МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра высшей математики

И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. Ю. СОКОЛЬСКИЙ

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы

Гомель 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра высшей математики

И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. Ю. СОКОЛЬСКИЙ

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы

Одобрено методической комиссией
электротехнического факультета

Гомель 2012

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143
Д36

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики
А. М. Щербо (УО «БелГУТ»).

Дергачёва, И. М.

Д36 Линейная и векторная алгебра : учеб.-метод. пособие по выполнению расчетно-графической работы / И. М. Дергачёва, А. Ю. Сокольский ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2012. – 40 с.
ISBN 978-985-468-984-5

Изложен краткий теоретический материал, который необходим для выполнения расчетно-графической работы по таким разделам курса высшей математики, как «Линейная и векторная алгебра». Разобрано большое количество типовых примеров. Приведены индивидуальные задания для данной расчетно-графической работы.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143

ISBN 978-985-468-984-5

1 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Метод Крамера

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Если хотя бы один из свободных членов $b_i \neq 0,$ то система (1.1) называется *неоднородной*. В противном случае она называется *однородной*. *Решением* системы (1.1) называется такое множество значений неизвестных $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n$, при которых каждое из уравнений данной системы обращается в тождество. Система уравнений, имеющая решения, называется *совместной*. В противном случае она *несовместна*. *Определителем системы уравнений* (1.1) называется определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных данной системы, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель неоднородной системы отличен от нуля, т. е. $\Delta \neq 0,$ то она имеет единственное решение, определяемое формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ \dots, \ \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.2}$$

где Δ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ – определитель, полученный из определителя исходной системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$ Ненулевые решения она имеет тогда и только тогда, когда $\Delta = 0.$

Пример 1.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 15, \\ 9x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 15. \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5)(-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 10(5 + 5) = 100.$$

Так как $\Delta \neq 0,$ то система имеет единственное решение. Чтобы его найти, вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\15&-2&3&-3\\5&9&4&4\\15&-3&2&-2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}0&1&1&1\\3&-2&3&-3\\1&9&4&4\\3&-3&2&-2\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&9&4&4\\3&-2&3&-3\\3&-3&2&-2\end{vmatrix}=$$

$$=-5\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&9&4&4\\0&-29&-9&-15\\0&-30&-10&-14\end{vmatrix}=10\cdot1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&1&1\\-29&-9&-15\\15&5&7\end{vmatrix}=$$

$$=-10\begin{vmatrix}1&1&1\\0&20&14\\0&-10&-8\end{vmatrix}=(-10)2(-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&10&7\\0&5&4\end{vmatrix}=40\cdot1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}10&7\\5&4\end{vmatrix}=$$

$$=40(40-35)=40\cdot5=200;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0&1&1\\2&15&3&-3\\9&5&4&4\\3&15&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&15&1&-5\\9&5&-5&-5\\3&15&-1&-5\end{vmatrix}=5(-5)1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1&1\\1&-5&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=-25\begin{vmatrix}3&1&1\\-2&-6&0\\0&-2&0\end{vmatrix}=(-25)1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2&-6\\0&-2\end{vmatrix}=(-25)4=-100;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&0&1\\2&-2&15&-3\\9&9&5&4\\3&-3&15&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-4&15&-5\\9&0&5&-5\\3&-6&15&-5\end{vmatrix}=(-2)5(-5)1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&3&1\\0&1&1\\3&3&1\end{vmatrix}=$$

$$=50\begin{vmatrix}2&3&1\\-2&-2&0\\1&0&0\end{vmatrix}=50\cdot1(-1)^{3+1}(0-(-2))=50\cdot2=100;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 15 \\ 9 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 15 \\ 9 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & -6 & -1 & 15 \end{vmatrix} = (-2)5\cdot 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -10(-30+3+0+45+2-0) = (-10)20 = -200.$$

По формулам (1.2) находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{200}{100} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{100}{100} = -1;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{100}{100} = 1; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -\frac{200}{100} = -2.$$

Матричный метод

Пусть для системы (1.1) матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ невырожденная, т. е $\Delta A \neq 0$. Тогда для A существует единственная обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы A $(i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Введем в рассмотрение вектор-столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1.1) можно записать в матричной форме $AX = B$. Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$, откуда $X = A^{-1}B$ или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Пример 1.2. Решить систему уравнений (см. пример 1.1) матричным методом.

Решение. Имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$,

$\Delta A = 100$.

Находим алгебраические дополнения A_{ij} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 9 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 16 - 36 - 54 - 36 + 16 + 54 = -40;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 9 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-16 + 36 - 54 + 36 - 16 + 54) = -40;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -36 - 24 + 81 + 81 + 24 - 36 = 90;$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -(36 - 24 - 81 - 81 + 24 + 36) = 90;$$

$$A_{21}=\left(-1\right)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-\left(-8-12+18+12-8+18\right)=-20;$$

$$A_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-8+12+18-12-8+18=20;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}=-(-18+12-27-27+12+18)=30;$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=18+12-27-27+12-18=-30;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-6+9-4+9+6-4=10;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-(-6-9+4-9+6+4)=10;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}=4-9-6+6-9+4=-10;$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=-(-4+9-6+6+9-4)=-10;$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 9 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-(12-27-8-27+12+8)=30;$$

$$A_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -3\\ 9 & 4 & 4\end{vmatrix}=12-27+8-27+12-8=-30;$$

$$A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -3\\ 9 & 9 & 4\end{vmatrix}=-(-8-27+18+18+27-8)=-20;$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 9 & 4 & 4\end{vmatrix}=-8+27+18+18-27-8=20.$$

Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{100}\begin{pmatrix}-40 & -20 & 10 & 30\\ -40 & 20 & 10 & -30\\ 90 & 30 & -10 & -20\\ 90 & -30 & -10 & 20\end{pmatrix}.$

Находим:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}-40 & -20 & 10 & 30\\ -40 & 20 & 10 & -30\\ 90 & 30 & -10 & -20\\ 90 & -30 & -10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 15\\ 5\\ 15\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}-40\cdot 0+(-20)15+10\cdot 5+30\cdot 15\\ -40\cdot 0+20\cdot 15+10\cdot 5+(-30)15\\ 90\cdot 0+30\cdot 15+(-10)5+(-20)15\\ 90\cdot 0+(-30)15+(-10)5+2015\end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}200\\ -100\\ 100\\ -200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\\ -2\end{pmatrix},$$

т.е. $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=-2$ – решение данной системы.

Метод Гаусса

Пусть дана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.4)$$

Предполагая, что $a_{11} \neq 0$ (это всегда можно сделать путем изменения нумерации уравнений), умножая первое уравнение системы (1.4) на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавляя его ко второму, получаем уравнение, в котором коэффициент при x_1 обращается в нуль. Умножая первое уравнение на $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и прибавляя результат к третьему, получаем уравнение, также не содержащее члена с x_1. Аналогичным путем преобразуем все остальные уравнения, в результате чего приходим к системе, эквивалентной исходной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}{}'x_2 + \ldots + a_{2n}{}'x_n = b_2{}', \\ \qquad\quad a_{32}{}'x_2 + \ldots + a_{3n}{}'x_n = b_3{}', \\ \qquad\quad a_{m2}{}'x_2 + \ldots + a_{mn}{}'x_n = b_m{}', \end{cases} \qquad (1.5)$$

где $a_{ik}{}'$ – некоторые новые коэффициенты ($i = 2, 3, \ldots, m$; $k = 2, 3, \ldots, n$). Предполагая, что $a_{22}{}' \neq 0$, и оставляя неизменными первые два уравнения системы (1.5), преобразуем её так, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 обратился в нуль. Продолжая этот процесс, систему (1.5) можно привести к одной из следующих систем:

а)

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_n x_n = d_n, \end{cases} \qquad (1.6)$$

где c_{ii} – некоторые коэффициенты, $c_{ii} \neq 0$; d_i – свободные члены ($i = 1, 2, \ldots, n$);

б)
$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $k < n$;

в)
$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 \cdot x_n = d_k, \end{cases} \tag{1.8}$$

где $k \leq n$.

Система (1.6) имеет единственное решение; значение x_n находится из последнего уравнения, x_{n-1} – из предпоследнего, x_1 – из первого. Система (1.7) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения этой системы можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $(n-k)$ неизвестных (x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n), входящих в это уравнение; из предпоследнего можно выразить x_{k-1} через эти неизвестные и т.д.

В полученных формулах, выражающих x_1, x_2, …, x_k через x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n, неизвестные x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n могут принимать любые значения. Система (1.8) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять её последнему уравнению.

Таким образом, метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему этим методом, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

Рангом матрицы A (обозначается $\operatorname{rang} A$) называется наибольший порядок порожденных ей определителей, отличных от нуля. *Ба-*

зисным минором матрицы A называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Для того, чтобы система (1.4) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

системы (1.4) и ранг так называемой расширенной матрицы

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

системы были равны, т.е. $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\tilde{A}=r$. Если $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\tilde{A}$ и $r=n,$ то система (1.4) имеет единственное решение; если $r<n,$ то система (1.4) имеет бесконечное множество решений, зависящее от $(n-r)$ неизвестных (переменных).

Для однородной системы уравнений $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\tilde{A},$ поэтому она всегда совместна. Если $r<n,$ система имеет бесконечное множество решений; если $r=n,$ она имеет единственное (нулевое) решение.

Переменные, коэффициенты при которых составляют базисный минор основной матрицы A системы (1.4), называются *базисными (главными)*. Переменные, коэффициенты при которых не входят в базисный минор, называются *свободными*. Свободные переменные не могут выражаться через базисные и принимают произвольные значения.

Пример 1.3. Решить систему (см. пример 1.1) методом Гаусса.

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 15 \\ 9 & 9 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 15 \end{array}\right).$$

Умножая первую строку матрицы поочередно на (-2), (-9), (-3) и прибавляя соответственно ко второй, третьей и четвертой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -6 & -1 & -5 & 15 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку полученной матрицы на $\left(-\frac{6}{4}\right)$ и прибавив к четвёртой строке, получим новую матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{15}{2} \end{array}\right).$$

Умножив третью строку последней матрицы на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и прибавив к четвертой строке, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \; x_4 = \; 0, \\ \qquad -4x_2 + \quad x_3 - 5x_4 = \; 15, \\ \qquad\qquad -5x_3 - 5x_4 = \; 5, \\ \qquad\qquad\qquad 5x_4 = -10. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -2$, третье уравнение даёт $x_3 = -\dfrac{1}{5}(5 + 5x_4) = 1$, второе – $x_2 = -\dfrac{1}{4}(15 + 5x_4 - x_3) = -1$, а первое – $x_1 = 2$.

Пример 1.4. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + \; 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = \; 3, \\ 2x_1 + \; 7x_2 + 3x_3 + \; x_4 = \; 5, \\ x_1 + \; 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = \; 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Проверим совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

В расширенной матрице

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right)$$

умножим первую строку нам (-2), затем на (-5) и сложим соответственно со второй и четвёртой строками, из третьей строки вычтем первую:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right).$$

Далее умножим вторую строку на (-2), затем на (-3) и сложим соответственно с третьей и четвертой строками:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ясно, что $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(\tilde{A})=2<n$ ($n=4$), следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Так как $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$ т.е. определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмём x_1 и x_2.

Имеем:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=\ \ 3, \\ \qquad\ \ x_2-7x_3+5x_4=-1, \end{cases}$$

откуда

$$x_2=-1-5x_4+7x_3,$$

$$x_1=3+2x_4-5x_3-3x_2=3+2x_4-5x_3-3(-1-5x_4+7x_3)=6-26x_3+17x_4.$$

Общее решение системы: $\overline{x}=(6-26x_3+17x_4, -1+7x_3-5x_4, x_3, x_4)$, x_3, $x_4\in R$.

Пусть, например, $x_3=0$, $x_4=-1$. Тогда $\overline{x}_ч=(-11, 4, 0, -1)$ – частное решение этой системы.

2 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Вектором называется направленный отрезок. Если даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{2.1}$$

Длина вектора определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2.2}$$

Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

При сложении (вычитании) векторов, заданных в координатной форме, их соответствующие координаты складываются (вычитаются), т. е. если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2). \tag{2.3}$$

При умножении вектора на число его координаты нужно умножить на это число: $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$.

Проекцией вектора $\vec{a}$ *на ось* l называется число

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi, \tag{2.4}$$

где φ ($0 \le \varphi \le \pi$) – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора $\vec{a}$.

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_i$ называется вектор $\vec{a}$, определяемый по формуле $\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$, где λ_i – некоторые числа. Если для системы n векторов $\vec{a}_i$ равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = 0 \tag{2.5}$$

верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется *линейно независимой*. В противном случае она называется *линейно зависимой*. Систему упорядоченных линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в пространстве V_n называют *базисом*. Любой вектор $\vec{a}$ в пространстве можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, т.е. представить в виде $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x; y; z)$, точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и числом λ задаётся равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам $(\lambda = 1)$, то ее координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулами

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{2.6}$$

В частности,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \tag{2.7}$$

Работа A *силы* $\vec{F}$*, произведенная этой силой при перемещении тела на пути* $|\vec{s}|$*, определяемом* $\vec{s}$, вычисляется по формуле

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{s}}). \tag{2.8}$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трём условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

В частности,

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \tag{2.9}$$

и

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{пар.}}, \tag{2.10}$$

где $S_{\text{пар.}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. И, значит, $S_{\triangle} = \dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Координаты векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.11}$$

Вращающий момент $\overrightarrow{M}$ *силы* $\overrightarrow{F}$*, приложенной к точке* B *тела, закрепленного в точке* A*,*

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F}. \tag{2.12}$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a} = (x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\vec{b} = (x_2;\, y_2;\, z_2)$, $\vec{c} = (x_3;\, y_3;\, z_3)$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

В частности,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарны.} \qquad (2.14)$$

Объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды, построенных на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, соответственно равны

$$V_{\text{параллелеп.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \quad \text{и} \quad V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \qquad (2.15)$$

Пример 2.1. В некотором базисе даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

$\vec{a} = (1; 2; 9; 3)$, $\vec{b} = (1; -2; 9; -3)$, $\vec{c} = (1; 3; 4; 2)$, $\vec{d} = (1; -3; 4; -2)$, $\vec{e} = (0; 15; 5; 15)$.

Решение. Вычисляем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 9 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-2)(-5)1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10(-10 + 0 + 3 + 15 - 0 + 2) = 100 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ образуют базис и вектор $\vec{e}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{e} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} + x_4\vec{d},$$

т.е.

$$(0; 15; 5; 15) = x_1(1; 2; 9; 3) + x_2(1; -2; 9; -3) + x_3(1; 3; 4; 2) + x_4(1; -3; 4; -2).$$

Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 15, \\ 9x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases}$$

Решая систему (см. примеры 1.1–1.3), получим: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$. Поэтому

$$\vec{e} = (2; -1; 1; -2) = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d}.$$

Пример 2.2. Даны векторы $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$; $(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Найти: а) $(2\vec{m} - 5\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 4\vec{n})$; б) $\text{пр}_{\vec{n}}(\vec{m} + 4\vec{n})$; в) $\cos(\widehat{\vec{m}, 4\vec{n}})$.

Решение. Воспользуемся формулами (2.4) и (2.6).

а) Вычисляем:

$$2\vec{m} - 5\vec{n} = 2(\vec{a} - 2\vec{b}) - 5(3\vec{a} + 4\vec{b}) = -13\vec{a} - 24\vec{b},$$

$$\vec{m} + 4\vec{n} = (\vec{a} - 2\vec{b}) + 4(3\vec{a} + 4\vec{b}) = 13\vec{a} + 14\vec{b},$$

$$(2\vec{m} - 5\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 4\vec{n}) = (-13\vec{a} - 24\vec{b}) \cdot (13\vec{a} + 14\vec{b}) = -169\vec{a}^2 - 494\vec{a}\vec{b} -$$

$$-336\vec{b}^2 = -169|\vec{a}|^2 - 494|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) - 336|\vec{b}|^2 =$$

$$= -169 \cdot 4^2 - 494 \cdot 4 \cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 336 \cdot 2^2 = -2072.$$

б) Пусть $\vec{c} = \vec{m} + 4\vec{n} = (\vec{a} - 2\vec{b}) + 4(3\vec{a} + 4\vec{b}) = 13\vec{a} + 14\vec{b}$.

Тогда

$$\text{пр}_{\vec{n}}\vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = (13\vec{a} + 14\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b}) = 39\vec{a}^2 + 94\vec{a}\vec{b} + 56\vec{b}^2 =$$

$$= 39|\vec{a}|^2 + 94|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + 56|\vec{b}|^2 =$$

$$=39\cdot 4^2+94\cdot 4\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)+56\cdot 2^2=472;$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{\vec{n}^{\,2}}=\sqrt{(3\vec{a}+4\vec{b})^2}=\sqrt{9|\vec{a}|^2+24|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})+16|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{9\cdot 4^2+24\cdot 4\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)+16\cdot 2^2}=\sqrt{112}.$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\vec{n}}(\vec{m}+4\vec{n})=\frac{472}{\sqrt{112}}.$$

в) $\cos(\widehat{\vec{m},4\vec{n}})=\dfrac{\vec{m}\cdot 4\vec{n}}{|\vec{m}||4\vec{n}|}$.

Пусть $4\vec{n}=4(3\vec{a}+4\vec{b})=12\vec{a}+16\vec{b}$.

Тогда

$$\vec{m}\cdot 4\vec{n}=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(12\vec{a}+16\vec{b})=12\vec{a}^{\,2}-8\vec{a}\vec{b}-32\vec{b}^{\,2}=$$

$$=12|\vec{a}|^2-8|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})-32|\vec{b}|^2=12\cdot 4^2-8\cdot 4\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)-32\cdot 2^2=96;$$

$$|\vec{m}|=\sqrt{\vec{m}^{\,2}}=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}-4\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}}=$$

$$=\sqrt{|\vec{a}|^2-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})+4|\vec{b}|^2}=\sqrt{4^2-4\cdot 4\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot 2^2}=4\sqrt{3};$$

$$|4\vec{n}|=\sqrt{(12\vec{a}+16\vec{b})^2}=4\sqrt{9\vec{a}^{\,2}+24\vec{a}\vec{b}+16\vec{b}^{\,2}}=$$

$$=4\sqrt{9|\vec{a}|^2+24|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})+16|\vec{b}|^2}=$$

$$=4\sqrt{9\cdot 4^2+24\cdot 4\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)+16\cdot 2^2}=4\sqrt{112}.$$

В результате получим:

$$\cos(\widehat{\vec{m}, 4\vec{n}}) = \frac{96}{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{112}} \approx 0{,}33.$$

Пример 2.3. Даны векторы $\vec{a}_1 = (4; 0; 4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 3; 2)$, $\vec{a}_3 = (3; 5; 0)$. Необходимо: а) проверить компланарность векторов $\vec{a}_1$, $2\vec{a}_2$, $-\vec{a}_3$; б) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$; в) вычислить скалярное произведение векторов $2\vec{a}_1$ и $3\vec{a}_2$ и найти модуль их векторного произведения; г) найти проекцию вектора $\vec{a}_1$ на вектор $2\vec{a}_2$ и $\cos(\widehat{\vec{a}_1, 2\vec{a}_2})$.

Решение. Воспользуемся формулами (2.6), (2.7), (2.9), (2.11), (2.13) и (2.14):

а) векторы $\vec{a}_1$, $2\vec{a}_2$, $-\vec{a}_3$ компланарны, если $\vec{a}_1(2\vec{a}_2)(-\vec{a}_3) = 0$.

Вычисляем:

$$\vec{a}_1(2\vec{a}_2)(-\vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 40 + 72 + 80 - 0 = 192 \neq 0,$$ т.е. векторы $\vec{a}_1$, $2\vec{a}_2$, $-\vec{a}_3$ не компланарны;

б) так как $\vec{a}_1 = (4; 0; 4)$, $\vec{a}_3 = (3; 5; 0)$ и $\frac{4}{3} \neq \frac{0}{5} \neq \frac{4}{0}$, то векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$ не коллинеарны. Поскольку $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 12 \neq 0$, то векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$ не ортогональны;

в) находим: $2\vec{a}_1 = (8; 0; 8)$, $3\vec{a}_2 = (-3; 9; 6)$,

$$2\vec{a}_1 \cdot 3\vec{a}_2 = 8(-3) + 0 \cdot 9 + 8 \cdot 6 = 24.$$

Векторное произведение

$$2\vec{a}_1 \times 3\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 8 \\ -3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \vec{i}; - \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \vec{j}; \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \vec{k} \right) = -72\vec{i} - 72\vec{j} + 72\vec{k};$$

$$|2\vec{a}_1 \times 3\vec{a}_2| = \sqrt{(-72)^2 + (-72)^2 + 72^2} = 72\sqrt{3};$$

г) $\text{пр}_{2\vec{a}_2}\vec{a}_1 = \dfrac{\vec{a}_1 \cdot 2\vec{a}_2}{|2\vec{a}_2|}$, $\cos(\widehat{\vec{a}_1, 2\vec{a}_2}) = \dfrac{\vec{a}_1 \cdot 2\vec{a}_2}{|\vec{a}_1||2\vec{a}_2|}$.

Так как $\vec{a}_1 = (4; 0; 4)$, $\quad 2\vec{a}_2 = (-2; 6; 4)$, то

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad |2\vec{a}_2| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 4^2} = 2\sqrt{14},$$

$$\vec{a}_1 \cdot 2\vec{a}_2 = 4(-2) + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 8.$$

Тогда

$$\text{пр}_{2\vec{a}_2}\vec{a}_1 = \frac{8}{2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}\sqrt{14}; \;\; \cos(\widehat{\vec{a}_1, 2\vec{a}_2}) = \frac{8}{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \approx 0{,}19.$$

Пример 2.4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2; 3; 4)$, $B(4; 7; 3)$, $C(2; 1; 2)$ и $D(0; 4; -5)$.

Вычислить: а) площадь грани ABD; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра CD и вершины A и B; в) объем пирамиды $ABCD$; г) сделать чертёж.

а) Из формулы (2.10) следует, что $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$.

Находим:

$\overrightarrow{AB} = (2; 4; -1)$, $\quad \overrightarrow{AD} = (-2; 1; -9)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$= -35\vec{i} + 20\vec{j} + 10\vec{k}$.

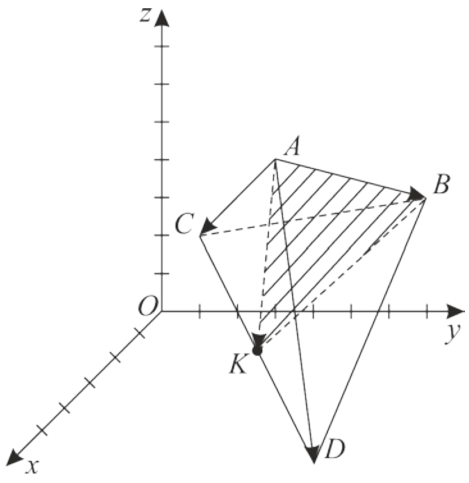

Рисунок 2.1

Окончательно имеем:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{(-35)^2 + 20^2 + 10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1725} \text{ кв. ед.}$$

б) Середина ребра CD находится в точке $K(1;\,2,5;\,-1,5)$, $\left(x_K=\dfrac{2+0}{2}=1;\ y_K=\dfrac{1+4}{2}=2,5;\ z_K=\dfrac{2-5}{2}=-1,5\right)$.

Далее,

$$S_{\text{сеч.}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AK}\times\overrightarrow{AB}|,\quad \overrightarrow{AK}=(-1;-0,5;-5,5),$$

$$\overrightarrow{AK}\times\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -0,5 & -5,5\\ 2 & 4 & -1\end{vmatrix}=22,5\vec{i}-12\vec{j}-3\vec{k},$$

$$S_{\text{сеч.}}=\frac{1}{2}\sqrt{22,5^2+(-12)^2+(-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{659,25}\ \text{кв. ед.}$$

в) На основании (2.15) $V_{\text{пир.}}=\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AC}|$. Поскольку $\overrightarrow{AC}=$ $=(0;-2;-2)$,

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -2 & 1 & -9\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}=-60,$$

то

$$V_{\text{пир.}}=\frac{1}{6}|-60|=10\ \text{куб. ед.}$$

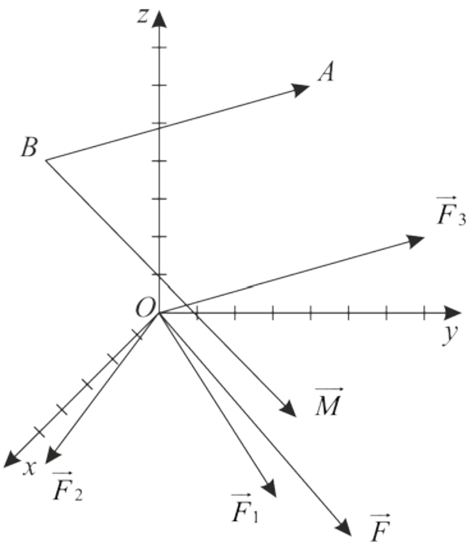

Рисунок 2.2

г) Чертеж пирамиды приведен на рисунке 2.1.

Пример 2.5. Даны три силы: $\vec{F}_1=(2;3;-5)$, $\vec{F}_2=(4;-3;-4)$, $\vec{F}_3=(0;7;2)$, приложенные к точке $A(1;4;6)$. Вычислите:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2;-3;4)$; б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B; в) сделать чертёж.

Решение. Воспользуемся формулами (2.1), (2.8), (2.12).

а) Так как $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(6;7;-7)$, $\overrightarrow{AB}=\vec{s}=(1;-7;-2)$, то $A=\vec{F}\cdot\vec{s}=6\cdot1+7(-7)+(-7)(-2)=-29.$

б) Момент силы $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$, $BA=(-1;7;2)$,

$$\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 7 & 2\\ 6 & 7 & -7\end{vmatrix}=-63\vec{i}+5\vec{j}-49k.$$

Следовательно,

$$|\overrightarrow{M}|=\sqrt{(-63)^2+5^2+(-49)^2}=\sqrt{6395}.$$

в) Чертеж приведен на рисунке 2.2.

3 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ “ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА”

Задача 1

Решить систему линейных уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\ x_1-3x_2-6x_4=9,\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5,\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$

2. $\begin{cases}7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2,\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6,\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1.\end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = -7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -11. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 11, \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -21, \\ 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 20, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 22. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = -3, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 4x_4 = -17, \\ x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 8. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 23. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 11, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 5, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 6. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 20 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - 40 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 37 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 24, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9, \\ 8x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 = 18. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = -11, \\ -4x_1 - 6x_2 - 7x_3 + x_4 = -23. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -4, \\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -6, \\ -8x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -1, \\ 7x_1 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ 9x_1 - x_2 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_2 + x_3 - 5x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 16x_4 = 18. \end{cases}$

Задача 2

Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее и одно частное решения:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 7x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 2x_4 = 2, \\ 9x_1 - 3x_2 - 8x_3 - x_4 = 11. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1, \\ 8x_1 + x_2 - 11x_3 + 13x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 2, \\ 4x_3 - x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 - 9 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 8x_4 = -5, \\ x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_3 + 3x_4 + 1 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 7 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -2, \\ 5x_1 - 16x_2 - 4x_3 - 9x_4 = -16, \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -7. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 7x_3 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 9, \\ 2x_1 - x_4 = 2, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -6. \end{cases}$

Задача 3

В некотором базисе даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{e}$ в этом базисе.

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$
1	5; 4; 1; 1	–3; 5; 2; 3	2; –1; 3; 2	7; –23; 4; –3	14; 0; 8; 4
2	2; –1; 4; 2	–3; 0; –2; 1	4; 5; –3; 2	0; 11; 14; 2	0; 33; 14; 8
3	–1; 1;2; –1	2; –3; –5; 2	6; 3; –1; –1	28; 19; 7; 1	8; 0; 0; 9
4	1; 3; 4; 3	–2; 5; 0; 2	3; –2; –4; 4	–13; 5; –4; 8	26; –10; 0; 8
5	1; –1; 1; 2	–5; –3; 1; 1	2; –1; 0; 1	15; 10; 5; –3	15; 10; 15; 0
6	3; 1; 2; –1	–7; –2; –4; 1	–4; 0; 3; 1	16; 8; 15; 2	16; 6; 15; –3
7	–3; 0; 1; 2	2;–7; –3; –1	0; –3; 5; 1	16; –33; –13; 1	16; –66; 0; 6
8	5; 1; 2; 2	–2; 1; –3; 1	4; –3; 5; 4	–15; –15; 24; 1	0; –30; 48; 13
9	0; 2; –3; 1	4; –3; –2; –1	–5; –4; 0; –1	19; –5; 4; –1	19; –15 4; –2
10	3; –1; 2; 1	–2; 3; 1; 1	4; –5; –3; 1	–3; 2; –3; 2	–9; 6; –9; 6
11	5; 3; 1; 3	–1; 2; –3; –1;	3; 4; 2; –1	–9; 34; 20; –3	–18; 28; 0; 4

Вари-ант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$
12	3; 1; –3; 1	–2; 4; 1; 2	1; –2; 5; 1	–1; 12; 20; –1	2; 0; –40; 2
13	6; 1; –3; 2	–3; 2; 1; 2	–1; –3; 4; –1	15; –6; 17; –1	0; 12; –34; 2
14	4; 2; 3; 1	–3; 1; –8; 3	2; –4; 5; 2	–12; 14; –31; 1	12; –14; 31; –2
15	–2; 1; 3; 3	3; –6; 2; –1	–5; –3; –1; 1	–31; –6; –22; 2	–31; –18; –22; 4
16	1; 3; 6; 1	–3; 4; –5; 2	1; –7; 2; 1	–2; –17; 5; 3	–4; 0; 10; 6
17	7; 2; 1; 2	5; 1; –2; –1	–3; 4; 5; 2	26; –11; –1; 1	0; 22; 2; 2
18	3; 5; 4; 3	–2; 7; –5; 1	6; –2; 1; –1	–6; 9; –22; –1	–6; 9; –22; 2
19	5; 3; 2; 1	2; –5; 1; –2	–7; 4; –3; 1	36; –1; –15; 3	0; 2; 30; –3
20	11; 1; 2; 3	–3; 3; 4; 1	–4; –2; 7; 1	–5; –11; 15; 2	–15; –11; 15; 0
21	9; 5; 3; 1	–3; 2; 1; 2	4; –7; 4; –2	10; –13; –8; –1	–20; 0; 16; 2
22	7; 2; 1; 2	3; –5; 6; 1	–4; 3; –4; 1	–1; –18; –16; –5	–2; 0; –32; 1
23	1; 2; 3; 1	–5; 3; –1; 5	–6; 4; 5; 2	–4; 11; –20; 2	–12; 33; –20; 6
24	–2; 5; 1; 2	3; 2; –7; 1	4; –3; 2; 4	4; 22; 13; 3	–8; 0; –26; 1
25	3; 1; 2; 1	–4; 3; –1; 5	2; 3; 4; 1	14; 14; –20; –2;	28; 28; 0; 4
26	3; –1; 2; 3	–2; 4; 1; 1	4; –5; –1; 2	–5; –11; 1; –1	–15; –11; 3; 4
27	4; 5; 1; 1	1; 3; 1; –1	–3; –6; 7; 5	19; 33; 0; 3	38; 66; 0; –3
28	1; –3; 1; 2	–2; –4; 3; 2	0; –2; 3; 1	8; –10; –13; 5	–16; 0; 26; –1
29	5; 7; –2; 1	–3; 1; 3; –1	1; –4; 6; 3	–14; 9; –1; 1	0; 18; –2; 7
30	–1; 4; 3; 1	3; 2; –4; 5	–2; –7; 1; 4	6; –20; –3; 2	18; –20; –9; 2
31	0; 3; 6; –1	1; –1; 1; 2	1; 9; –1; 5	–5; –1; 7; –16	6; 0; –6; 18
32	1; –8; 7; 9	–1; 3; 0; –1	5; –1; 2; 0	2; 4; –1; 2	–6; –1; 5; 7

Задача 4

Даны векторы $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $\vec{n} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$, где $|\vec{a}| = k$, $|\vec{b}| = l$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi$. Найти: а) $(\lambda\vec{m} + \mu\vec{n})\cdot(\nu\vec{m} + \tau\vec{n})$; б) $\text{пр}_{\vec{n}}(\nu\vec{m} + \tau\vec{n})$; в) $\cos\left(\widehat{\vec{m}, \tau\vec{n}}\right)$.

Вари-ант	α	β	γ	δ	k	l	φ	λ	μ	ν	τ
1	–5	–4	3	6	3	5	$\frac{5\pi}{3}$	–2	$\frac{1}{3}$	1	2
2	–2	3	4	–1	1	3	π	3	2	–2	4
3	5	–2	–3	–1	4	5	$\frac{4\pi}{3}$	2	3	–1	5
4	5	2	–6	–4	3	2	$\frac{5\pi}{3}$	–1	$\frac{1}{2}$	2	3
5	3	–2	–4	5	2	3	$\frac{\pi}{3}$	2	–3	5	1
6	2	–5	–3	4	2	4	$\frac{2\pi}{3}$	3	–4	2	3
7	3	2	–4	–2	2	5	$\frac{4\pi}{3}$	1	–3	0	$-\frac{1}{2}$
8	5	2	1	–4	3	2	π	1	–2	3	–4
9	–3	–2	1	5	3	6	$\frac{4\pi}{3}$	–1	2	1	1
10	5	–3	4	2	4	1	$\frac{2\pi}{3}$	2	$-\frac{1}{2}$	3	0
11	–2	3	3	–6	6	3	$\frac{5\pi}{3}$	3	$-\frac{1}{3}$	1	2
12	–2	–4	3	1	3	2	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	3	1	2
13	4	3	–1	2	4	5	$\frac{3\pi}{2}$	2	–3	1	2
14	–2	2	5	1	2	5	2π	–3	4	2	3
15	4	–3	5	2	4	7	$\frac{4\pi}{3}$	–3	2	2	–1

Вари-ант	α	β	γ	δ	k	l	φ	λ	μ	ν	τ
16	–5	3	2	4	5	4	π	–3	$\frac{1}{2}$	–1	1
17	5	–2	3	4	2	5	$\frac{\pi}{2}$	2	3	1	–2
18	7	–3	2	6	3	4	$\frac{5\pi}{3}$	3	$-\frac{1}{2}$	2	1
19	4	–5	–1	3	6	3	$\frac{2\pi}{3}$	2	–5	1	2
20	3	–5	–2	3	1	6	$\frac{3\pi}{2}$	4	5	1	–2
21	–5	–6	2	7	2	7	π	–2	5	1	3
22	–7	2	4	6	2	9	$\frac{\pi}{3}$	1	2	–1	3
23	5	4	–6	2	2	9	$\frac{2\pi}{3}$	3	2	1	$-\frac{1}{2}$
24	–5	–7	–3	2	2	11	$\frac{3\pi}{2}$	–3	4	–1	2
25	5	–8	–2	3	4	3	$\frac{4\pi}{3}$	2	–3	1	2
26	–3	5	1	7	4	6	$\frac{5\pi}{3}$	–2	3	3	–2
27	–3	4	5	–6	4	5	π	2	3	–3	–1
28	6	–7	–1	–3	2	6	$\frac{4\pi}{3}$	3	–2	1	4
29	5	3	–4	–2	6	3	$\frac{5\pi}{3}$	–2	$-\frac{1}{2}$	3	2
30	4	–3	–2	6	4	7	$\frac{\pi}{3}$	2	$-\frac{1}{2}$	3	2
31	1	1	3	–1	3	6	$\frac{\pi}{4}$	–2	$\frac{1}{2}$	1	3
32	2	1	3	1	2	5	$\frac{3\pi}{4}$	–1	1	2	$\frac{1}{2}$

Задача 5

Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Необходимо : а) проверить, будут ли компланарны векторы $\alpha\vec{a}_1, \beta\vec{a}_2, \gamma\vec{a}_3$; б) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}_i, \vec{a}_j$; в) вычислить скалярное произведение векторов $m\vec{a}_k$ и $n\vec{a}_l$ и найти модуль их векторного произведения; г) найти проекцию вектора $\delta\vec{a}_1$ на вектор $\mu\vec{a}_2$ и $\cos\left(\widehat{\delta\vec{a}_1, \mu\vec{a}_2}\right)$.

Вари-ант	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	α	β	γ	i	j	m	n	k	l	δ	μ
1	2; –3; 1	0; 1; 4	5; 2; –3	1	2	3	1	3	1	–4	2	3	1	3
2	3; 4; 1	1; –2; 7	3; –6; 21	2	–3	1	2	3	1	1	1	3	5	2
3	2; –4; –2	7; 3; 0	3; 5; –7	3	2	3	1	3	1	–2	3	1	1	2
4	–7; 0; 2	2; –6; 4	1; –3; 2	2	4	3	1	3	2	–7	1	3	1	–2
5	–4; 2; –1	3; 5; –2	0; 1; 5	1	6	3	1	2	1	–4	1	3	1	6
6	3; –2; 1	0; 2; –3	–3 2; –1	5	4	3	1	3	–2	4	1	2	1	–3
7	4; –1; 3	2; 3; –5	7; 2; 4	7	2	5	2	3	2	4	2	3	7	–4
8	4; 2; –3	2; 0; 1	–12; –6; 9	2	3	–4	1	3	1	–4	2	3	2	3
9	–1; 0; 5	–3; 2; 2	–2; –4; 1	7	2	–3	2	3	2	3	2	1	3	–4
10	6; –4; 6	9; –6; 9	1; 0; –8	3	–4	–9	1	2	3	–5	1	3	2	–4
11	5; –3; 4	2; –4; –2	3; 5; –7	1	–2	6	2	3	–3	6	1	3	1	–4
12	–4; 3; –7	4; 6; –2	6; 9; –3	–2	4	7	2	3	5	–3	1	2	–2	1
13	–5; 2; –2	7; 0; –5	2; 3; –2	8	–3	11	1	3	8	–6	1	3	2	4
14	–4; –6; 2	2; 3; –1	–1; 5; –3	3	7	–2	1	2	3	–7	1	3	5	7
15	–4; 2; –3	0; –3; 5	6; 6; –4	3	–9	4	1	3	3	9	1	2	5	–1
16	–3; 8; 0	2; 3; –2	8; 12; –8	4	–6	9	2	3	3	–8	2	3	4	–6
17	2; –4; –2	–9; 0; 2	3; 5; –7	7	5	–1	1	3	3	–8	2	3	7	5
18	9; –3; 1	3; –15; 21	1; –5; 7	2	–7	4	2	3	5	7	2	1	2	–7
19	–2; 4; –3	5; 1; –2	7; 4; –1	1	–6	5	1	2	–9	7	1	3	1	–6
20	–9; 4; –5	1; –2; 4	–5;10;–20	–2	7	4	2	3	9	4	1	3	–2	7
21	2; –7; 5	–1; 2; –6	3; 2; –4	7	–4	3	2	3	7	–4	1	2	–3	6

Вари-ант	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	α	β	γ	i	j	m	n	k	l	δ	μ
22	7; –4; –5	1; –11; 3	5; 5; 3	–4	2	6	1	3	–4	–5	1	3	3	–7
23	4; –6; –2	–2; 3; 1	3; –5; 7	–5	3	4	1	2	–5	4	1	3	6	3
24	3; –1; 2	–1; 5; –4	6; –2; 4	6	–7	–2	1	3	–2	5	1	2	4	–7
25	–3; –1; –5	2; –4; 8	3; 7; –1	2	5	–6	2	3	5	–6	2	3	2	–1
26	–3; 2; 7	1; 0; 5	6; 4; –1	–2	3	7	1	3	3	1	2	3	–2	1
27	3; –1; 5	2; –4; 6	1; –2; 3	–3	4	–5	2	3	1	4	1	3	–3	4
28	4; –5; –4	5; –1; 0	2; 4; –3	–3	4	8	1	3	8	–3	3	1	1	7
29	–9; 0; 4	2; –4; 6	3; –6; 9	3	6	–4	2	3	–2	8	1	3	3	–5
30	5; –6; –4	4; 8; –7	0; 3; –4	5	4	–2	1	2	7	–2	1	3	5	3
31	1; 2; 3	0; –1; 1	5; 2; 1	1	2	1	1	2	1	–3	2	3	1	–1
32	–2; 0; 1	1; 1; 9	–1; 1; 7	2	1	2	2	3	2	–2	1	–2	–1	1

Задача 6

Вершины пирамиды находятся в точках *A*, *B*, *C*, *D*.

Вычислить:

а) площадь указанной грани;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра *l* и две вершины пирамиды;

в) объем пирамиды *ABCD*;

г) сделать чертеж.

Вари-ант	*A*	*B*	*C*	*D*	Грань	*l*	Две вершины
1	(3; 4; 5)	(1; 2; 1)	(–2; –3; 6)	(3; –6; –3)	*ACD*	*AB*	*C* и *D*
2	(–7; –5; 6)	(–2; 5; –3)	(3; –2; 4)	(1; 2; 2)	*BCD*	*CD*	*A* и *B*
3	(1; 3; 1)	(–1; 4; 6)	(–2; –3; 4)	(3; 4; –4)	*ACD*	*BC*	*A* и *D*
4	(2; 4; 1)	(–3; –2; 4)	(3; 5; –2)	(4; 2; –3)	*ABD*	*AC*	*B* и *D*
5	(–5; –3; –4)	(1; 4; 6)	(3; 2; –2)	(8; –2; 4)	*ACD*	*BC*	*A* и *D*
6	(3; 4; 2)	(–2; 3; –5)	(4; –3; 6)	(6; –5; 3)	*ABD*	*BD*	*A* и *C*
7	(–4; 6; 3)	(3; –5; 1)	(2; 6; –4)	(2; 4; –5)	*ACD*	*AD*	*B* и *C*
8	(7; 5; 8)	(–4; –5; 3)	(2; –3; 5)	(5; 1; –4)	*BCD*	*BC*	*A* и *D*
9	(3; –2; 6)	(–6; –2; 3)	(1; 1; –4)	(4; 6; –7)	*ABD*	*BD*	*A* и *C*
10	(–5; –4; –3)	(7; 3; –1)	(6; –2; 0)	(3; 2; –7)	*BCD*	*AD*	*B* и *C*
11	(3; –5; –2)	(–4; 2; 3)	(1; 5; 7)	(–2; –4; 5)	*ACD*	*BD*	*A* и *C*

Вариант	A	B	C	D	Грань	l	Две вершины
12	(7; 4; 9)	(1; –2; –3)	(–5; –3; 0)	(1; –3; 4)	ABD	AB	C и D
13	(–4; –7; –3)	(–4; –5; 7)	(2; –3; 3)	(3; 2; 1)	BCD	BC	A и D
14	(–4; –5; –3)	(3; 1; 2)	(5; 7; –6)	(6; –1; 5)	ACD	BC	A и D
15	(5; 2; 4)	(–3; 5; –7)	(1; –5; 8)	(9; –3; 5)	ABD	BD	A и C
16	(–6; 4; 5)	(5; –7; 3)	(4; 2; –8)	(2; 8; –3)	ACD	AD	B и C
17	(5; 3; 6)	(–3; –4; 4)	(5; –6; 8)	(4; 0; –3)	BCD	BC	A и D
18	(5; –4; 4)	(–4; –6; 5)	(3; 2; –7)	(6; 2; –9)	ABD	BD	A и C
19	(–7; –6; –5)	(5; 1; –3)	(8; –4; 0)	(3; 4; –7)	BCD	AD	B и C
20	(7; –1; –2)	(1; 7; 8)	(3; 7; 9)	(–3; –5; 2)	ACD	BD	A и C
21	(5; 2; 7)	(7; –6; –9)	(–7; –6; 3)	(1; –5; 2)	ABD	AB	C и D
22	(–2; –5; –1)	(–6; –7; 9)	(4; –5; 1)	(2; 1; 4)	BCD	BC	A и D
23	(–6; –3; –5)	(5; 1; 7)	(3; 5; –1)	(4; –2; 9)	ACD	BC	A и D
24	(7; 4; 2)	(–5; 3; –9)	(1; –5; 3)	(7; –9; 1)	ABD	BD	A и C
25	(–8; 2; 7)	(3; –5; 9)	(2; 4; –6)	(4; 6; –5)	ACD	AD	B и C
26	(4; 3; 1)	(2; 7; 5)	(–4; –2; 4)	(2; –3; –5)	ACD	AB	C и D
27	(–9; –7; 4)	(–4; 3; –1)	(5; –4; 2)	(3; 4; 4)	BCD	CD	A и B
28	(3; 5; 3)	(–3; 2; 8)	(–3; –2; 6)	(7; 8; –2)	ACD	BD	A и C
29	(4; 2; 3)	(–5; –4; 2)	(5; 7; –4)	(6; 4; –7)	ABD	AD	B и C
30	(–4; –2; –3)	(2; 5; 7)	(6; 3; –1)	(6; –4; 1)	ACD	BC	A и D
31	(2; 3; 4)	(4; 7; 3)	(1; 2; 2)	(–2; 0; –4)	ABC	AB	C и D
32	(4; 3; 2)	(7; 4; 3)	(1; 2; –2)	(–2; 0; –1)	BCD	AB	C и D

Задача 7

Даны три силы: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, приложенные к точке A. Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B;

в) сделать чертеж.

Вариант	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_3$	A	B
1	(9; –3; 4)	(5; 6; –2)	(–4; –2; 7)	(–5; 4; –2)	(4; 6; –5)
2	(5; –2; 3)	(4; 5; –3)	(–1; –3; 6)	(7; 1; –5)	(2; –3; –6)
3	(3; –5; 4)	(5; 6; –3)	(–7; –1; 8)	(–3; 5; 9)	(5; 6; –3)
4	(–10; 6; 5)	(4; –9; 7)	(5; 3; –3)	(4; –5; 9)	(4; 7; –5)
5	(5; –3; 1)	(4; 2; –6)	(–5; –3; 7)	(–5; 3; 7)	(3; 8; –5)

Вари-ант	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_3$	A	B
6	(–5; 8; 4)	(6; –7; 3)	(3; 1; –5)	(2; –4; 7)	(0; 7; 4)
7	(7; –5; 2)	(3; 4; –8)	(–2; –4; 3)	(–3; 2; 0)	(6; 4; –3)
8	(3; –4; 2)	(2; 3; –5)	(–3; –2; 4)	(5; 3; –7)	(4; –1; –4)
9	(4; –2; –5)	(5; 1; –3)	(–6; 2; 5)	(–3; 2; –6)	(4; 5; –3)
10	(7; 3; –4)	(9; –4; 2)	(–6; 1; 4)	(–7; 2; 5)	(4; –2; 11)
11	(9; –4; 4)	(–4; 6; –3)	(3; 4; 2)	(5; –4; 3)	(4; –5; 9)
12	(6; –4; 5)	(–4; 7; 8)	(5; 1; –3)	(–5; –4; 2)	(7; –3; 6)
13	(5; 5; –6)	(7; –6; 6)	(–4; 3; 4)	(–9; 4; 7)	(8; –1; 7)
14	(7; –6; 2)	(–6; 2; –1)	(1; 6; 4)	(3; –6; 1)	(6; –2; 7)
15	(4; –2; 3)	(–2; 5; 6)	(7; 3; –1)	(–3; –2; 5)	(9; –5; 4)
16	(7; 3; –4)	(3; –2; 2)	(–5; 4; 3)	(–5; 0; 4)	(4; –3; 5)
17	(3; –2; 4)	(–4; 4; –3)	(3; 4; 2)	(1; –4; 3)	(4; 0; –2)
18	(2; –1; –3)	(3; 2; –1)	(–4; 1; 3)	(–1; 4; –2)	(2; 3; –1)
19	(–1; –4; 2)	(6; –6; 5)	(0; 7; 2)	(3; 4; –6)	(2; 6; 5)
20	(4; 5; 6)	(–1; –3; –8)	(–6; –1; –7)	(6; –3; 5)	(9; 5; –7)
21	(1; –3; 2)	(5; 8; –1)	(–4; 14; –5)	(5; 3; 4)	(6; –4; –1)
22	(3; –5; 2)	(–3; 4; –8)	(–4; 6; –1)	(4; –2; 3)	(7; 0; –3)
23	(1; –2; –1)	(–6; 8; 5)	(9; 5; –10)	(3; 5; 1)	(4; –2; –3)
24	(8; –6; 5)	(–3; 2; –4)	(–2; –1; 6)	(2; 3; –5)	(0; 4; 3)
25	(11; –8; –3)	(2; 5; 6)	(–8; 7; 8)	(6; 1; –5)	(4; 2; –6)
26	(2; 5; –6)	(8; –3; 12)	(–19; 3; 1)	(1; 6; –3)	(4; –3; 5)
27	(–1; 2; –3)	(0; 9; –7)	(7; –6; 3)	(7; –6; 4)	(4; 9; –6)
28	(2; –3; 4)	(–3; 2; 2)	(–4; 5; –2)	(3; 7; –5)	(2; –4; 1)
29	(5; 2; –8)	(–2; –4; 2)	(1; 9; 3)	(5; –4; 2)	(8; 5; –4)
30	(4; –3; –4)	(–3; 6; 6)	(1; –1; 7)	(4; 2; –3)	(2; 4; 0)
31	(0; 1; 9)	(5; 6; –2)	(–4; –2; 8)	(–5; –2; 4)	(4; 6; 1)
32	(9; –4; 3)	(3; 4; 2)	(0; 1; 6)	(4; 7; 5)	(2; 8; 13)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гурский, Е. И.** Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Мн. : Выш. шк., 1982. – 272 с.

2 **Гурский, Е. И.** Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.]. – Мн. : Выш. шк., 1989. – 350 с.

3 **Гусак, А. А.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра : справ. пособие по решению задач / А. А. Гусак. – Мн. : ТетраСистемс, 2008. – 287 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

5 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатёнок [и др.]; под ред. В. Т. Воднева. – Мн. : Выш. шк., 1986. – 271 с.

6 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 4 ч. Ч.1 / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 2008. – 303 с.

7 **Васильева, Т. И.** Матрицы и определители / Т. И. Васильева, С. П. Новиков. – Гомель : БелГУТ, 1997. – 34 с.

8 **Задорожнюк, Е. А.** Векторы / Е. А. Задорожнюк. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 49 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ДЕРГАЧЁВА Ирина Михайловна
СОКОЛЬСКИЙ Александр Юрьевич

Линейная и векторная алгебра

Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 12.01.2012 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,32 Уч.-изд. л. 1,60 Тираж 1200 экз.
Зак № . Изд № 170

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34