D(f)$.

② Найти производную функции $f'(x)$.

③ Найти точки из области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

④ Если функция непрерывна в точке x_0, а производная при переходе через эту точку x_0 меняет знак:

- с «+» на «–», то эта точка — точка максимума функции;
- с «–» на «+», то эта точка — точка минимума функции.

Найдите точки экстремума функции $f(x) = 2x^3 - 24x$.

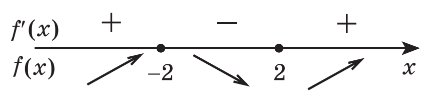
① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = \left(2x^3 - 24x\right)' = 6x^2 - 24$.

③ $f'(x) = 0;\ 6x^2 - 24 = 0;\ x^2 - 4 = 0;$

$(x-2)(x+2) = 0;\ x_1 = -2,\ x_2 = 2.$

$f'(x)$ существует на всей области определения функции $y = f(x)$.



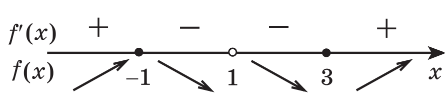
④ $x_{max} = -2,\ x_{min} = 2.$

Пример 4. Найдите точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = \dfrac{3x + x^2}{x - 1}$.

Решение. ① $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

② $f'(x) = \dfrac{(3+2x)(x-1) - 1\cdot\left(3x + x^2\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$

③ $f'(x) = 0$ при $x = -1$ и $x = 3$.



④ $x_{max} = -1;\ x_{min} = 3.$

$$f_{max} = f(-1) = \frac{3\cdot(-1) + (-1)^2}{-1-1} = 1;\quad f_{min} = f(3) = \frac{3\cdot 3 + 3^2}{3-1} = 9.$$

Ответ: $x_{max} = -1;\ f_{max} = 1;\ x_{min} = 3;\ f_{min} = 9.$

Правообладатель Народная асвета

На рисунках 141, *а*, *б*, *в* изображены касательные к графикам функции в точке x_0. Они параллельны оси абсцисс, следовательно, производная в точке x_0 равна нулю во всех трех случаях.
Но производная функции, изображенной на рисунке 141, *в*, *не меняет знак при переходе через эту точку, поэтому в данном случае точка x_0 не является точкой экстремума функции (она называется точкой перегиба).*

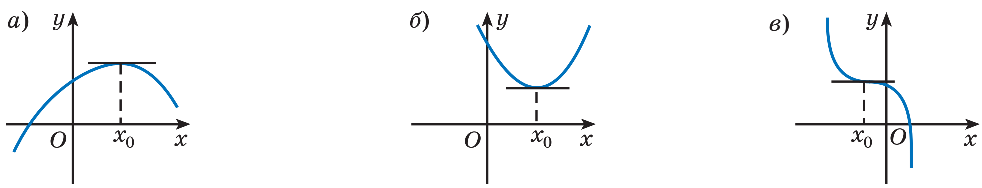


Рис. 141

На рисунках 142, *а*, *б*, *в* изображены графики функций, касательная в точке x_0 к которым не существует, т. е. не существует производной в точке x_0 во всех трех случаях. Но на рисунках 142, *а, б* эти точки являются точками экстремума, а на рисунке 142, *в* — точка x_0 не является точкой экстремума функции.

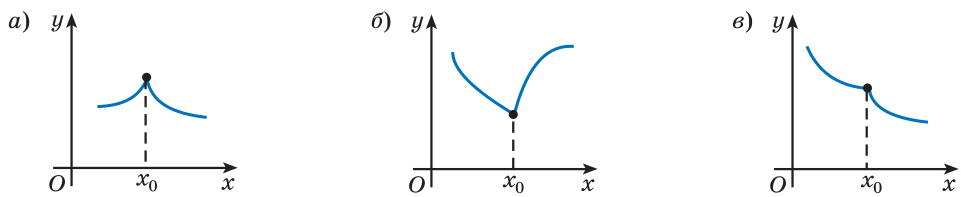


Рис. 142

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются ее **критическими** точками.

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2 + 5x$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. 1) Найдем производную функции: $f'(x) = (x^2 + 5x)' = 2x + 5$.

2) Найдем значение производной в точке $x_0 = -1$: $f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$.

3) $\operatorname{tg}\alpha = f'(-1)$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Правообладатель Народная асвета

2. Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $N(1;\ 1)$.

Решение. ① Найдем производную функции: $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

② Найдем значение производной в точке $x_0 = 1$: $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
③ $\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = -1$.
④ Так как $f'(x_0) < 0$, то угол α тупой, значит, $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} 1 =$ $= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Уравнение прямой, являющейся касательной к графику данной функции в данной точке, имеет вид $y = kx + b$. Так как $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, то найдем значение производной данной функции в точке $x_0 = 1$: $f'(x) = 3 - 2x$; $f'(1) = 3 - 2 \cdot 1 = 1$, значит, $k = 1$. Тогда $y = x + b$. Найдем значение функции в точке $x_0 = 1$: $f(1) = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2$, т. е. прямая $y = x + b$ проходит через точку с координатами $(1;\ 2)$. Подставим найденные значения в уравнение прямой $y = x + b$ и получим: $2 = 1 + b$; $b = 1$. Таким образом, $y = x + 1$ — это уравнение искомой касательной.

4. Функция $y = h(x)$ задана графически (рис. 143). Определите значение производной данной функции в точках x_1, x_2, x_3.

Решение. Так как касательные к графику функции в точках x_1, x_2, x_3 параллельны оси абсцисс, то угол наклона касательных в этих точках к оси абсцисс равен нулю, т. е. $\alpha = 0$, тогда $\operatorname{tg} 0 = 0$, а так как $\operatorname{tg}\alpha = h'(x_0)$, то $h'(x_1) = h'(x_2) = h'(x_3) = 0$.

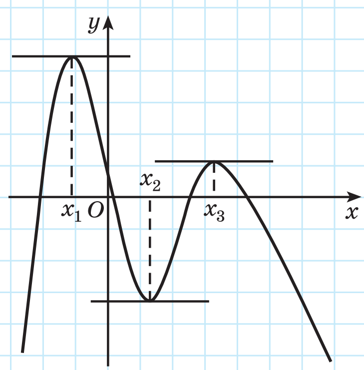


Рис. 143

5. Для графика функции, изображенного на рисунке 144, выберите верные утверждения:

1) $f'(x) = 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) > 0$.

Правообладатель Народная асвета

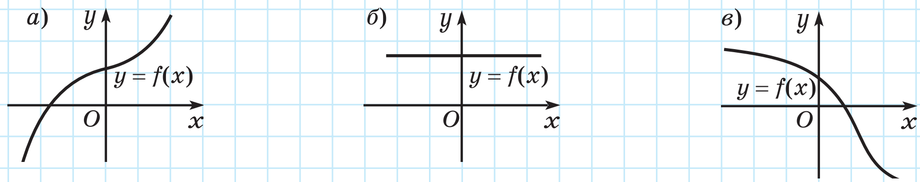


Рис. 144

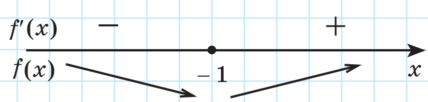
Решение. а) На рисунке 144, *а* изображен график возрастающей функции. На этом графике нет точки, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс, значит, производная функции положительна $f'(x) > 0$. Верно утверждение 3).
б) На рисунке 144, *б* изображен график постоянной функции, значит, $f'(x) = 0$. Верно утверждение 1).
в) На рисунке 144, *в* изображен график убывающей функции. На этом графике нет точки, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс, значит, производная функции отрицательна $f'(x) < 0$. Верно утверждение 2).

6. Найдите промежутки монотонности функции:
а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; б) $f(x) = -x^3 - 4x^2$.

Решение. а) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right)' = 2x + 2$.

③ $f'(x) > 0$; $2x + 2 > 0$; $x > -1$; $x \in (-1; +\infty)$;
$f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$.

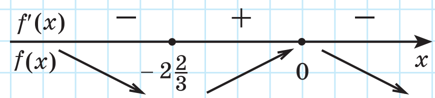


④ *Ответ:* функция возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$; функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$.
б) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = \left(-x^3 - 4x^2\right)'$; $f'(x) = \left(-x^3\right) - \left(4x^2\right)'$;
$f'(x) = -3x^2 - 8x$; $f'(x) = -x(3x + 8)$.

③ $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-2\frac{2}{3};\ 0\right)$; $f'(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty;\ -2\frac{2}{3}\right) \cup (0;\ +\infty)$.

Правообладатель Народная асвета



④ *Ответ:* функция возрастает на промежутке $\left[-2\frac{2}{3};\ 0\right]$ и убывает на промежутках $\left(-\infty;\ -2\frac{2}{3}\right]$ и $[0;\ +\infty)$.

7. По графику функции $y = f(x)$ (рис. 145) найдите точки экстремума и экстремумы функции.

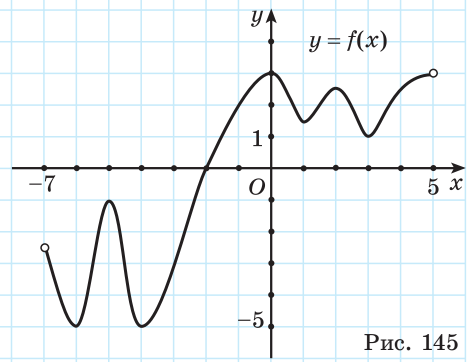


Рис. 145

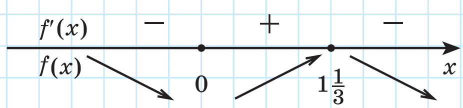
Решение. Точки минимума: –6; –4; 1 и 3.
Минимумы функции равны:
$f(-6) = -5;\ f(-4) = -5;$
$f(1) = 1{,}5;\ f(3) = 1.$
Точки максимума: –5; 0 и 2.
Максимумы функции равны:
$f(-5) = -1;\ f(0) = 3;\ f(2) = 2{,}5.$

8. Найдите точки экстремума функции $f(x) = -x^3 + 2x^2$.

Решение. а) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f'(x) = -3x^2 + 4x.$

③ $f'(x) = 0;\ -3x^2 + 4x = 0;\ 3x^2 - 4x = 0;\ x(3x - 4) = 0;\ x = 0,\ x = 1\frac{1}{3}.$



④ $x_{max} = 1\frac{1}{3},\ x_{min} = 0.$

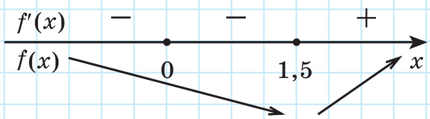
9. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 1$.

Решение. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.
② $f'(x) = 12x^3 - 18x^2.$

③ $f'(x) = 0;\ 12x^3 - 18x^2 = 0;\ 2x^3 - 3x^2 = 0;\ x^2(2x - 3) = 0;$

$x = 0,\ x = 1{,}5.$
При переходе через точку 0 знак производной не меняется.

Правообладатель Народная асвета

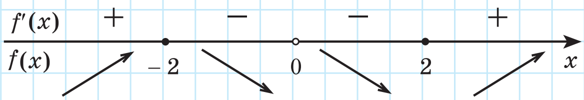


④ $x_{\min} = 1{,}5$, точек максимума функция не имеет.

10. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

Решение. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+4\right)' x - x'\left(x^2+4\right)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$



Функция возрастает на промежутках $(-\infty;\ -2]$ и $[2;\ +\infty)$.
Функция убывает на промежутках $[-2;\ 0)$ и $(0;\ 2]$.
$x_{\min} = 2$; $x_{\max} = -2$.

$f_{\min} = f(2) = \dfrac{2^2+4}{2} = 4$; $f_{\max} = f(-2) = \dfrac{(-2)^2+4}{-2} = -4$.

?

1. Если производная в точке функции $y = f(x)$ равна: а) 2; б) –1; в) 0; г) 0,1, — то угол, который образует касательная к графику функции в этой точке:
1) тупой; 2) острый; 3) прямой; 4) равен нулю.
Выберите правильные ответы.

2. Определите знак производной функции $y = f(x)$ в точках A, B, C, D на рисунке 146.

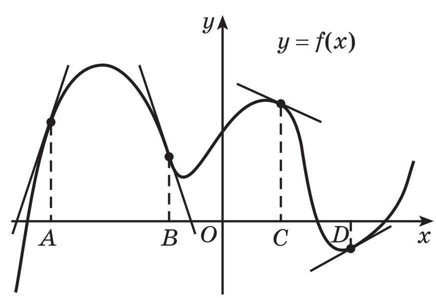


Рис. 146

3.78. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x$ в точке:

а) $x_0 = 5$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 2$.

Правообладатель Народная асвета

3.79. На рисунке 147 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите несколько точек, в которых касательная к графику данной функции образует с осью абсцисс:

а) острый угол; б) тупой угол.

В каких точках касательная к графику данной функции параллельна оси абсцисс?

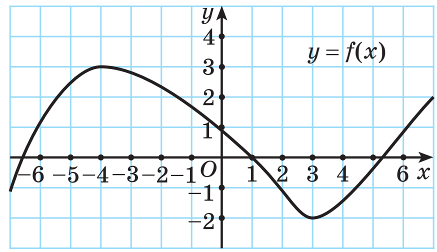


Рис. 147

3.80. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 1$, если:

а) $f(x) = x^3 - 3x^2$; б) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

3.81. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 148). Найдите $f'(x_0)$.

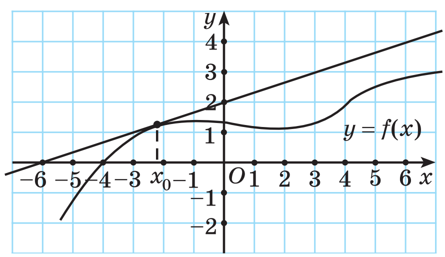


Рис. 148

3.82. Используйте алгоритм и найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции:

а) $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 0{,}5$;

б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$ в точке $x_0 = \sqrt{3}$;

в) $f(x) = -x^3 + x^2$ в точке $x_0 = 1$;

г) $f(x) = \frac{6-x}{x}$ в точке $x_0 = -2$.

3.83. Верно ли, что касательная к графику функции $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$ составляет тупой угол с осью абсцисс?

3.84. В какой точке графика функции $f(x) = 2x^2 + \sqrt{3}x - 3$ касательная к графику данной функции наклонена к оси абсцисс под углом 60°?

3.85. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = 3x - x^2$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$, $x_0 = -2$; г) $f(x) = x^4 - 9x^2$, $x_0 = -1$.

3.86. Определите последовательность действий и составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{2}{x-1}$ в точке $x_0 = -1$.

Правообладатель Народная асвета

3.87. Определите, принадлежит ли точка графику функции $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$, составьте уравнение касательной к графику данной функции в точке:

а) $A(1;\ 0{,}5)$; б) $A(0;\ -2)$.

3.88. Определите порядок действий и составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 5$ в точке пересечения этого графика с осью ординат.

3.89. На рисунке 149 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите значения аргумента, при которых:

а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$.

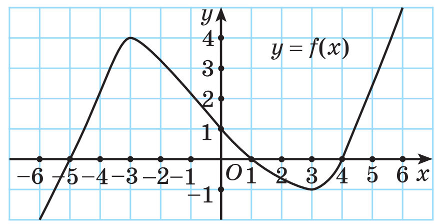


Рис. 149

3.90. Используйте алгоритм и найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = 2x^2 - 5$;

б) $f(x) = x^3 - 3x$;

в) $f(x) = x^4 - 2x^2$; г) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

3.91. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = \frac{3}{x} - 8x$.

3.92. Примените алгоритм и определите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 7$; б) $f(x) = 4x - x^4$;

в) $f(x) = 5 + 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

3.93. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = \frac{x+4}{x}$; б) $f(x) = \frac{x-5}{2x+3}$.

3.94. Докажите, что функция $y = f(x)$ возрастает на всей области определения:

а) $f(x) = 6x - 5$; б) $f(x) = x^3 + 7x$;

в) $f(x) = x^3 - x^2 + 6x + 5$; г) $f(x) = x^7 - x^4 + x + 5$.

3.95. Приведите пример функции, убывающей на всей области определения.

3.96. Используйте алгоритм и найдите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 7$; б) $f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2}$;

в) $f(x) = 5 + 3x - x^2 - \frac{x^3}{3}$; г) $f(x) = 2x^4 - x$.

Правообладатель Народная асвета

3.97. На рисунке 150 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-7; 7]$. Найдите значения аргумента, при которых $f'(x) = 0$.

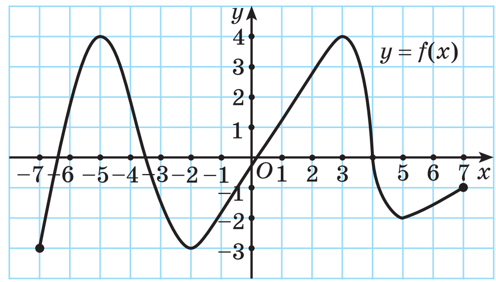


Рис. 150

3.98. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел. Известно, что $f'(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$. Найдите промежутки возрастания функции.

3.99. Используйте алгоритм и найдите точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = 8 - 6x - x^2$; б) $f(x) = 4x^2 - x^4$;

в) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; г) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

3.100. Докажите, что функция $f(x) = -x^5 - 4x^3$ не имеет экстремумов.

3.101. Найдите минимум функции $f(x) = (x+1)(x-2)^2$.

3.102. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

а) $f(x) = 12x - x^3$; б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$.

3.103. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки минимума и максимума функции $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x+1}$.

3.104. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке: а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = -3$.

3.105. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = -2$, если:

а) $f(x) = 2x^3 - x^2$;

б) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$;

в) $f(x) = \frac{x-5}{x-1}$.

3.106. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 151). Найдите $f'(x_0)$.

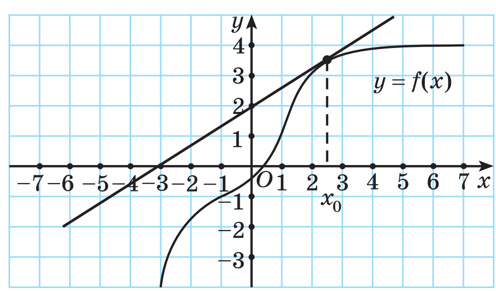


Рис. 151

Правообладатель Народная асвета

3.107. Используйте алгоритм и найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции:

а) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x$ в точке $x_0 = -1$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2$ в точке $x_0 = 1$.

3.108. Определите последовательность действий и найдите, в какой точке графика функции $f(x) = x^2 + 6x + 5$ касательная к графику данной функции наклонена к оси абсцисс под углом 45°.

3.109. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 7$, $x_0 = 2$; б) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x$, $x_0 = 0$.

3.110. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - \frac{4}{x}$ в точке $x_0 = 2$.

3.111. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{7 - x}{x - 3}$ в точке графика $A(4;\ 3)$.

3.112. Выберите последовательность действий и составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3x^3 + 2x + 5$ в точке пересечения этого графика с осью ординат.

3.113. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = 4x^2 + 2x$; б) $f(x) = x^4 - 8x^2$; в) $f(x) = 3x - x^3$.

3.114. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = 5x - \frac{4}{x}$. Можно ли записать промежутки убывания этой функции?

3.115. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4}$.

3.116. Используйте алгоритм и найдите промежутки убывания и возрастания функции $f(x) = \frac{4x + 3}{x - 1}$.

3.117. На рисунке 152 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-7;\ 7]$. Найдите значения аргумента, при которых $f'(x) = 0$.

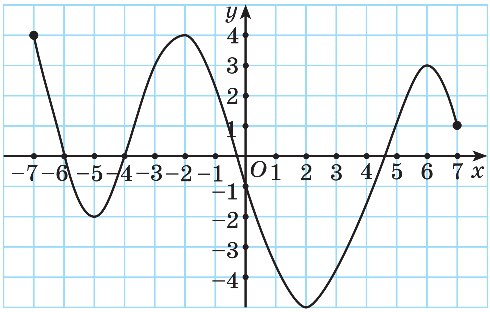


Рис. 152

3.118. Используйте алгоритм и найдите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2 + 6x - 4$;

б) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

Правообладатель Народная асвета

3.119. Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = 5 - 4x - x^2$; б) $f(x) = 3x - x^3$; в) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

3.120. Найдите максимум функции $f(x) = (x-4)^2(x-1)$. Можно ли найти минимум этой функции?

3.121. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x$; б) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 5$.

3.122*. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также точки экстремума функции $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$.

3.123. Воспользуйтесь свойствами корней n-й степени и найдите значения выражений $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[4]{m} : \sqrt[4]{n}$, если:

а) $a = 25$, $b = 5$, $m = 3$, $n = 243$;
б) $a = 0{,}27$, $b = 0{,}1$, $m = 0{,}6$, $n = 9{,}6$;
в) $a = 3\frac{4}{7}$, $b = \frac{5}{49}$, $m = \frac{5}{8}$, $n = \frac{2}{125}$.

3.124. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = (x-3)^2 - 1$; б) $f(x) = -2(x+5)^2 + 7$.

3.125. Решите уравнение:

а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0$; б) $\sqrt{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

3.126. Выполните действия:

$$\left(\frac{3a}{a+5} - \frac{8a}{a^2+10a+25}\right) : \frac{3a+7}{a^2-25} + \frac{5a-25}{a+5}.$$

§ 21. Применение производной к исследованию функций

3.127. Постройте график функции:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^3$; г) $y = |x|$.

3.128. Примените алгоритм построения графика функции $g(x) = -x^2 + 6x - 2$.

3.129. Постройте график функции $y = 3(x-1)^2$, используя преобразование графика функции $y = 3x^2$.

Правообладатель Народная асвета

Исследование функций с помощью производной позволяет изучать свойства различных функций, например целых рациональных и дробно-рациональных.

Алгоритм исследования функции с помощью производной

① Найти область определения функции.

② Исследовать функцию на четность.

③ Найти, если возможно, нули функции (точки пересечения графика с осью абсцисс), для этого решить уравнение $f(x) = 0$.

④ Найти точку пересечения графика с осью ординат, для этого вычислить значение функции в точке 0, т. е. $f(0)$.

⑤ Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции.

⑥ Построить график, используя результаты исследования.

Рассмотрим некоторые примеры исследования функций и построения их графиков.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ и постройте ее график.

Решение. ① Найдем область определения функции: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

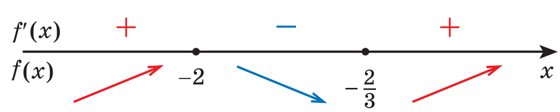
② Исследуем функцию на четность: $f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$, т. е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

③ Найдем нули функции, для этого решим уравнение $f(x) = 0$:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = 0;\ \ x\left(x^2 + 4x + 4\right) = 0;\ \ x(x+2)^2 = 0;\ \ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

④ Найдем точку пересечения графика с осью ординат, для этого вычислим: $f(0) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$.

⑤ Найдем промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции: $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$; $f'(x) = 3(x+2)\left(x + \frac{2}{3}\right)$.



$$x_{\max} = -2,\ \ f_{\max} = f(-2) = (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 0;$$

$$x_{\min} = -\frac{2}{3},\ \ f_{\min} = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1\frac{5}{27}.$$

Правообладатель Народная асвета

Полученные результаты занесем в таблицу.

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$\left(-2;\ -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	возрастает $\nearrow$	0 **max**	убывает $\searrow$	$-1\frac{5}{27}$ **min**	возрастает $\nearrow$

⑥ Построим график, используя результаты исследования:

а) Отметим точки пересечения графика функции с осями координат по результатам пунктов 3 и 4 исследования (рис. 153, *а*).

б) Отметим экстремумы по результатам пункта 5 исследования (рис. 153, *б*).

в) Достроим график на промежутках возрастания и убывания функции (рис. 153, *в*).

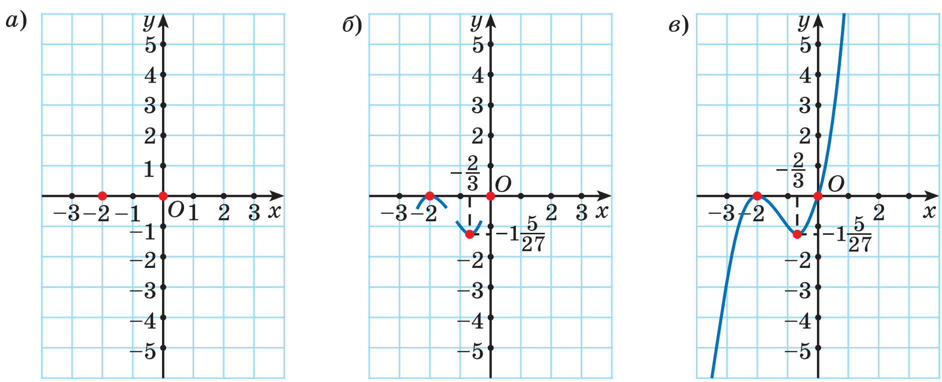


Рис. 153

Пример 2. Исследуйте функцию $f(x) = 0{,}75x^4 - x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Решение. Используем алгоритм исследования графика функции с помощью производной:

① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f(-x) = 0{,}75(-x)^4 - (-x)^3 - 3(-x)^2 = 0{,}75x^4 + x^3 - 3x^2$,

т. е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

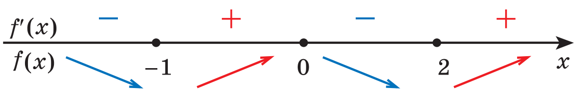
Правообладатель Народная асвета

③ $0{,}75x^4 - x^3 - 3x^2 = 0;\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0;\ x^2\left(3x^2 - 4x - 12\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4x - 12 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{2 + 2\sqrt{10}}{3}, \\ x = \dfrac{2 - 2\sqrt{10}}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x \approx 2{,}8, \\ x \approx -1{,}4. \end{array}\right.$$

④ $f(0) = 0{,}75 \cdot 0^4 - 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0.$

⑤ $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x;\ f'(x) = 3x\left(x^2 - x - 2\right);\ f'(x) = 3x(x - 2)(x + 1).$



$x_{\min} = -1,\ f_{\min} = f(-1) = 0{,}75 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -1{,}25;$
$x_{\max} = 0,\ f_{\max} = f(0) = 0{,}75 \cdot 0^4 - 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0;$
$x_{\min} = 2,\ f_{\min} = f(2) = 0{,}75 \cdot 2^4 - 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -8.$

Результаты исследования занесем в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	убывает	–1,25 **min**	возрастает	0 **max**	убывает	–8 **min**	возрастает

⑥ Построим график, используя результаты исследования (рис. 154).

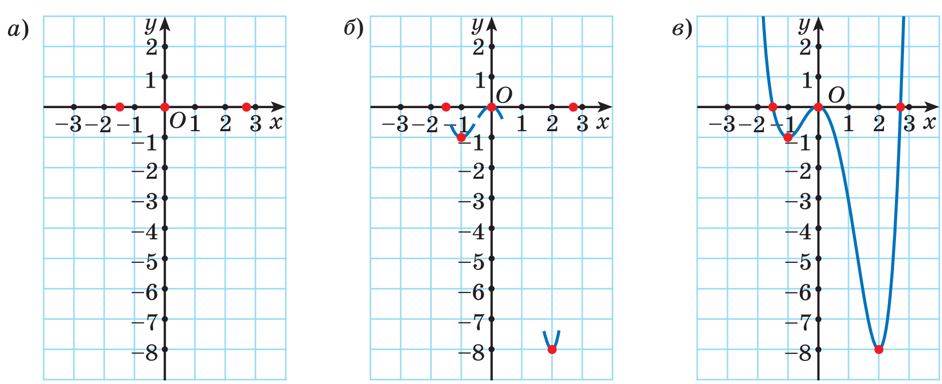


Рис. 154

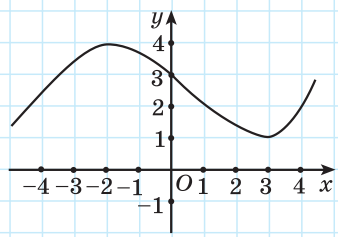
Правообладатель Народная асвета

Примеры основных заданий и их решения

1. Постройте график функции, если некоторые ее свойства отражены в таблице:

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ 3)$	3	$(3;\ +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	возрастает ↗	4 max	убывает ↘	1 min	возрастает ↗

Решение. Например:



2. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{x^4}{2}-4x^2-4{,}5$ и постройте ее график.

Решение. Используем алгоритм исследования графика функции с помощью производной:

① $D(f)=\boldsymbol{R}$.

② $f(-x)=\frac{(-x)^4}{2}-4(-x)^2-4{,}5=\frac{x^4}{2}-4x^2-4{,}5=f(x)$, значит, функция четная, т. е. ее график симметричен относительно оси ординат.

③ $\frac{x^4}{2}-4x^2-4{,}5=0$; $x^4-8x^2-9=0$. Пусть $t=x^2$, тогда уравнение принимает вид

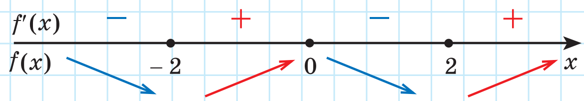
$t^2-8t-9=0$; $\left[\begin{array}{l} t=9, \\ t=-1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2=9, \\ x^2=-1; \end{array}\right.$ $x^2=9$; $\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3. \end{array}\right.$

График функции пересекает ось абсцисс в точках (3; 0) и (–3; 0).

④ $f(0)=\frac{0^4}{2}-4\cdot 0^2-4{,}5=-4{,}5$. График функции пересекает ось ординат в точке (0; –4,5).

Правообладатель Народная асвета

⑤ $f'(x) = 2x^3 - 8x$; $f'(x) = 2x(x^2 - 4)$; $f'(x) = 2x(x - 2)(x + 2)$.



$x_{\min} = -2$, $f_{\min} = f(-2) = \frac{(-2)^4}{2} - 4 \cdot (-2)^2 - 4{,}5 = -12{,}5$;

$x_{\max} = 0$, $f_{\max} = f(0) = \frac{0^4}{2} - 4 \cdot 0^2 - 4{,}5 = -4{,}5$;

$x_{\min} = 2$, $f_{\min} = f(2) = \frac{2^4}{2} - 4 \cdot 2^2 - 4{,}5 = -12{,}5$.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	убывает ↘	–12,5 **min**	возрастает ↗	–4,5 **max**	убывает ↘	–12,5 **min**	возрастает ↗

⑥ Построим график функции (рис. 155).

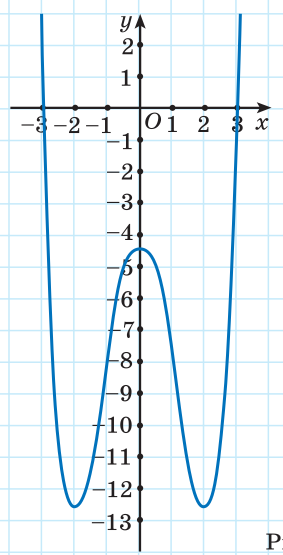


Рис. 155

Правообладатель Народная асвета

3. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 4$ и постройте ее график.

Решение. Используем алгоритм исследования графика функции с помощью производной:

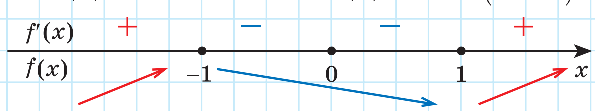
① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 + 4 = -3x^5 + 5x^3 + 4$, так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

③ График функции пересекает ось абсцисс между точками -2 и -1, так как $f(-2) < 0$, а $f(-1) > 0$.

④ $f(0) = 3 \cdot 0^5 - 5 \cdot 0^3 + 4 = 4$. График функции пересекает ось ординат в точке $(0; 4)$.

⑤ $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$; $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$; $f'(x) = 15x^2(x-1)(x+1)$.



$x_{max} = -1$, $f_{max} = f(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^3 + 4 = 6$;
$x_{min} = 1$, $f_{min} = f(1) = 3 \cdot 1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4 = 2$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	–	0	+
$f(x)$	возрастает	6 **max**	убывает	4 *точка перегиба	убывает	2 **min**	возрастает

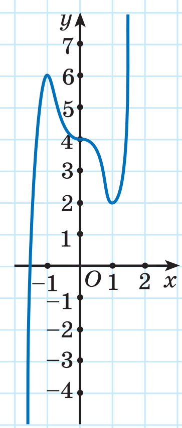


Рис. 156

⑥ Построим график функции (рис. 156).

1. Если на некотором промежутке из области определения производная функции $f(x)$ положительна, то:

а) $f(x) > 0$ на этом промежутке;

б) график функции $f(x)$ не пересекает ось абсцисс на этом промежутке;

в) функция $f(x)$ не убывает.

Выберите правильные ответы.

Правообладатель Народная асвета

2. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 157). Определите знак:

а) функции $f(x)$;

б) производной функции $f'(x)$ в отмеченных на графике точках.

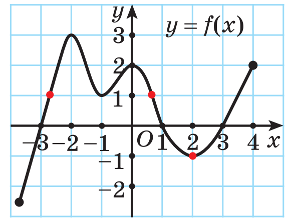


Рис. 157

3.130. Используйте алгоритм исследования графика функции с помощью производной и постройте график функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$; г) $f(x) = 2x^2 - x^3$.

3.131. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$; б) $f(x) = 2x^2 - x^3 - x$;

в) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$; г) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x + 4$.

3.132. Из графиков функций, изображенных на рисунке 158, выберите график функции $f(x) = x^3 - x$.

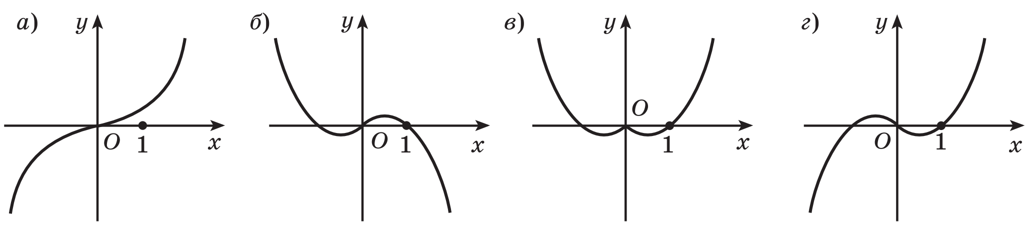


Рис. 158

3.133. Определите, сколько общих точек имеет прямая $y = 2$ и график функции:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = 2x^4 - x$;

в) $f(x) = 5x^4 - 4x^5$; г) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$.

3.134. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$; б) $f(x) = 24x^2 + 9x^4 - 2x^6$.

Правообладатель Народная асвета

3.135. Исследуйте функцию, постройте ее график и найдите количество корней уравнения $f(x) = -5$, если:

а) $f(x) = (x-1)^2(x+1)$; б) $f(x) = 4x^2(x-2)^2$.

3.136. Исследуйте функцию $y = \frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x^2 + 2x - 3$ и постройте ее график.

3.137. Из графиков функций, изображенных на рисунке 159, выберите график функции $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

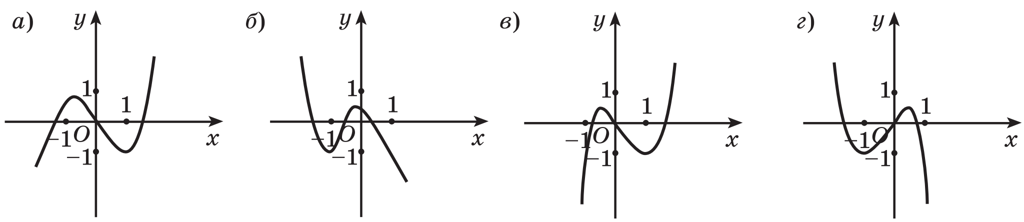


Рис. 159

3.138. Используйте алгоритм исследования графика функции с помощью производной и постройте график функции:

а) $f(x) = x^3 - 3x$; б) $f(x) = 9x - x^3$.

3.139. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$; б) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

3.140. Определите, сколько общих точек имеет прямая $y = -1$ и график функции $f(x) = x^6 - 3x^4 - 9x^2$.

3.141. Исследуйте функцию $f(x) = (2x-4)(x+1)^2$, постройте ее график и найдите количество корней уравнения $f(x) = 4$.

3.142. Исследуйте функцию $y = 6 - \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x$ и постройте ее график.

3.143. Из графиков функций, изображенных на рисунке 159, выберите график функции $f(x) = -x^3 - x^2 + x$.

3.144. Докажите тождество $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\alpha$.

3.145. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = x - 2$; б) $\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{x}$.

Правообладатель Народная асвета

3.146. Вычислите:

а) $\frac{16^2 \cdot 3^5}{12^4}$; б) $\frac{8^5 \cdot 3^4}{48^3}$; в) $\frac{15^{10}}{25^4 \cdot 3^9}$; г) $\frac{10^3 \cdot 6^2}{4^4 \cdot 5^4}$.

3.147. Сократите дробь:

а) $\frac{7x^2 - 6x - 1}{7x + 1}$; б) $\frac{1 - 4x^2}{2x^2 - 5x - 3}$.

§ 22. Наибольшее и наименьшее значения функции

3.148. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = 2\cos 3x$;

в) $y = 3\sin x - 1$; г) $y = |x| - 5$.

3.149. Найдите наибольшее значение функции:

а) $g(x) = -x^2 + 6x - 2$; б) $y = 5\cos x$;

в) $y = -2\sin x - 1$; г) $y = -|x| - 1$.

Рассмотрим задачу. Для упаковки подарка изготовили коробку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Коробку украсили, оклеив все ребра параллелепипеда цветной лентой (рис. 160). Всего потребовалось 3,6 м ленты. Найдите размеры коробки, если известно, что ее объем наибольший.

Рис. 160

Решение. Обозначим сторону основания коробки через x м ($x > 0$), а высоту — через b м. Тогда длина ленты равна сумме длин всех ребер коробки: $8x + 4b = 3{,}6$.

Объем коробки равен $V(x) = x^2 b$. Из равенства $8x + 4b = 3{,}6$ выразим $b = 0{,}9 - 2x$, тогда $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$ и $0{,}9 - 2x > 0$, т. е. $x < 0{,}45$.

Получили функцию $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$, для которой нужно найти наибольшее значение при $0 < x < 0{,}45$.

Для решения задач на отыскание наибольшего (наименьшего) значения функции применяется производная функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ для $x \in [a; b]$. Если внутри отрезка $[a; b]$ нет критических точек, тогда она возрастает или убывает на отрезке

Правообладатель Народная асвета

$[a; b]$ (рис. 161). Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигаются на концах промежутка.

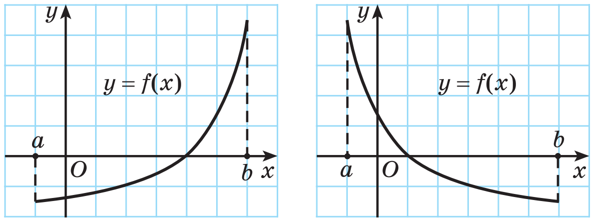


Рис. 161

Если же внутри отрезка $[a; b]$ есть конечное число критических точек, то эти точки разбивают отрезок на конечное число отрезков (рис. 162). Внутри каждого из них нет критических точек, а значит, на каждом из них функция возрастает или убывает. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции на каждом из них достигаются на концах промежутков. Концы этих промежутков являются или критическими точками данной функции, или концами отрезка $[a; b]$. Значит, наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигаются в критических точках или на концах промежутка.

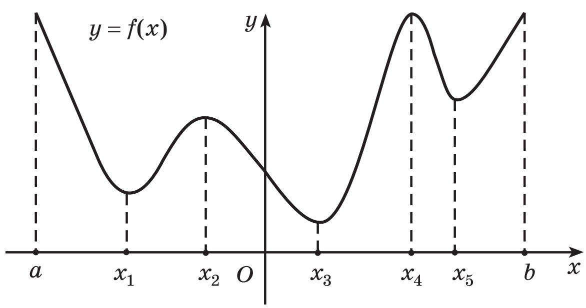


Рис. 162

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, нужно:

① Найти производную функции $f'(x)$. ② Найти точки, в которых производная равна нулю или не существует (критические точки функции). ③ Выбрать из этих точек те, которые принадлежат отрезку $[a; b]$.	Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 5$ на отрезке $[-1; 1]$. ① $f'(x) = -6x^2 - 12x$. ② $-6x^2 - 12x = 0$; $x^2 + 2x = 0$; $x(x + 2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Правообладатель Народная асвета

④ Вычислить значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка $[a;\ b]$. ⑤ Выбрать из этих значений наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ (обозначается $\max\limits_{[a;\ b]} f(x)$) и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ (обозначается $\min\limits_{[a;\ b]} f(x)$).	Точек, в которых производная не существует, нет. ③ $x_1 = 0 \in [-1; 1],\ x_2 = -2 \notin [-1; 1]$. ④ $f(0) = -2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5;$ $f(-1) = -2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 5 = 1;$ $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 5 = -3.$ ⑤ $\max\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = f(0) = 5;$ $\min\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = f(1) = -3.$

Вернемся к задаче, рассмотренной в начале параграфа.

Для функции $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$ найдем наибольшее значение на отрезке $[0;\ 0{,}45]$ (присоединим концы промежутка).

① Найдем производную функции $V'(x)$:

$$V'(x) = \left(x^2(0{,}9 - 2x)\right)' = \left(-2x^3 + 0{,}9x^2\right)' = -6x^2 + 1{,}8x.$$

② Найдем точки, в которых производная равна нулю или не существует (критические точки функции):

$$-6x^2 + 1{,}8x = 0;\ \ x^2 - 0{,}3x = 0;\ \ x(x - 0{,}3) = 0;\ \ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 0{,}3. \end{array}\right.$$

Точек, в которых производная не существует, нет.

③ Выберем из этих точек те, которые принадлежат отрезку $[0;\ 0{,}45]$:

$$x = 0 \in [0;\ 0{,}45],\ \ x = 0{,}3 \in [0;\ 0{,}45].$$

④ Вычислим значение функции в выбранных критических точках и на концах отрезка $[0;\ 0{,}45]$:

$$V(0) = 0^2 \cdot (0{,}9 - 2 \cdot 0) = 0;$$

$$V(0{,}3) = 0{,}3^2 \cdot (0{,}9 - 2 \cdot 0{,}3) = 0{,}09 \cdot 0{,}3 = 0{,}027;$$

$$V(0{,}45) = 0{,}45^2 \cdot (0{,}9 - 2 \cdot 0{,}45) = 0.$$

⑤ Выберем из этих значений наибольшее:

$$\max\limits_{[0;\ 0{,}45]} V(x) = V(0{,}3) = 0{,}027.$$

Таким образом, наибольшее значение функции $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$ для $x \in [0;\ 0{,}45]$ достигается при $x = 0{,}3$.

Найдем значение b. Если $x = 0{,}3$, то $b = 0{,}9 - 2x = 0{,}9 - 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$.

Ответ: коробка имеет наибольший объем, если все ее ребра равны по 0,3 м.

Правообладатель Народная асвета

Пример 1. Участок земли прямоугольной формы одной стороной граничит с рекой. При каких размерах площадь участка будет наибольшей, если для его ограждения выделена сетка длиной 900 м?

Решение. Наибольшее значение нужно найти для площади прямоугольника.

Длина изгороди равна $2a + b$, где a и b — длины сторон участка прямоугольной формы, причем b — сторона участка, прилегающая к берегу реки.

Площадь прямоугольника: $S = ab$.

Выразим b из условия $2a + b = 900$ и получим $b = 900 - 2a$, тогда $S(a) = a(900 - 2a)$.

По смыслу задачи $a > 0$ и $b > 0$, т. е. $900 - 2a > 0$; $a < 450$, значит, $0 < a < 450$.

Рассмотрим функцию $S(a) = a(900 - 2a)$ и найдем наибольшее значение этой функции для $a \in [0; 450]$.

① $S'(a) = (a(900 - 2a))' = (900a - 2a^2)' = 900 - 4a$.

② $900 - 4a = 0$; $a = 225$.

③ $225 \in [0; 450]$.

④ $S(225) = 225 \cdot (900 - 2 \cdot 225) = 101\,250$;

$S(0) = 0 \cdot (900 - 2 \cdot 0) = 0$;

$S(450) = 450 \cdot (900 - 2 \cdot 450) = 0$.

⑤ $\max\limits_{[0;\,450]} S(a) = S(225) = 101\,250$.

Таким образом, наибольшее значение функции $S(a) = a(900 - 2a)$ для $a \in [0; 450]$ достигается при $a = 225$.

Найдем значение b. Если $a = 225$, то $b = 900 - 2a = 900 - 2 \cdot 225 = 450$.

Ответ: площадь участка будет наибольшей, если сторона, прилегающая к берегу реки, будет равна 450 м, а другая сторона — 225 м.

Алгоритм решения задач на вычисление наибольшего и наименьшего значения величины

① Выделить в условии задачи величину, для которой нужно найти наибольшее (наименьшее) значение.

② Записать выражение этой величины в соответствии с условием задачи: получить функцию от одной переменной.

③ Найти промежуток изменения переменной функции.

④ Исследовать функцию на промежутке.

⑤ Записать ответ в соответствии с условием задачи.

Правообладатель Народная асвета

Пример 2. На странице печатный текст должен занимать 150 см^2. Верхнее и нижнее поля страницы равны по 3 см, правое и левое — по 2 см. Какими должны быть размеры страницы, чтобы ее общая площадь была наименьшей?

Решение. ① Наименьшее значение нужно найти для площади страницы.

② $S = ab$, где a и b — размеры страницы.

По условию задачи $(a - 6)(b - 4) = 150$, откуда $b = \dfrac{150}{a-6} + 4$.

Тогда $S(a) = a \cdot \left(\dfrac{150}{a-6} + 4\right)$.

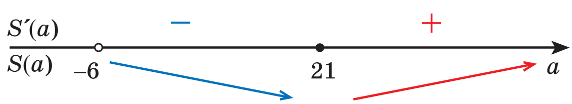
③ По смыслу задачи $a > 6$, т. е. $a \in (6; +\infty)$.

④ Исследуем функцию $S(a) = a \cdot \left(\dfrac{150}{a-6} + 4\right)$ на промежутке $(6; +\infty)$.

$$S'(a) = \left(a \cdot \left(\frac{150}{a-6} + 4\right)\right)' = \left(\frac{4a^2 + 126a}{a-6}\right)' = \frac{\left(4a^2 + 126a\right)'(a-6) - (a-6)'\left(4a^2 + 126a\right)}{(a-6)^2} =$$

$$= \frac{(8a + 126)(a-6) - 1 \cdot \left(4a^2 + 126a\right)}{(a-6)^2} = \frac{4a^2 - 48a - 756}{(a-6)^2} = \frac{4(a-21)(a+9)}{(a-6)^2}.$$

Точка $a = 21$ — единственная критическая точка данной функции на промежутке $(6; +\infty)$, являющаяся точкой минимума.



Следовательно, в этой точке функция $S(a) = a \cdot \left(\dfrac{150}{a-6} + 4\right)$ на промежутке $(6; +\infty)$ достигает наименьшего значения.

Общая площадь страницы будет наименьшей, если $a = 21$ см, а $b = \dfrac{150}{a-6} + 4 = 14$ (см).

⑤ *Ответ*: 14 см и 21 см.

Примеры основных заданий и их решения

1. С помощью рисунка 163 (см. с. 270), на котором изображен график функции $y = f(x)$, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезках:

а) $[2; 3]$; б) $[-3; 3]$; в) $[-7; 1]$.

Правообладатель Народная асвета

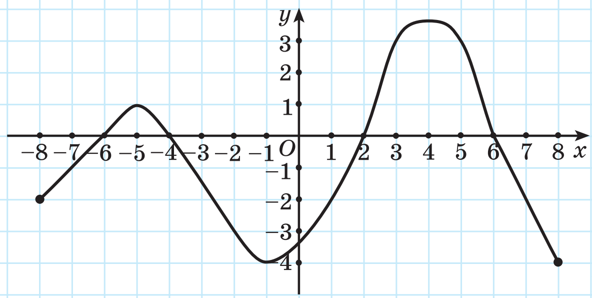


Рис. 163

Решение. а) $\max\limits_{[2;\,3]} f(x) = f(3) = 3;$ $\min\limits_{[2;\,3]} f(x) = f(2) = 0;$

б) $\max\limits_{[-3;\,3]} f(x) = f(3) = 3;$ $\min\limits_{[-3;\,3]} f(x) = f(-1) = -4;$

в) $\max\limits_{[-7;\,1]} f(x) = f(-5) = 1;$ $\min\limits_{[-7;\,1]} f(x) = f(-1) = -4.$

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

Решение. ① $f'(x) = 12x^2 - 4x^3.$

② $12x^2 - 4x^3 = 0;$ $3x^2 - x^3 = 0;$ $x^2(3 - x) = 0;$ $x_1 = 0,$ $x_2 = 3.$
Точек, в которых производная не существует, нет.

③ $x_1 = 0 \in [-1;\ 4],$ $x_2 = 3 \in [-1;\ 4].$

④ $f(0) = 5 + 4 \cdot 0^3 - 0^4 = 5;$ $f(3) = 5 + 4 \cdot 3^3 - 3^4 = 32;$

$f(-1) = 5 + 4 \cdot (-1)^3 - (-1)^4 = 0;$ $f(4) = 5 + 4 \cdot 4^3 - 4^4 = 5.$

⑤ $\max\limits_{[-1;\,4]} f(x) = f(3) = 32;$ $\min\limits_{[-1;\,4]} f(x) = f(-1) = 0.$

3. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать 500 л (дм^3) жидкости. В каком случае на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

Решение. ① Нужное количество материала для изготовления бака (без отходов) равно площади поверхности бака. Наименьшее значение нужно найти для площади поверхности бака.

② Площадь поверхности бака $S = a^2 + 4ah$, где a — сторона основания, h — высота. Объем бака $V = a^2h$. Выразим h и получим $h = \frac{500}{a^2}$, откуда $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$.

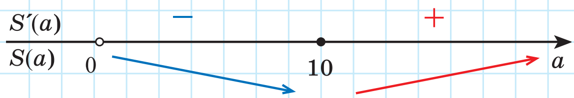
Правообладатель Народная асвета

③ По смыслу задачи $a > 0$, т. е. $a \in (0; +\infty)$.

④ Исследуем функцию $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

$S'(a) = 2a - \frac{2000}{a^2} = \frac{2a^3 - 2000}{a^2} = \frac{2(a^3 - 1000)}{a^2}$. $S'(a) = 0$ при $a = 10$.

Точка $a = 10$ — единственная критическая точка функции $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$ на промежутке $(0; +\infty)$, и она является точкой минимума.



Значит, в этой точке функция $S(a) = a^2 + \frac{2000}{a}$ на промежутке $(0; +\infty)$ достигает наименьшего значения. Таким образом, в том случае, когда сторона основания бака $a = 10$ дм, а высота бака $h = \frac{500}{a^2} = 5$ дм, на изготовление бака уйдет наименьшее количество материала.

④ *Ответ*: на изготовление бака уйдет наименьшее количество материала, если сторона его основания будет равна 10 дм, а высота — 5 дм.

?

1. Если функция имеет на отрезке точку максимума, то эта функция:
а) принимает наибольшее значение в этой точке; б) принимает наибольшее значение на одном из концов отрезка; в) не принимает наибольшего значения; г) принимает наибольшее значение на конце отрезка или в точке максимума. Выберите правильный ответ.

2. Если функция имеет на отрезке точку минимума, то эта функция:
а) принимает наименьшее значение в этой точке; б) принимает наименьшее значение на одном из концов отрезка; в) не принимает наименьшего значения; г) принимает наименьшее значение на конце отрезка или в точке минимума. Выберите правильный ответ.

3.150. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^3 + 2$ на отрезке $[-1; 4]$.

3.151. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -2x^2 + 8x - 7$ на отрезках:
а) $[-1; 4]$; б) $[-5; 1]$.

Правообладатель Народная асвета

3.152. На отрезке $[-6; -0{,}5]$ найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = \frac{6}{x}$; б) $f(x) = -\frac{12}{x}$.

3.153. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 6x - 7$ на отрезке:

а) $[1; 6]$; б) $[-2; 3]$; в) $[-1; 7]$; г) $[5; 7]$.

3.154. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке:

а) $[-2; 0]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 4]$; г) $[-3; -2]$.

3.155. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на соответствующем отрезке:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$, $[-4; 4]$; б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$, $[2; 4]$;

в) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1; 2]$; г) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$, $[-2; 2]$.

3.156. Найдите два числа, сумма которых равна 40, а произведение — наибольшее из возможных.

3.157. Число 18 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и квадрата второго слагаемого было наибольшим.

3.158. Забором длиной 60 м нужно огородить прямоугольную площадку наибольшей площади. Найдите размеры этой площадки.

3.159. Декоративной изгородью длиной 36 м нужно огородить с трех сторон прямоугольную клумбу наибольшей площади. Найдите размеры этой клумбы.

3.160. Площадь прямоугольного участка, выделенного для экспериментального овощеводства, равна 1 га. Найдите, какими должны быть размеры участка, чтобы на изгородь ушло наименьшее количество сетки.

3.161. Правилами перевозки пассажиров в метрополитене предусмотрено, что бесплатно можно проводить ручную кладь, размеры которой в сумме измерений по длине, ширине и высоте не превосходят 120 сантиметров. Найдите размеры ящика с квадратным дном, который удовлетворяет этому условию и имеет наибольший объем.

3.162. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 24 дм^2, найдите параллелепипед наибольшего объема.

Правообладатель Народная асвета

3.163. Металлический контейнер с крышкой объемом 72 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относятся как 1 : 2. При каких размерах контейнера на покраску его полной поверхности потребуется меньше всего краски?

3.164. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 2$ на отрезке $[-5; 2]$.

3.165. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^2 - 24x + 1$ на отрезках:

а) $[-1; 4]$; б) $[-5; 1]$.

3.166. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -\frac{8}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

3.167. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ на отрезке:

а) $[-1; 3]$; б) $[-4; -1]$; в) $[-3; 1]$; г) $[2; 3]$.

3.168. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ на отрезке:

а) $[-3; -1]$; б) $[-1; 0]$; в) $[-1; 3]$; г) $[-3; 3]$.

3.169. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1{,}5x^2 + 2x + 3$ на отрезке $[-3; 0]$.

3.170. Найдите два числа, сумма которых равна 60, а произведение — наибольшее из возможных.

3.171. Представьте число 10 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых была наименьшей.

3.172. Забором длиной 100 м нужно огородить прямоугольную площадку наибольшей площади. Найдите размеры этой площадки.

3.173. Площадь прямоугольника равна 81 м^2. Найдите наименьший возможный периметр этого прямоугольника.

3.174. Каркас деревянного ящика укрепили, обив все его ребра металлической лентой. Всего использовано 10 м ленты. Найдите размеры ящика, зная, что он имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, а его объем — наибольший.

Правообладатель Народная асвета

3.175. Вычислите:

а) $5\sqrt{64} - 3\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[6]{2,25} : \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

3.176. Решите уравнение:

а) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$; б) $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$.

3.177. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа: а) -9 и 7; б) $3\sqrt{7}+1$ и $3\sqrt{7}-1$.

3.178. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение производной функции в точке;
- знать физический смысл производной;
- знать формулы для вычисления производной;
- знать правила дифференцирования;
- знать геометрический смысл производной;
- уметь использовать алгоритм вычисления производной функции по определению;
- уметь применять правила дифференцирования;
- уметь решать задачи на применение физического и геометрического смысла производной;
- уметь применять алгоритмы для определения промежутков монотонности, точек экстремума и экстремумов функций, построения графиков функций;
- уметь применять алгоритмы нахождения наибольшего и наименьшего значений функций с помощью производной.

Я проверяю свои знания

1. Функция задана формулой $f(x) = 5x^2 - 6x$. Выберите верное равенство:

а) $f'(1) = -1$; б) $f'(1) = 4$; в) $f'(1) = 5$; г) $f'(1) = 1$.

2. С помощью графика функции $y = f(x)$, изображенного на рисунке 164, найдите:

а) значения аргумента, при которых $f'(x) = 0$;

Правообладатель Народная асвета

б) значения аргумента, при которых $f'(x) < 0$;

в) значения аргумента, при которых $f'(x) > 0$.

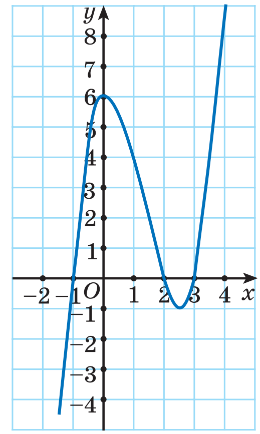


Рис. 164

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 7 - x^2$ на отрезке $[-1; 2]$.

4. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \frac{3}{x} + 2x - 1$; б) $f(x) = 4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{8}$;

в) $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x - 1}$; г) $f(x) = x^3(2x^2 + 5)$.

5. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 4x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

6. Тело движется по закону $s(t) = 3t^3 - t^2 + 5t$ (путь измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

7. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$.

8. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ и постройте ее график.

9. К графику функции $f(x) = 6x - x^2$ проведены две касательные. Первая касательная проведена в точке на графике с абсциссой $x_0 = 2$, вторая — в точке максимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

10. Найдите, при каких значениях a функция $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax - 9$ возрастает для всех действительных x.

Математика вокруг нас*

1. Музыкальный строй — это система сопоставления нот и звуковых частот. Периодом музыкального строя является октава — интервал между нотами, частоты которых отличаются в 2 раза. Октава состоит из 12 ступеней. На клавиатуре рояля она представлена семью белыми и пятью черными клавишами (рис. 165). Отношение звуковых частот соседних нот для фортепьяно равно $\sqrt[12]{2}$. Ноте «ля» первой октавы соответствует частота 440 Гц. Найдите частоту ноты: а) «до» 2-й октавы; б) «ля» 3-й октавы.

Рис. 165

* По материалам интернет-источников.

Правообладатель Народная асвета

2. Как вы думаете, какую часть объема апельсина составляет его кожура?

Пусть радиус апельсина равен 5 см, а толщина кожуры — 5 мм (рис. 166). Тогда

$$V_{\text{ап}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 125;$$

$$V_{\text{к}} = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(5^3 - 4{,}5^3\right) = \frac{4}{3}\pi\frac{271}{8};$$

$$\frac{V_{\text{к}}}{V_{\text{ап}}} \approx \frac{271}{1000}.$$

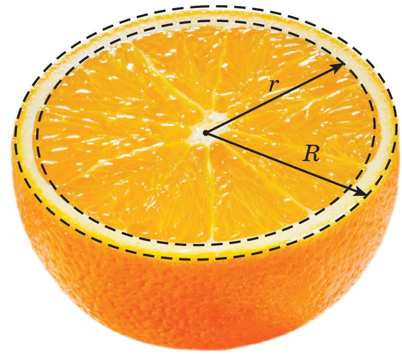


Рис. 166

Следовательно, кожура составляет почти треть объема апельсина! Найдите отношение толщины кожуры к радиусу апельсина, если ее объем составляет половину объема апельсина.

3. Известно, что при одинаковой плотности вещества размеры двух подобных тел относятся как кубические корни из их масс. Так, если один арбуз весит вдвое больше другого, то его диаметр будет всего лишь чуть больше чем на четверть (на 26 %) превышать диаметр другого арбуза; и на глаз будет казаться, что разница в весе не столь существенна. Поэтому при отсутствии весов (продажа на глазок) обычно более выгодно покупать бóльший плод.

4. Если рулон обоев разрезать наискосок и развернуть его, то край бумаги окажется разрезанным по синусоиде (рис. 167). На этом свойстве основано решение многих практических задач.

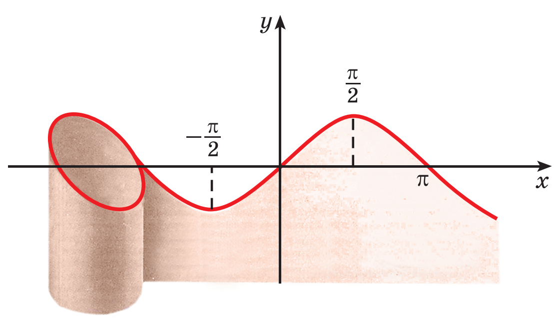


Рис. 167

Дополнительные материалы к учебному пособию «Алгебра, 10» можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика. 10 класс».

Правообладатель Народная асвета

ОТВЕТЫ

Глава 1. Тригонометрия

1.24. а) $-270°$; б) $-810°$. **1.26.** а) $\alpha = 45°$; $\beta = 180°$; б) $\alpha = -315°$; $\beta = -180°$; в) $\alpha = 405°$; $\beta = 540°$. **1.28.** а) $\alpha = 90° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\alpha = -68° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\alpha = 318° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\alpha = -125° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1.29.** а) $45°$; б) $-110°$; в) $-450°$. **1.30.** а) $\frac{\pi}{10}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) -6π. **1.32.** а) $\approx 228°$; б) $\approx -28{,}5°$. **1.33.** а) Третьей; б) первой; в) второй; г) четвертой; д) третьей; е) четвертой; ж) второй; з) первой. **1.34.** а) Первой; б) третьей; в) третьей; г) первой. **1.35.** $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\beta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1.36.** $12°$; $36°$; $132°$. **1.37.** а) $-720°$; -4π; б) $-43\ 200°$; -240π. **1.66.** а) $\sin\alpha = 0{,}8$; $\cos\alpha = -0{,}6$; б) $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$. **1.69.** а) 1; б) 1; в) 0; г) -1; д) -1; е) 0. **1.72.** а) 0; б) 1; в) 0; г) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; е) $-\frac{1}{4}$. **1.73.** а) -1; б) -1; в) 2; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $-\frac{1}{4}$; е) $-\frac{1}{2}$. **1.74.** $\frac{2}{5}$; $-0{,}3$; 1; $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **1.75.** $\sin\alpha > 0$; $\cos\alpha > 0$; $\sin\beta = 0$; $\cos\beta < 0$; $\sin\gamma > 0$; $\cos\gamma < 0$; $\sin\varphi < 0$; $\cos\varphi > 0$. **1.76.** а) $\cos 1125° > 0$; б) $\sin\left(-\frac{12\pi}{17}\right) < 0$; в) $\sin 3 > 0$; г) $\cos\frac{15\pi}{8} > 0$. **1.77.** а) $\sin 130° > \sin 140°$; б) $\cos 40° > \cos 50°$; в) $\cos(-80°) > \cos(-81°)$; г) $\sin(-22°) > \sin(-43°)$. **1.78.** а) Второй; б) третьей. **1.79.** а) $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin 405° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 405° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.80.** $30°$; $-210°$; $-330°$; $750°$. **1.82*.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.104.** а) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$. **1.106.** а) 2,5; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.107.** а) Не существует; б) не существует; в) 0; г) 0. **1.108.** а) -1; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.110.** а) $\operatorname{ctg} 55° > \operatorname{ctg} 63°$; б) $\operatorname{tg} 42° < \operatorname{tg} 68°$; в) $\operatorname{ctg} 200° > \operatorname{ctg} 225°$; г) $\operatorname{tg}(-35°) > \operatorname{tg}(-55°)$. **1.111.** $\operatorname{tg}\alpha > 0$; $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; $\operatorname{tg}\beta > 0$; $\operatorname{ctg}\beta > 0$; $\operatorname{tg}\gamma < 0$; $\operatorname{ctg}\gamma < 0$; $\operatorname{tg}\varphi < 0$; $\operatorname{ctg}\varphi < 0$. **1.112.** а) $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{9} \cdot \operatorname{ctg}\frac{11\pi}{10} < 0$; б) $\operatorname{tg}(-511°) \cdot \operatorname{tg}(-183°) < 0$; в) $\operatorname{ctg} 2 \cdot \operatorname{tg} 5 > 0$. **1.113.** а) Третьей; б) второй. **1.139.** $\cos\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$. **1.140.** а) $\sin^2\alpha$; б) $-\cos^2\alpha$; в) 8; г) $3\operatorname{tg}^2\alpha$; д) $\cos\alpha$; е) $\sin^2\alpha$; ж) $2\cos^2\alpha$; з) $\cos^2\alpha$. **1.141.** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$. **1.143.** а) 1; б) $\sin^2\alpha$; в) -1; г) $\frac{1}{\sin\alpha}$; д) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; е) $\frac{2}{\cos\alpha}$; ж) 6. **1.144.** $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. **1.145.** а) $\cos^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha$; в) 1.**1.146.** $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$. **1.147*.** $-\frac{5}{9}$. **1.204.** а) Да; б) да; в) нет. **1.206.** а) $[-6;\ -4]$; б) $[2;\ 4]$; в) $[-11;\ -3]$; г) $[-3;\ 7]$; д) $[-3{,}5;\ -0{,}5]$; е) $[-2{,}2;\ 4{,}2]$. **1.207.** а) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [-4;\ 4]$; б) $D(g) = \boldsymbol{R}$, $E(g) = [-4;\ -2]$; в) $D(h) = \boldsymbol{R}$, $E(h) = [4;\ 10]$.

Правообладатель Народная асвета

1.208. а) 3; –3; б) 2; –2; в) 9; 1. **1.209.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) –1. **1.211** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 0. **1.212.** а) Нечетная; б) четная; в) нечетная; г) ни четная, ни нечетная. **1.213.** а) 1; б) –1; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 0. **1.214.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) да; $-\frac{9\pi}{2}$. **1.215.** а) $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1.216.** а) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) < 0$; б) $\sin\frac{7\pi}{6} < 0$; в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) > 0$; г) $\sin\frac{11\pi}{5} > 0$. **1.217.** $\sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 4 < 0$. **1.218.** а) $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) < \sin\frac{2\pi}{7}$; б) $\sin\frac{3\pi}{5} > \sin\frac{9\pi}{10}$. **1.219.** $\sin(-221°)$; $\sin(-181°)$; $\sin(-100°)$. **1.222.** а) Да; б) да; в) да. **1.224.** а) [–6; –4]; б) [2,5; 3,5]; в) [–7,2; 0,8]; г) [–1; 9]. **1.225.** а) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [-3;\ 3]$; б) $D(g) = \boldsymbol{R}$, $E(g) = [4;\ 6]$; в) $D(h) = \boldsymbol{R}$, $E(h) = [-8;\ 2]$. **1.226.** а) 5; –5; б) 3; –3; в) 1; –3. **1.227.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) –1. **1.229.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0. **1.230.** а) Четная; б) нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная. **1.231.** а) –1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.232.** а) $-\frac{11\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; б) -4π; 0. **1.233.** а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1.234.** а) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) > 0$; б) $\cos\frac{5\pi}{6} < 0$; в) $\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) < 0$; г) $\cos\frac{15\pi}{7} > 0$. **1.235.** $\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos\frac{4\pi}{5} > 0$. **1.236.** а) $\cos 0{,}5 > \cos 1$; б) $\cos(-2) < \cos(-1)$. **1.237.** $\cos 57°$; $\cos 32°$; $\cos 20°$. **1.239.** а) $D = \boldsymbol{R}$; $E = [-7;\ 1]$; б) $D = \boldsymbol{R}$; $E = [1;\ 2]$. **1.240.** а) $y = 6$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y = -6$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $y = 4$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y = -4$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $y = 8{,}7$ при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y = -8{,}7$ при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $y = \frac{1}{5}$ при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $y = -\frac{1}{5}$ при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1.279.** а) Да; б) да; в) нет. **1.280.** а) Да; б) нет; в) нет. **1.282.** а) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $E = \boldsymbol{R}$; б) $x \neq 4\pi + 8\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $E = \boldsymbol{R}$. **1.283.** а) $\sqrt{3}$; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 0. **1.284.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 0. **1.285.** а) 0; б) –1; в) $-\sqrt{3}$. **1.286.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) да. **1.287.** $\mathrm{tg}(-1) \cdot \mathrm{tg}\,0{,}5 \cdot \mathrm{tg}\,1 < 0$. **1.288.** $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5} < \mathrm{tg}\frac{4\pi}{9}$. **1.289.** $\mathrm{tg}\,67°$; $\mathrm{tg}\,23°$; $\mathrm{tg}(-37°)$. **1.291.** а) Да; б) да; в) нет. **1.292.** а) Нет; б) да; в) нет. **1.294.** а) $x \neq \frac{\pi n}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $E = \boldsymbol{R}$; б) $x \neq 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $E = \boldsymbol{R}$. **1.295.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) 0. **1.296.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) –1; в) 0; г) $-\sqrt{3}$. **1.297.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) –1. **1.298.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) да. **1.299.** $\mathrm{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) \cdot \mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{7} < 0$. **1.300.** $\mathrm{ctg}(-100)° > \mathrm{ctg}(-30°)$. **1.301.** $\mathrm{ctg}\,2$; $\mathrm{ctg}\,1$; $\mathrm{ctg}\,0{,}5$. **1.322.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{\pi}{3}$; е) $\frac{2\pi}{3}$; ж) $\frac{\pi}{2}$; з) π; и) 0. **1.323.** а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{8\pi}{3}$. **1.324.** а) $-\pi$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 0; г) $\frac{3\pi}{2}$. **1.325.** а) $(-2\pi; -\pi)$; б) $\left[-\frac{4\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right]$. **1.326.** а) [–0,25; 0]; б) [12; 16]. **1.327.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) 0; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) 0. **1.328.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) 0; г) –1; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) 0. **1.329.** $\frac{4\pi}{3}$. **1.330.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.351.** а) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

Правообладатель Народная асвета

в) $(-1)^n \frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\pm\frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{9} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; е) нет корней; ж) $(-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; з) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; и) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.352.** а) $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{14\pi}{3} + 8\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $3\operatorname{arctg}7 + 3\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{1}{5}\operatorname{arcctg}2 + \frac{\pi n}{5},\ n \in \boldsymbol{Z}$; е) $-\frac{\pi}{10} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.353.** а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{2} \pm \pi + 8\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.354.** $\frac{\pi}{12} \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.355.** а) $2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; д) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; ж) $-\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; з) $-\operatorname{arctg}2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.356.** а) $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n\, 2\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.357.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\operatorname{arctg}3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.358*.** а) 240°; –120°; б) 67,5°; –22,5°; в) 495°; –45°. **1.386.** а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) $\sin\alpha$; е) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **1.387.** а) $-\cos\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\sin\alpha$; г) $-\sin\alpha$; д) $\operatorname{tg}\alpha$; е) $-\operatorname{tg}\alpha$. **1.388.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) –1; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\frac{1}{2}$. **1.389.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sqrt{3}$; е) $-\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) –1. **1.390.** а) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha$; в) $\sin^2\alpha$. **1.391.** а) 0; б) 0. **1.392.** а) 0; б) 1; в) 0; г) 1. **1.393.** а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\operatorname{arcctg}\frac{3}{5} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.394.** а) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) 7. **1.395.** а) $-\sin^2\alpha$; б) –1. **1.396.** $\frac{12}{5}$. **1.397.** а) –1; б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; д) –2; е) $\operatorname{tg}\alpha$. **1.398.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.399.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.400*.** 25. **1.437.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) –1. **1.438.** а) $\cos\alpha\cos\beta$; б) $-\sin\alpha\sin\beta$. **1.439.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; в) $2+\sqrt{3}$. **1.440.** а) $\frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.441.** а) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; б) $-\frac{15\sqrt{3}+8}{34}$. **1.442.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) –1. **1.443.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$; б) $2\sin\alpha - 2\cos\alpha$. **1.444.** $E = [7; 9]$. **1.445.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1. **1.446.** а) $-\frac{16}{65}$; б) 2. **1.447.** а) $2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.448.** $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.450.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **1.452.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.453.** $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. **1.454.** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Правообладатель Народная асвета

1.455. $\sqrt{2}$. **1.457.** 1. **1.458.** 0. **1.459*.** π. **1.460*.** 3. **1.496.** а) $\sin 12\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $2\operatorname{ctg}\alpha$; д) $\cos 6\alpha$; е) $-\cos\alpha$; ж) 1; з) $\sin 2\alpha$; и) $\operatorname{tg} 8\alpha$; к) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; л) $\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. **1.497.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **1.498.** а) 0,96; б) $-\frac{47}{49}$. **1.499.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; е) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **1.500.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) 2. **1.502.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) πk, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; е) πk, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **1.503.** а) $\frac{1}{2\cos\alpha}$; б) 1; в) $-\sin 2\alpha$; г) $\operatorname{tg} 2\alpha$. **1.505.** а) 2; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) 1. **1.506.** а) 4; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.507.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **1.508.** $-\frac{25}{23}$. **1.509.** $\frac{8}{9}$. **1.510.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\operatorname{arctg} 5+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **1.511.** а) 0; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $-\cos 4\alpha$. **1.512.** $\frac{\pi k}{9}$, $k \in \mathbf{Z}$; $-\frac{1}{9}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi n}{9}$, $n \in \mathbf{Z}$. **1.533.** а) $2\cos 6\alpha\cos 2\alpha$; б) $-2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}$; в) $2\sin 2\alpha\sin\alpha$; г) $2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{9\alpha}{2}$. **1.534.** а) 0; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **1.536.** а) $\frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$; πn, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{7\pi}{48}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{13\pi}{96}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $-20°+360°n$, $n \in \mathbf{Z}$. **1.537.** а) 0; б) 0; в) 1; г) 1. **1.538.** а) $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$; б) $2\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg} 3\alpha$. **1.539.** а) 0; б) 0; в) $\sqrt{3}$; г) 1; д) 1; е) $\sqrt{3}$. **1.540.** а) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$; $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; πn, $n \in \mathbf{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **1.541.** $-4\sin 3\alpha$. **1.542.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Я проверяю свои знания

1. б); в). **2.** а) 70°; б) ≈ −159,6°; в) $-\frac{4\pi}{3}$. **3.** а) $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$; в) −2. **4.** а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **5.** а) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $-\frac{1}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $-\frac{33}{65}$. **7.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $-\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; в) $\frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbf{Z}$; д) πk, $k \in \mathbf{Z}$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; е) $\frac{\pi}{24}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; ж) $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** $\sqrt{3}$. **10.** $\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Правообладатель Народная асвета

Глава 2. Корень n-й степени из числа

2.24. а); б); в); д); е). **2.25.** а); в); г); д). **2.26.** а) $-\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[4]{7}$; б) 0; в) $\sqrt[7]{4}$; г) нет корней. **2.27.** а) 3; б) $\frac{1}{2}$; в) 10; г) 2; д) 4; е) –3; ж) –1; з) 0,2; и) –0,5; к) 0; л) –0,1; м) –30; н) 2; о) –0,6. **2.28.** а) 0; б) –2; в) 10; г) –30; д) 0,101; е) $1\frac{39}{125}$. **2.29.** а) $\frac{5}{6}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) –2,5. **2.30.** а) 2; 20; –0,2; б) –0,5; –5; 0,05. **2.31.** а) 1; б) 12; в) 1; г) 10; д) –5; е) –2,6; ж) $-\frac{8}{15}$; з) 0,1; и) 20; к) 0,05; л) 0,12; м) –45. **2.32.** а) $1\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{23}{30}$. **2.33.** а) 2; б) –2. **2.34.** а) 7; б) 10; в) 5; г) –7; д) 192; е) $\frac{2}{27}$. **2.35.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $1\frac{17}{20}$; в) –0,5; г) –11,6. **2.37.** а) –279,9; б) $19\frac{13}{15}$. **2.76.** а) 15; б) 12; в) 0,3; г) 2,8; д) 12; е) 48,6. **2.77.** а) 2; б) 4; в) 5; г) 3; д) 0,5; е) –3. **2.78.** а) $6\frac{2}{3}$; б) 150; в) $\frac{1}{20}$; г) 25. **2.79.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 5; г) –0,4. **2.80.** а) 1,5; $16\frac{2}{3}$; б) 200; 50. **2.81.** а) $116\frac{2}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$. **2.82** а) 6; б) 6; в) –15; г) 6; д) 2,5; е) 1,5. **2.83.** а) 14; б) –30; в) –80; г) 14. **2.84.** а) 7; б) 3. **2.85.** а) $\sqrt[8]{9}$; б) $\sqrt[12]{27}$; в) $\sqrt[16]{81}$. **2.86.** а) $\sqrt[10]{49}$, $\sqrt[10]{32}$ и $\sqrt[10]{3}$; б) $\sqrt[24]{729}$, $\sqrt[24]{625}$ и $\sqrt[24]{343}$. **2.87.** а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[4]{5^3}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\sqrt[3]{2}$. **2.88.** а) 5; б) 3; в) 9; г) 100. **2.89.** а) 6; б) 2; в) $\sqrt[12]{5^7}$; г) 3. **2.90.** а) $\sqrt[16]{b}$; б) $\sqrt[6]{b}$; в) $\sqrt[7]{b}$; г) $\sqrt{b}$. **2.91.** а) 2; б) 3; в) 2. **2.92.** а) 19; б) –5; в) 2; г) –11. **2.93.** а) m; б) $-c$; в) $2x$; г) $-\frac{a}{3}$; д) $10y$; е) $-1{,}5b^2$. **2.94.** а) x; б) $-4b$; в) $-10c^2$; г) $-6y^6$. **2.95.** 1. **2.96.** а) a^3; б) $3m^2$; в) $2a^2$; г) $\frac{a^{12}}{2}$; д) $6b^3$; е) $-4n^4$. **2.97.** а) $\frac{2}{3}m^2n^5$; б) $-\frac{2}{3}m^2n^5$. **2.98*.** а) $a-4$; б) $-b-2$; в) $3b$. **2.150.** а) $2\sqrt[3]{3}$; б) $6\sqrt[3]{2}$; в) $2\sqrt[4]{3}$; г) $2\sqrt[4]{10}$; д) $3\sqrt[4]{4}$; е) $2\sqrt[5]{5}$; ж) $10\sqrt[5]{5}$; з) $2\sqrt[7]{3}$. **2.151.** а) $14\sqrt[3]{2}$; б) $1{,}5\sqrt[3]{4}$; в) $-10\sqrt[4]{5}$; г) $5\sqrt[5]{9}$; д) $-7\sqrt[5]{2}$; е) $-\frac{\sqrt[7]{2}}{2}$. **2.152.** а) $|b|\sqrt[4]{3}$; б) $a^2\sqrt[6]{17}$; в) $3k^2|p|\sqrt[4]{2}$; г) $2y^3z^2\sqrt[3]{x}$. **2.153.** а) $n\sqrt[4]{5}$; б) $-m\sqrt[6]{7}$; в) $2m^2n^3\sqrt[4]{3}$; г) $-mn^2\sqrt[6]{3n}$; д) $m^2n^4\sqrt[8]{2}$; е) $-m^3n^5\sqrt[10]{5}$. **2.154.** а) $b\sqrt[3]{7}$; б) $a\sqrt[3]{a^2}$; в) $n\sqrt[5]{n}$; г) $ab^3\sqrt[5]{b^3}$; д) $m^2n\sqrt[5]{m^2n^2}$; е) $-3x^2y^3\sqrt[3]{4xy}$. **2.155.** а) $2a\sqrt[4]{b}$; б) $-2m^3n^3\sqrt[4]{2n}$; в) $-3x^2y^3\sqrt[6]{xy}$. **2.156.** а) $x^2\sqrt[4]{3x}$; б) $y^2\sqrt[6]{-y}$; в) $a^3b^2\sqrt[8]{a}$. **2.157.** а) $\sqrt[3]{250}$; б) $\sqrt[4]{48}$; в) $\sqrt[4]{405}$; г) $\sqrt[3]{3}$; д) $\sqrt[4]{0{,}81}$; е) $\sqrt[5]{2510}$; ж) $\sqrt[5]{2}$; з) $\sqrt[6]{7}$. **2.158.** а) $\sqrt[4]{16x}$; б) $\sqrt[4]{2y}$; в) $\sqrt[3]{2b}$; г) $-\sqrt[6]{2b^5}$. **2.159.** а) $\sqrt[6]{3k^6}$; б) $-\sqrt[6]{3k^6}$. **2.160.** а) $\sqrt[4]{2n^4}$; б) $-\sqrt[8]{7m^8}$; в) $\sqrt[3]{2c^3}$; г) $\sqrt[5]{k^6}$; д) $\sqrt[6]{x^7}$; е) $-\sqrt[4]{(b-a)^5}$. **2.161.** а) $\sqrt[5]{b^3}$; б) $\sqrt[4]{b}$. **2.162.** а) $9\sqrt[3]{2}$; б) $-3\sqrt[4]{3}$; в) $7\sqrt[5]{6}$; г) $-\sqrt[6]{5}$. **2.163.** а) $10\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt[3]{3}$; $24\sqrt[3]{9}$; 1,5; б) $-2\sqrt[4]{2}$; $-4\sqrt[4]{2}$; $-3\sqrt{2}$; –3; в) 0; $-4\sqrt[5]{6}$; $-4\sqrt[5]{36}$; –1. **2.164.** а) $3\sqrt[3]{2}$; б) $11\sqrt[5]{3}$; в) $\sqrt[7]{2}$; г) $-3\sqrt[3]{3}$; д) $6\sqrt[3]{5}$; е) $11\sqrt[3]{2}$. **2.165.** а) $3\sqrt{2}-4$; б) $4\sqrt{3}+6$. **2.166.** а) 9; б) $4\sqrt{2}$; в) –4; г) 1,6. **2.167.** а) –2; б) –12. **2.168.** $12\sqrt[3]{3}$ см². **2.169.** 30 см². **2.170.** а) 0; б) 1. **2.171.** а) 11; б) 7. **2.172.** а) $1-a$; б) $m-n$. **2.173.** а) $3\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$; б) $\sqrt[3]{2}\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$;

Правообладатель Народная асвета

в) $\sqrt[4]{6}\left(1-2\sqrt[4]{216}\right)$; г) $\sqrt{5}\left(\sqrt[4]{2}+1\right)$. **2.174.** а) $\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)\left(\sqrt[5]{7}-\sqrt[5]{2}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x}-4\right)$. **2.175.** а) $1-\sqrt[3]{36}$; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; в) $\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{8}$; г) $-\frac{1}{2}$. **2.176.** а) $\frac{\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3x}-1}$; б) $-\sqrt{m}$. **2.177.** а) $\frac{1}{\sqrt[4]{m}+1}$; б) $\sqrt[5]{x^3}+2$; в) $-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$; г) $-\sqrt[4]{m}-\sqrt{n}$. **2.178.** а) $\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}$; б) $a\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}$. **2.179.** а) $\sqrt[3]{4}$; б) $2\sqrt[3]{3}$; в) $8\sqrt[4]{8}$; г) $3\sqrt[3]{49}$. **2.180.** а) $6\sqrt[3]{2}$; б) $-4\sqrt[5]{3}$. **2.182.** а) $2\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$; б)* -6. **2.217.** 0; 1; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$; 0,1. **2.218.** 3; 1; 2,3; $2\frac{1}{2}$; $2-\sqrt{5}$. **2.219.** 1; -8; $\frac{1}{27}$; -11. **2.220.** а); г). **2.221.** а) $\left(-\infty;\ 2\frac{2}{3}\right]$; б) $(-\infty;\ -1{,}5)\cup(-1{,}5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -3)\cup\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; г) $(-\infty;\ -3]\cup(6;\ +\infty)$. **2.222.** а) $[-8;\ 3)$; б) $[-7;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; в) $[-3;\ 1]\cup\{3\}$. **2.223.** а) $[7;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 3]$; в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $[-6;\ +\infty)$. **2.224.** а) 2; б) -10; в) -63; г) -7. **2.225.** а) $\frac{2}{7}$; б) $-\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{2}$; 2; г) $-\frac{1}{3}$; 0. **2.226.** а) Нет; б) да. **2.227.** а) $\sqrt[5]{1{,}8}>\sqrt[5]{1{,}6}$; б) $\sqrt[3]{-19}>\sqrt[3]{-23}$; в) $2>\sqrt[3]{7}$; г) $\sqrt[4]{15}<2$; д) $\sqrt[3]{28}>3$; е) $\sqrt[15]{31}<\sqrt[3]{2}$. **2.228.** а) 2; 3; б) 2; 3; в) 5; 6; г) -3; -2. **2.229.** а) -2; -1; 0; 1; 2; 3; б) -2; -1; 0; 1; 2. **2.230.** а) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[12]{12}>\sqrt[8]{5}$; в) $\sqrt{3}<\sqrt[5]{\sqrt{247}}$; г) $\sqrt[10]{7}<\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$. **2.231.** а) $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[3]{\sqrt{30}}$. **2.232.** а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная; в) четная; г) четная. **2.235.** а) (1; 1); б) $\left(\frac{1}{256};\ \frac{1}{2}\right)$; в) не пересекаются; г) $\left(13;\ \sqrt[8]{13}\right)$. **2.236.** $(-1;\ -1)$; $(0;\ 0)$; $(1;\ 1)$. **2.265.** а) 15; б) $-7\frac{7}{8}$; в) -6; 6; г) 0; 3; д) $\frac{1}{2}$; 2; е) -3; 1,5; ж) -11; 7; з) $\frac{2}{3}$. **2.266.** а) $-19\frac{2}{3}$; б) -4; 8. **2.267.** а) 6; б) 3; 4; в) 6; г) 1,25; д) 4; е) -17. **2.268.** а) 5; б) -1; 8. **2.269.** а) -3; 3; б) 2,25. **2.270.** а) 6; б) 1. **2.271.** а) Нет корней; б) $1\frac{1}{3}$; в) $-\frac{74}{79}$; г) -5; 6; д) 5; е) -4. **2.272.** а) $\frac{6}{7}$; б) -4. **2.273.** а) 4; б) 2; в) $\frac{2}{3}$; г) 1; 5. **2.274.** а) 2; б) 5; в) 3; г) -1. **2.275.** 3; 7. **2.276.** а) 16; б) 729; в) 8; 263; г) -2; д) $-2\sqrt{7}$; $2\sqrt{7}$; е) -9; 4. **2.277.** а) $\frac{1}{13}$; $\frac{4}{7}$; б) $-\frac{7}{26}$; $7\frac{7}{26}$. **2.278.** а) 3; б) 3; в) 5.

Я проверяю свои знания

1. а); в); г); д); е). **2.** б). **3.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-1\frac{1}{3}$; г) $-2{,}8$. **4.** а) 40; б) -2; в) -1; 3; г) -2; 3. **5.** а) $\sqrt{5}>\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[10]{29}>\sqrt[5]{3\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}>\sqrt[5]{\sqrt{3}}$. **6.** а) -2; б) 2; 3; в) 6; г) 83. **7.** а) $6{,}4\sqrt[4]{x}\sqrt{y}$; б) $\sqrt{x}$. **8.** а) $D=(-\infty;\ 1]\cup[8;\ +\infty)$; б) $D=(-\infty;\ -1)\cup\left(-1;\ \frac{3}{8}\right]$; в) $D=\left[-5;\ 1\frac{2}{7}\right)$; г) $D=$ $=[-5;\ 1]\cup\{5\}$. **9.** а) $-\sqrt[6]{-64a^7}$; б) $-\sqrt[5]{m^8}$; в) $\sqrt[6]{-y^{13}}$; г) $-\sqrt[4]{2(2-y)^5}$. **10.** 1.

Правообладатель Народная асвета

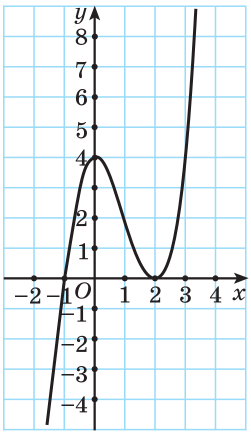
Глава 3. Производная

3.14. а) $2x_0\Delta x + \Delta x^2$; б) $-2\Delta x$. **3.15.** а) $2x_0 + \Delta x$; б) -2. **3.16.** а) $2x_0$; б) -2. **3.17.** а) $2x$; б) -2. **3.18.** а) -6; 0; 3; 18; б) -2. **3.19.** 20. **3.20.** а) 5; б) -6; в) $\frac{2}{7}$; г) $-\frac{1}{9}$.
3.21. а) $\Delta x^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + 5\Delta x$; б) 0,91; в) $5 + \Delta x + 2x_0$; г) $5 + 2x_0$; д) $2x + 5$; е) -1. **3.52.** а) $f'(x) = 18x + 1$; б) $f'(x) = 8 - 2x$; в) $f'(x) = -2x + 2$; г) $f'(x) = x - 9$. **3.53.** а) $f'(x) = 10x + 1$, $f'(1) = 11$; б) $f'(x) = 8x^7 - 5x^4 - 1$, $f'(1) = 2$; в) $f'(x) = -50x^4 - 6x - 1$, $f'(1) = -57$; г) $f'(x) = \frac{2}{3}x^5 + 8x$, $f'(1) = \frac{26}{3}$. **3.54.** $f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}$, $f'(2) < f'(3)$. **3.55.** а) $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 28x - 7$; б) $f'(x) = 5x^4 - 24x^3$. **3.56.** $f'(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{8}x^4 + 6x^2 - 4x$, $f'(0) = 0$. **3.57.** а) $f'(x) = \frac{-42}{(7x-3)^2}$; б) $f'(x) = \frac{5x^2 + 20x - 2}{(x+2)^2}$. **3.58.** $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$, $f'(-1) < f'(-2)$. **3.59.** $f'(x) = -\frac{x^2}{4}$, $f(x_0) = \pm\frac{1}{12}$. **3.60.** а) $\frac{1}{16}$; б) -1; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 1. **3.61.** а) $f'(x) = \frac{10}{(x+5)^2}$, $x = -5 \pm \sqrt{10}$; б) $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$, нет корней. **3.62.** а) $f'(x) = 6x + 2$, $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$; б) $f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$, $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; в) $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$, $(-3; 0) \cup (0; 3)$; г) $f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
3.63. $f'(x) = 4x^3 - x$, $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **3.64.** $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. **3.65.** $f'(1) < f'\left(\sqrt{5}\right)$.
3.66. а) $(-\infty; -7]$; б) $[0; 1) \cup (1; 2]$. **3.67.** 1. **3.68.** 10 с. **3.104.** а) 6; б) 0; в) -4. **3.105.** а) 28; б) 3,25; в) $\frac{4}{9}$. **3.107.** а) $\pi - \operatorname{arctg} 2$; б) $\pi - \operatorname{arctg} 3$. **3.108.** $\left(-2\frac{1}{2}; -3\frac{3}{4}\right)$. **3.109.** а) $y = x + 3$; б) $y = -3x$. **3.110.** $y = x - 2$. **3.111.** $y = -4x + 19$. **3.112.** $y = 2x + 5$. **3.113.** а) $f(x)$ убывает на $(-\infty; -0{,}25]$ и $f(x)$ возрастает на $[-0{,}25; +\infty)$; б) $f(x)$ возрастает на $[-2; 0]$ и на $[2; +\infty)$; $f(x)$ убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[0; 2]$; в) $f(x)$ убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$; $f(x)$ возрастает на $[-1; 1]$. **3.114.** $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$, нет. **3.115.** $f(x)$ убывает на $[-1; 0]$ и на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **3.116.** $f(x)$ убывает на $(-\infty; 1)$ и на $(1; +\infty)$; промежутков возрастания нет. **3.117.** -5; -2; 2; 6. **3.118.** а) $x_{min} = -3$; б) $x_{min} = 0$; $x_{max} = 2$. **3.119.** а) $x_{max} = -2$; $y_{max} = 9$; б) $x_{max} = 1$; $y_{max} = 2$; $x_{min} = -1$; $y_{min} = -2$; в) $x_{max} = -1$; $y_{max} = -2$; $x_{min} = 1$; $y_{min} = 2$. **3.120.** $f_{max}(2) = 4$. **3.121.** а) $f(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$; $f(x)$ убывает на $[-1; 1]$, $x_{min} = 1$; $x_{max} = -1$; б) $f(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[3; +\infty)$; $f(x)$ убывает на $[-1; 3]$, $x_{min} = 3$; $x_{max} = -1$. **3.122*.** $f(x)$ возрастает на $(-\infty; -3]$ и на $[3; +\infty)$; $f(x)$ убывает на $[-3; 0)$ и на $(0; 3]$, $x_{min} = 3$; $x_{max} = -3$. **3.164.** 6, -127. **3.165.** а) 29, -35; б) 221, -19. **3.166.** 8, 2. **3.167.** а) 52, -2; б) 2, -18; в) 2, -2; г) 52, 18. **3.168.** а) 6, -19; б) -10, -3; в) 6, -19; г) 6, -19. **3.169.** 3, 1,5. **3.170.** $a = b = 30$. **3.171.** 5 и 15. **3.172.** 25×25 м.
3.173. 36 м. **3.174.** $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$.

Правообладатель Народная асвета

Я проверяю свои знания

1. б) **2.** а) $f'(x) = 0$ при $x = 0$; 2,5; б) $f'(x) < 0$ при $x \in (0;\ 2{,}5)$; в) $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$ и $x \in (2{,}5;\ +\infty)$. **3.** 7; 3. **4.** а) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + 2$; б) $f'(x) = 8x - 3x^2 - \frac{x^3}{2}$; в) $f'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 2}{(x-1)^2}$; г) $f'(x) = 10x^4 + 15x^2$. **5.** $\operatorname{tg}\alpha = 8$. **6.** 80 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. **7.** Функция возрастает на промежутках $(-\infty;\ 1]$ и $[2;\ +\infty)$; функция убывает на промежутке $[1;\ 2]$; $x_{max} = 1$; $x_{min} = 2$.

8. 

9. 6,25. **10.** $a \in \left(4\frac{1}{6};\ +\infty\right)$.

Правообладатель Народная асвета

СОДЕРЖАНИЕ

Правообладатель Народная асвета

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Правообладатель Народная асвета

Арефьева, И. Г.

А80 Алгебра : учебное пособие для 10-го класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. — Минск : Народная асвета, 2019. — 285 с. : ил.

ISBN 978-985-03-3152-6.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.144я721

Правообладатель Народная асвета

Учебное издание

Арефьева Ирина Глебовна
Пирютко Ольга Николаевна

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 10 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*. Художественные редакторы *А. Н. Богушевич, Е. А. Проволович*. Техническое редактирование *Г. А. Дудко*. Компьютерная верстка *Т. В. Свириденко*. Корректоры *В. С. Бабеня, О. С. Козицкая, Е. П. Тхир, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 25.10.2019. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,06 + 0,29 форз. Уч.-изд. л. 14,62 + 0,38 форз. Тираж 121 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство «Белорусский Дом печати».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/102 от 01.04.2014.
Пр. Независимости, 79, 220013, Минск, Республика Беларусь.

Правообладатель Народная асвета

Корень n-й степени

$\sqrt[n]{a} = b$, если $b \ge 0$, $b^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$

Корень n-й степени из произведения

$\sqrt[4]{81 \cdot 625} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$, $n \in N$, $n > 1$	$\sqrt[5]{72} \cdot \sqrt[5]{\frac{4}{9}} = \sqrt[5]{72 \cdot \frac{4}{9}} = \sqrt[5]{32} = 2$

Корень n-й степени из частного

$\sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \ge 0$, $b > 0$, $n \in N$, $n > 1$	$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\frac{128}{2}} = \sqrt[6]{64} = 2$

Корень n-й степени из степени с показателем m

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$ $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[9]{8}$ $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 5]{2^5} = \sqrt[15]{32}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$; $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$, где $a \ge 0$, $n \in N$, $m \in Z$, $k \in N$, r — общий натуральный делитель чисел m и n, $n > 1$, $k > 1$ и $r > 1$	$\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[2 \cdot 3]{5^3} = \sqrt{5}$ $\sqrt[12]{10\,000} = \sqrt[3 \cdot 4]{10^4} = \sqrt[3]{10}$

Корень k-й степени из корня n-й степени

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3 \cdot 5]{a} = \sqrt[15]{a}$	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$, для любых натуральных $n > 1$, $k > 1$ и $a \ge 0$	$\sqrt[6]{\sqrt{a}} = \sqrt[6 \cdot 2]{a} = \sqrt[12]{a}$

Корень n-й степени из степени с показателем n

$\sqrt[8]{(-13)^8} = \lvert -13 \rvert = 13$	$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} \lvert a \rvert, & \text{если } n \text{ — четное;} \\ a, & \text{если } n \text{ — нечетное} \end{cases}$	$\sqrt[5]{(-7)^5} = -7$

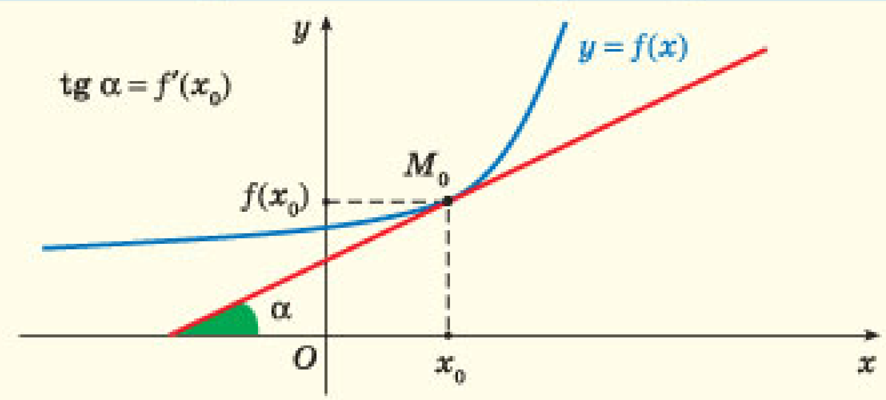
Производная

$f(x)$	x^2	$kx + b$	$\frac{1}{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	0

Правила вычисления производных

Производная суммы	$(U + V)' = U' + V'$
Производная произведения	$(UV)' = U'V + V'U$
Производная частного	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
Производная степени	$(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in Z$

Геометрический смысл производной



Натуральные степени чисел 2, 3, 4, 5, 6

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187			
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125					
6^n	6	36	216	1296						